Математичка гимназија

Матурски рад
из математике

Игра Анђела и Ђавола

Ученик
Вукашин Бабић, IVд

Ментор
др Соња Чукић

Београд, мај 2024.

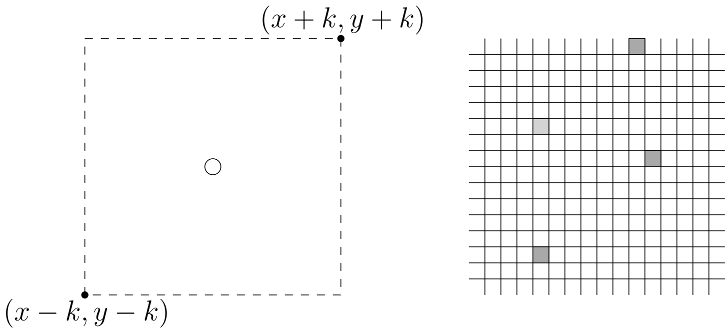
Садржај

1

Увод

Анђео и Ђаво играју следећу игру на бесконачној шаховској табли, где сваком пољу можемо придружити пар целих бројева (x, y). У свом потезу Ђаво може да поједе било које поље табле, тј. то поље постаје забрањено Анђелу. Анђео је фигура која са (x, y) може да се помери на било које поље (X, Y), такво да су $|X - x|$ и $|Y - y|$ највише k, где је k природан број који зовемо снагом Анђела. Без умањења општости нека Анђео почиње игру са $(0, 0)$. Ђаво побеђује ако зароби Анђела, тј. окружи га оградом поједених поља дебљине бар k. Анђео побеђује ако може да се креће заувек.

Поставља се питање: „Може ли Анђео неке снаге победити Ђавола?” Овај проблем поставио је Џон Конвеј 1982. године, понудивши награду за потпуно решење проблема. Тек 2006. појавила су се четири независна рада која потврђују да Анђео може победити.



Слика 1.1. Лево: Анђелов потез; Десно: Ђаво једе квадрат, три су већ поједена.

Постоје разне варијанте проблема: у три димензије, на различитим таблама. Сем првобитног проблема, у овом раду ћемо се бавити и варијантом на троугаоној и шестоугаоној табли.

2

Стратегије које не раде

Дефиниција 2.1. Краљ је играч који у свом потезу може да пређе само на поља са којима тренутно поље има заједничко теме.

Последица 1. Краљ је Анђео снаге 1.

Берлекамп [4] је показао да Ђаво може победити Анђела снаге један (Краља) на табли величине најмање 32×33, и ту теорему наводимо без доказа.

Теорема 2.1. Ђаво може да победи Краља.

2.1 Блесан и Ђаво

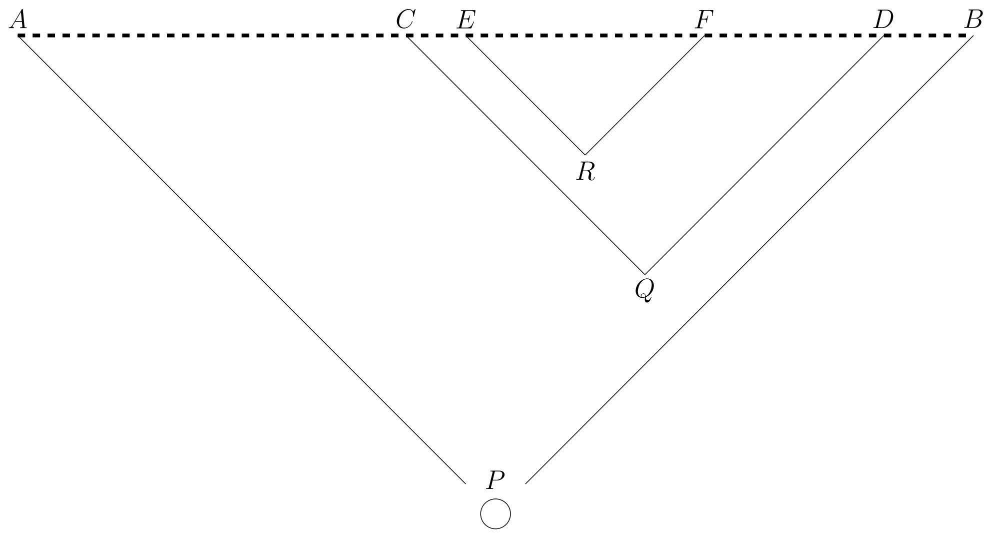
Дефиниција 2.2. Блесан (енг. *Fool*) је Анђео који увек стриктно увећава своју y-координату, тј. Блесан са поља (x, y) може да се помери на поље (X, Y), где је $Y > y$.

Теорема 2.2. Ђаво може да ухвати Блесана.

Доказ. Када се Блесан нађе у некој тачки P, у сваком наредном тренутку може се налазити само у углу оивиченим са две полуправе нагиба $\pm\frac{1}{k}$ кроз P. Тад саветујемо Ђавола да чини следеће: треба да *скрати* овај угао на троугао хоризонталном линијом AB на веома великом растојању H од почетне позиције, и искористи своје прве потезе да поједе сваки M-ти квадрат дуж AB, где је M изабрано тако да то једење дуж AB буде готово кад Анђео дође у тачку Q на пола пута, тј. на растојању $\frac{1}{2}H$ од AB (изаберемо H да буде дељиво са неким великим степеном двојке).

У том тренутку, Ђаво зна да ће Блесан бити ограничен на троугао QCD, где је CD дуж на AB, половине дужине AB. У следећим потезима Ђаво треба да поједе сваки M-ти квадрат, поред ових које је већ појео, дуж CD. Он ће то урадити док Блесан дође у тачку R, на растојању $\frac{1}{4}H$ од AB. Онда ће Блесан бити ограничен на још мањи троугао REF, где је $EF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{4}AB$, и Ђаво треба да настави, једући сваки M-ти квадрат, поред ових које је већ појео дуж EF.

Ако наставе тако, док Блесан дође до растојања $H' = 2^{-M}H$ од AB, Ђаво је појео све квадрате на AB до којих Блесан може да дође. Ђаво наставља онда да једе сваки M-ти квадрат дуж $A'B'$ (која је тачно испод AB), што треба да буде завршено док Блесан дође до растојања $\frac{1}{2}H'$ од $A'B'$, а затим сваки M-ти квадрат, поред ових које је већ појео дуж $C'D'$ на $A'B'$, и тако даље. Видимо да ако је $H = k2^N$, где је $N > kM$, пре него Блесан дође у тачку која је ближа од k од AB, Ђаво је већ појео све квадрате одатле до AB до којих Блесан може да доспе, па је тиме Блесан заробљен. □



Слика 2.1. Блесан путује „нагоре”

2.2 Неодлучни Блесан

Врсту Блесана коју смо до сада посматрали надаље ћемо прецизније звати Обични Блесан, јер ћемо показати да Ђаво може да ухвати и неке не тако наивне Блесане.

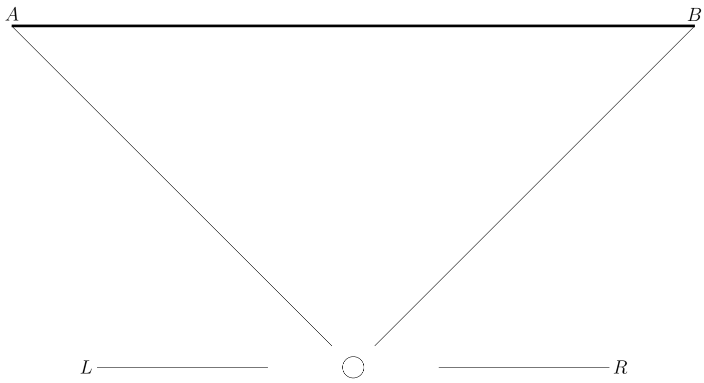
Дефиниција 2.3. Неодлучни Блесан (енг. *Lax Fool*) је Анђео који са поља (x, y) може да се помери на поље (X, Y), где је $Y \geqslant y$.

Теорема 2.3. Ђаво може да ухвати Неодлучног Блесана.

Доказ. Ђаво користи своје непарне потезе да претвори Неодлучног Блесана у Обичног Блесана (много веће снаге). Он бира два квадрата L и R, на погодном растојању D од почетне позиције Блесана, и једе ка унутра наизменично од L и R све док Блесан остаје на стартној линији. Кад год се Блесан помери нагоре, Ђаво узима хоризонталу кроз нову Блесанову позицију као нову стартну линију.

Претпоставимо да Блесан остаје на стартној линији неко време. Тада може да искористи своја четири потеза која има између два залогаја Ђавола са леве стране да се помери за највише $4k$. Дакле, ако узмемо $D = 4k^2$, Ђаво ће појести k узастопних квадрата слева пре него Блесан дође до њих. Сада видимо да Блесан на стартној линији може остати најдуже $8k^2$ потеза, јер у $8k^2 + 1$ потез Ђаво може да поједе све квадрате између L и R.

Ако Ђаво примењује ову стратегију, Блесан мора увећати своју y-координату најмање једном у $8k^2$ потеза. Ако га посматрамо само у овим тренуцима, видимо да се понаша као Обични Блесан снаге $8k^3$, јер се у сваком потезу могао померити за највише k. Дакле ако се Ђаво користи стратегијом да ухвати Обичног Блесана снаге $8k^3$ парним потезима, ухватиће и Неодлучног Блесана снаге k. □



Слика 2.2. Неодлучни Блесан путује „нагоре”

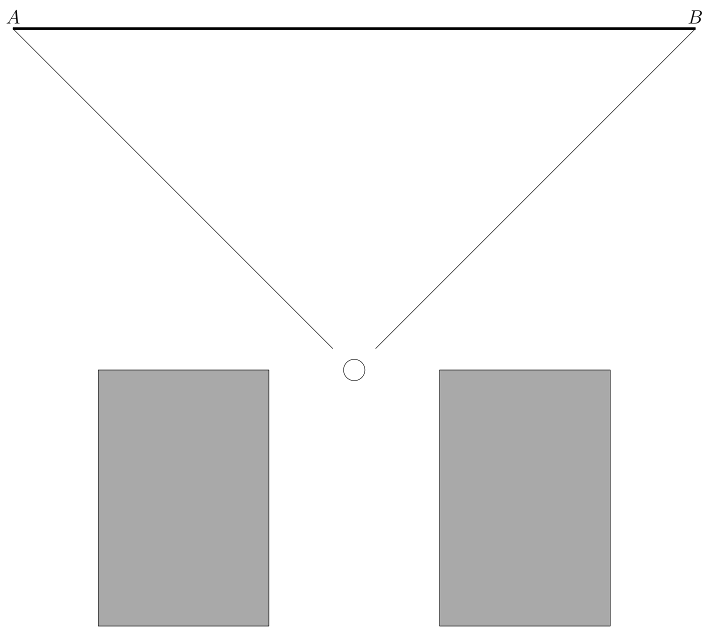
2.3 Опуштени Блесан

Претпоставимо сад да Анђео с времена на време дозволи себи да смањи y-координату, али обећа да никад неће учинити низ потеза да је смањи за више од l.

Дефиниција 2.4. Опуштени Блесан (енг. *Relaxed Fool*) опуштености l је Анђео који обећа да ако је икад на позицији (X, Y), никада касније неће бити на (x, y) тако да $y > Y - l$.

Теорема 2.4. Ђаво може да ухвати Опуштеног Блесана било које опуштености.

Доказ. Слично као прошли доказ, само сад Ђаво једе правоугаонике са леве и десне стране висине l на одговарајућој удаљености од Блесана. □

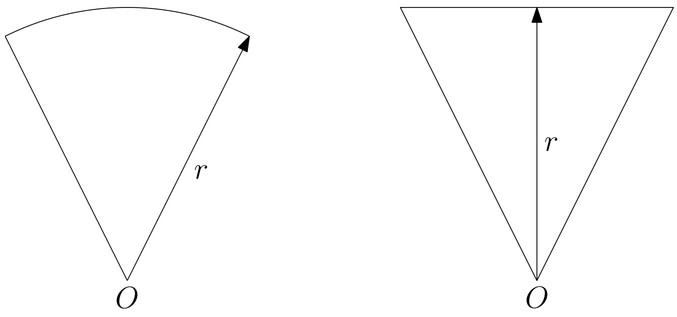


Слика 2.3. Опуштени Блесан путује „нагоре”

2.4 Потпуни Блесан

Пошто је игра Анђела и Ђавола инспирисана Берлекамповим доказом да Ђаво може да ухвати Краља на свим довољно великим таблама, користили смо метрику шаховског краља, у којој су јединична поља квадрати поравнати са осама. Међутим, аргументи основне топологије показују да ово заиста није важно. За наш проблем нема никакве разлике ако претпоставимо да је Анђео у било ком тренутку позициониран на произвољној тачки еуклидске равни, и да може да лети у једном потезу до било које друге тачке удаљене највише k јединица, док Ђаво може да поједе све тачке произвољног затвореног јединичног диска у било ком од његових потеза.

Претпоставимо, на пример, да Анђео обећава да ће увек остати унутар кружног исечка на слици, као и да ће увек повећавати своју r-координату (удаљеност од темена O овог исечка). Тада га Ђаво може ухватити, трансформишући овај исечак у троугао са исте слике, на начин да се r-координата претвори у y-координату. Али ова трансформација претвара Анђела у Обичног Блесана.



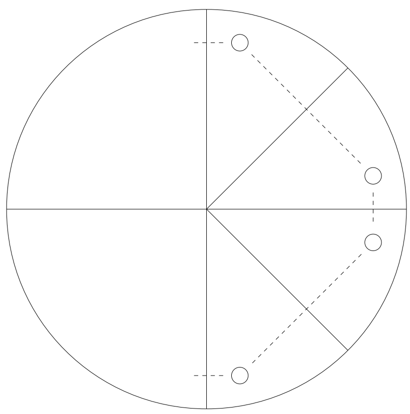
Слика 2.4. Трансформација исечка

Дефиниција 2.5. Потпуни Блесан (енг. *Out-and-Out Fool*) је Анђео који обећа да ће се увек удаљавати од почетне позиције.

Теорема 2.5. Ђаво може да ухвати Потпуног Блесана.

Доказ. Ђаво треба да подели раван на $2N$ исечака, и да се понаша као да су одвојени огледалима, као калеидоскоп. Тада ће бити највише $2N$ ликова Блесана, један у сваком парчету. Ђаво тад подели посао $2N$ демона, тако да се сваки постара за један Блесанов лик у свом исечку, који се понаша као Обични Блесан снаге $2kN$ као на претходној слици, па га демон може ухватити мало промењеном стратегијом из теореме 2.2. $\square$

Наравно, Ђаво може да ухвати и Опуштеног Потпуног Блесана који обећа да никад неће неправити низ потеза тако да се приближи почетној позицији за више од l.



Слика 2.5. Стратегија калеидоскопа

3

Анђео побеђује

У овом поглављу ћемо изложити Матеов [2] доказ да Анђео снаге 2 може да победи Ђавола.

Дефиниција 3.1. Растојање квадрата (x_a, y_a) и (x_b, y_b) означавамо са $d\left((x_a, y_a), (x_b, y_b)\right)$ и једнако је $\max\{|x_a - x_b|, |y_a - y_b|\}$, и нека је $B(r) = \{(x, y) \mid d((0,0),(x,y)) \leqslant r\}$.

3.1 Фини Ђаво

Лема 3.1. Ако Ђаво може да ухвати Анђела снаге k, онда постоји природан број N, такав да Ђаво може да зароби Анђела у $B(N)$.

Доказ. Ако за свако природно n Анђео има стратегију да направи n потеза а да не стане ни на једно поједено поље, то значи да има победничку стратегију. Дакле, ако Ђаво може да ухвати Анђела, постоји n такво да може да га ухвати у највише n потеза. Добијамо да ће Анђео снаге k бити заробљен у $B(nk)$. $\square$

Дефиниција 3.2. Фини Ђаво је Ђаво који никада не поједе поље на ком је раније био Анђео, нити поље на које је Анђео некада могао да скочи али то није учинио.

Очигледно Анђео који се игра са Финим Ђаволом може да се креће заувек, па модификујемо циљ игре.

Дефиниција 3.3. Ако постоји природан број N такав да је Анђео заробљен у $B(N)$, то сматрамо победом Финог Ђавола. Анђео побеђује у супротном.

Теорема 3.1. За све природне бројеве k и N, ако Ђаво може да зароби Анђела снаге k у $B(N)$, онда Фини Ђаво такође може да зароби Анђела снаге k у $B(N)$.

Пре доказивања ове теореме, морамо да размотримо шта је Ђавоља стратегија.

Дефиниција 3.4. Путања Анђела снаге k је низ поља $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ такав да је $v_0 = (0,0)$ и $d(v_i, v_{i+1}) \leqslant k$ за свако $0 \leqslant i < n$.

Дакле, стратегија Ђавола је нека функција Φ која слика сваку коначну путању Анђела у неки квадрат (који треба да буде поједен). Прецизније, Φ слика путање у скуп $\mathbb{Z}^2 \cup \{\text{ништа}\}$, јер смо дозволили Ђаволу да не поједе ништа ако тако жели. (Ђаво такође зна која су поља већ поједена, па путања Анђела садржи све информације о игри.) За неку путању кажемо да је *дозвољена* за неку стратегију Ђавола ако та путања не садржи ни један поједени квадрат од стране Ђавола.

Доказ теореме 3.1. Фиксирајмо стратегију Φ за Ђавола са којом може да зароби Анђела снаге k у $B(N)$ (то јест, Анђео не може да напусти ту област без стајања на поједени квадрат).

Нека $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ буде путања. Дефинишемо усмерен граф над $G = \{0, 1, \ldots, n\}$. За свако $i \in \{G \setminus 0\}$, нека j буде најмањи ненегативан цео број такав да $d(v_i, v_j) \leqslant k$ ($j < i$ јер је $d(v_{i-1}, v_i) \leqslant k$). Спојимо i и j усмереном граном. Граф сада има n усмерених грана. Постоји јединствен пут од n до 0. Означимо га са $(a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0)$, где је m број грана у овом путу. Дакле, $a_m = n$ и $a_0 = 0$. За свако $0 \leqslant i \leqslant m$ нека је

$$u_i = v_{a_i}. \tag{1}$$

Низ поља $(u_0, u_1, \ldots, u_m)$ називамо *редукованом путањом* путање $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$, под условом да је $v_n \neq v_0$. Ако је $v_n = v_0$, онда нека редукована путања буде (u_0) и нека је $m = 0$. Приметимо да $u_0 = (0,0)$, $u_m = v_n$ и $d(u_i, u_{i+1}) \leqslant k$ за свако $0 \leqslant i < m$. Штавише, за свако $1 \leqslant i \leqslant m$, ако је j најмањи индекс за који $d(v_j, u_i) \leqslant k$, онда је $u_{i-1} = v_j$. Дакле за различите i и j имамо $u_i \neq u_j$.

Сада дефинишимо стратегију Финог Ђавола Ψ. Фини Ђаво ће у првом потезу (док је Анђео на (0,0)) појести исто поље које би и Ђаво појео у првом потезу (прецизније $\Phi(((0,0))))$, осим ако би Ђаво појео (0,0), онда Фини Ђаво не једе ништа. Ако је $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ путања, $(u_0, u_1, \ldots, u_m)$ редукована путања, $z = \Phi((u_0, u_1, \ldots, u_m))$, дефинишимо

$$\Psi((v_0, v_1, \ldots, v_n)) = \begin{cases} z, & \text{ако } d(z, v_l) > k \text{ за свако } 0 \leqslant l < n \text{ и } z \neq (0,0), \\ \text{ништа}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

Тако да је стратегија Финог Ђавола (Ψ) да поједе квадрат који би Ђаво (Φ) појео за *редуковану путању*, али само ако му је дозвољено да једе то поље, иначе не једе ништа, јер је фин.

Тврдимо да је Ψ победничка стратегија за Финог Ђавола, тј. да Анђео не може да напусти $B(N)$ ако игра против Ψ.

Лема 3.2. Ако је $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ дозвољена путања Анђела против Ψ (тј. ако Анђео може да се креће по овој путањи без стајања на поједени квадрат), онда је његова редукована путања $(u_0, u_1, \ldots, u_m)$ дозвољена путања против Φ, стратегије Ђавола.

Доказ. Претпоставимо супротно, да постоје цели бројеви s и t такви да $0 \leqslant s < t \leqslant m$ и $\Phi((u_0, u_1, \ldots, u_s)) = u_t$. Нека s' буде најмањи индекс такав да је $v_{s'} = u_s$, и нека t' буде најмањи индекс такав да је $v_{t'} = u_t$. Из (1) имамо да је $s' = a_s$ и $t' = a_t$, па је $s' < t'$. Приметимо да пошто је $t \geqslant 1$, $u_t \neq (0,0)$, па и $v_{t'} \neq (0,0)$.

Лако се види да је $(u_0, u_1, \ldots, u_s)$ редукована путања од $(v_0, v_1, \ldots, v_{s'})$. Дакле, $\Psi((v_0, v_1, \ldots, v_{s'}))$ је или $\Phi((u_0, u_1, \ldots, u_s)) = u_t = v_{t'}$ или ништа. Не може бити $v_{t'}$, јер онда Анђео мора да стане на поједени квадрат $v_{t'}$ играјући против Финог Ђавола. Дакле $\Psi((v_0, v_1, \ldots, v_{s'})) =$ ништа. Онда, на основу (2) (пошто $v_{t'} \neq (0,0)$), постоји $l \in \{0, \ldots, s'-1\}$ такво да

$$d(v_{t'}, v_l) \leqslant k. \tag{3}$$

Тврдимо да је ово у контрадикцији са тим да је $(u_0, u_1, \ldots, u_m)$ редукована путања од $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$. Заиста, у графу G, јединствени пут од n до 0 прво пролази кроз t', а касније s'. Али из (3) добијамо да су сви чворови који су после t' у том путу у скупу $\{0, \ldots, s'-1\}$. Овим смо завршили доказ ове леме. □

На основу леме 3.2. имамо да $u_m \in B(N)$. Како је $v_n = u_m$, имамо и $v_m \in B(N)$, па Фини Ђаво може заробити Анђела у $B(N)$. □

На основу леме 3.1. и теореме 3.1. одмах добијамо следеће.

Теорема 3.2. Ако Ђаво може да ухвати Анђела снаге k, онда постоји природно N такво да Фини Ђаво може да ухвати Анђела снаге k у $B(N)$.

3.2 Довољно јак Анђео

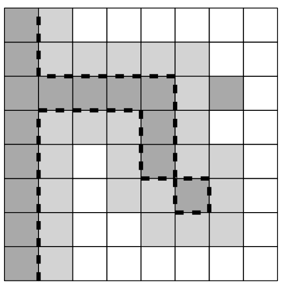
У овом делу ћемо доказати да довољно јак Анђео може да победи Финог Ђавола.

Заправо, наш Анђео неће скакати са једног квадрата на други, него ће *трчати* по суседним (непоједеним) квадратима. То јест, ако је v_0 почетна позиција Анђела, он може да трчи по $v_0, v_1, \dots, v_n$ *у једном потезу*, где за свако $0 \leqslant i \leqslant n$ важи $d(v_0, v_i) \leqslant k$ и квадрати v_i и v_{i+1} су суседни (имају заједничку страницу) за свако $0 \leqslant i < n$. Због техничких разлога, нека је $n \leqslant 2k$. Наравно, на почетку следећег потеза, позиција Анђела је v_n. Очигледно да Анђео снаге k може да имитира овог *Тркача*.

Сходно томе, тражимо мање од Финог Ђавола. За наше потребе, довољно је да не једе квадрате на којима је Тркач већ стајао или протрчао. Замислимо сад нашу таблу као лавиринт: поједени квадрати су високи зидови кроз које Тркач не може проћи. Без умањења општости можемо замолити Финог Ђавола да поједе све квадрате $\{(x, y) \mid x < 0\}$ пре почетка игре. Ово му никако не може нашкодити.

У сваком тренутку замишљамо да је Тркач у квадрату и да је окренут у одређеном смеру. (Усвојићемо неку помало неформалну терминологију као што је *Тркачева лева рука*, али се надамо да ће ово читаоцу бити много јасније од неке њене формалне верзије.) Пре свог првог потеза, Тркач је усмерен ка горе и левом руком додирује зид (ту је зид пошто је квадрат $(-1, 0)$ већ поједен). Може чак и да затвори очи: потребна му је само лева рука да пронађе пут. У сваком свом потезу, Тркач трчи што више може (на највише растојању k од места где је кренуо) док увек додирује зид левом руком на левој страни. Дакле, Тркач такође скреће лево или десно ако треба. Пошто се квадрати $\{(x, y) \mid x < 0\}$ поједу пре него што игра почне, Тркач ће увек имати неки зид са леве стране. (Тркач може користити исто поље више пута чак и у истом потезу!)

Замислимо да Тркач такође има зелену боју у левој руци и да боји линију



Слика 3.1. Тркачев пут

дуж зидова које додирне. Споменули смо да Тркач трчи што више може у сваком свом потезу, али на удаљености највише k од места где је кренуо, а његова рута не може бити дужа од $2k$ квадрата. Да будемо прецизни, морамо дати још једно ограничење: Тркачу је дозвољено да обоји највише, рецимо, $2k$ зидова у сваком свом потезу (рачунајући вишеструкости). Под тим мислимо да мора да престане да трчи након $2k$ бојења.

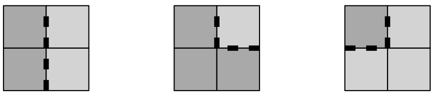
Приметимо да ако видимо обојен зид знамо у ком је смеру ишао Тркач, пошто су зидови увек на његовој левој страни. Ради једноставности, назовимо квадрате преко којих је Тркач (већ) претрчао плавим квадратима.

Лема 3.3. Ако Тркач користи стратегију дефинисану горе, онда је следеће тачно:

1. У сваком кораку, зелена (усмерена) линија се састоји од усмерених дужи дужине један. За сваку усмерену зелену дуж, на левој страни је поједени квадрат, а на десној плави (непоједен).

2. Чак и ако Тркач поново обоји исти зид, увек га обоји у истом смеру.

3. Ако постоји зид који је обојен два пута, онда је први зид који је Тркач обојио два пута први зид који је Тркач икада обојио. Стога, у овом случају, зелена линија је затворена.



Слика 3.2. Три могућности за позиције e и f из доказа леме 3.3.

Доказ. Прво је тривијално јер Фини Ђаво не једе плаве квадрате. Друго следи из чињенице да Тркач боји само на левој страни.

Да бисмо доказали трећу тврдњу, посматрајмо први пут када Тркач боји претходно обојени зид (ивицу), и означимо ову ивицу са e. Очигледно, ако је ивица e прва ивица икада обојена, онда је Тркач насликао *круī* до бојења e по други пут, и он ће бесконачно трчати по овом кругу (у ствари, по његовој унутрашњој страни, у смеру казаљке на сату).

Претпоставимо да e није прва ивица икада обојена. Онда је Тркач обојио ивицу f непосредно пре него што је први пут обојио e. Имамо три суштински различите могућности за положај ових ивица (слика).

Ако су f и e колинеарне, онда су два квадрата са десне стране ових ивица већ плави пре него што је Тркач могао да обоји e по други пут, а два поља са леве стране су већ поједена. Тако Тркач не може да допре до e ни са десне ни са леве стране, а очигледно не може ни одозго другим делом ове леме. Тако је морао да обоји f два пута пре него што је два пута обојио e, што је у супротности са избором e. Друге две могућности се могу решити на исти начин као и ова (слика). □

Лако је проверити да Тркач обоји најмање k зидова у сваком потезу (рачунајући вишеструкости, ако је потребно).

Лема 3.4. Ако је k довољно велико, онда се Тркач никада неће вратити на почетну позицију. Штавише, Тркач путује произвољно далеко од почетне позиције, шта год да уради Фини Ђаво.

Доказ се заснива на чињеници да ако је k довољно велико онда *Тркач шрчи брже него шшо Фини Ђаво може да изтради зидове.*

Доказ. Приметимо да ако се Тркач не врати на почетну позицију, онда ће до трећег дела леме 3.3. сваки зид бити обојен највише једном. Претпоставимо да је $k \geqslant 11$. Лако је видети да шта год да Фини Ђаво уради у свом првом потезу, после првог потеза Тркачева y-координата је најмање k. Такође, након другог потеза Тркачева y-координата је најмање $2k$.

Индукцијом по t ћемо доказати да се Тркач неће вратити на почетну позицију у t потеза. За $t = 2$ смо готови. Претпоставимо да се Тркач није вратио на почетну позицију у t потеза. После t потеза, Фини Ђаво је појео највише t квадрата, који укупно имају највише $4t$ зидова. Тркач снаге k боји најмање tk различитих зидова за то време. Дакле, Тркач је обојио најмање $tk - 4t$ зидова на квадратима поједеним пре почетка (дуж y осе). Дуж тих квадрата он се може кретати само на горе, али не на доле. Дакле, у једном тренутку игре је Тркач сигурно имао y-координату бар $tk-4t$. Од тог тренутка није могао смањити своју y-координату за више од t, па је након t потеза његова y-координата барем

$$tk - 4t - t = t(k-5).$$

Како је $t \geqslant 2$ и $k \geqslant 11$, ово је барем $2(k-5) \geqslant k+1$. Дакле, Тркач се неће вратити на почетну позицију за $t+1$ потез: његова y-координата ће бити барем 1. Индукцијом такође добијамо да је за свако t, након t потеза, Тркачева y-координата је бар $t(k-5)$. Дакле, Тркач путује произвољно далеко од почетне позиције. □

Лема 3.4. јасно имплицира да Анђео довољно велике снаге може победити Финог Ђавола. Тако из теореме 3.2. добијамо следеће.

Теорема 3.3. Анђео довољно велике снаге може победити Ђавола.

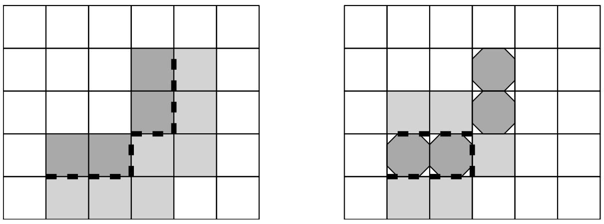
3.3 Анђео снаге 2

Да бисмо показали да Анђео снаге 2 такође може да победи, мало ћемо изменити начин на који он трчи (у поређењу са Тркачем из претходног дела) и направићемо пажљиве процене. Доказ се заснива на једноставној чињеници да, иако квадрат има четири странице, ако су поједени квадрати један поред другог да формирају дугачак зид, рачунају се само две странице по квадрату. Отуда Анђео снаге 2 може трчати око поједених квадрата истом брзином као што их Ђаво гради. (Стога наше процене морају бити прилично строге и прецизне – међутим, никада нећемо користити да Анђео такође може да скочи преко квадрата.)

Посматрамо скупове коначно много квадрата из $\mathbb{Z}^2$. Да будемо јасни, квадрат $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ одговара квадрату $[x, x+1] \times [y, y+1]$ у равни. Два квадрата називамо *суседним* ако имају заједничку страницу.

Дефиниција 3.5. Скуп поља S називамо *повезаним* ако за свака два различита поља $a,\ b \in S$ постоји пут у S, $a = c_0, c_1, \ldots, c_n = b$ такав да су c_i и c_{i+1} суседни за свако $0 \leqslant i < n$.

Лема 3.5. Нека S буде скуп n квадрата из $\mathbb{Z}^2$ $(n \geqslant 1)$. Ако је S повезан, онда се граница скупа $\bigcup S$ састоји од највише $2n+2$ страница (јединичних дужи).

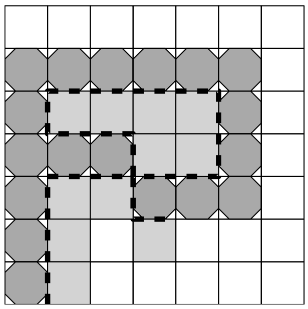


Слика 3.3. Разлика путева Тркача и Анђела снаге 2

Доказ. Лако се докаже индукцијом. За $n = 1$ очигледно важи. Посматрајмо скуп $n+1$ повезаних квадрата. Тада сигурно постоји квадрат чијим уклањањем остатак остаје повезан (ако посматрамо као граф, изаберемо произвољан лист разапињућег стабла). По индуктивној хипотези остатак има највише $2n+2$ страница. Враћањем претходно уклоњеног квадрата у повезани скуп квадрата бришемо (најмање) једну страницу и додајемо највише три нове. Дакле, скуп $n+1$ повезаних квадрата има највише $2n+2-1+3 = 2(n+1)+2$ страница, чиме смо доказали тврђење леме. □

У овом делу фиксирамо снагу Анђела на 2. Анђео ће се понашати делимично као Тркач у претходном делу, али овде може да прави и дијагоналне потезе (као од $(5,5)$ до $(4,6)$). Овде Анђео замишља да основе зидова које гради Фини Ђаво нису као квадрати већ као осмоуглови (слика). Дакле, квадрати који имају једну заједничку тачку, али не и заједничку страницу, постају удаљени један од другог; Анђео може да се провуче између њих (пошто ће његова лева рука пратити зидове). Погледати слику за пример како се креће Тркач из претходног дела и како се креће Анђео снаге 2.

Да будемо прецизнији, ако је Анђео на потезу и ако је његова позиција квадрат v_0, он ће следити путању $v_0, v_1, \ldots, v_n$ где је $d(v_0, v_i) \leqslant 2$ за све $0 \leqslant i \leqslant n$, $d(v_i, v_{i+1}) \leqslant 1$ за свако $0 \leqslant i < n$, а такође из техничких разлога претпостављамо да је n највише 4. Позиција Анђела ће, наравно, бити v_n на крају његовог потеза. За наше потребе је довољно Фини Ђаво не једе квадрате које је Анђео користио.



Слика 3.4. Анђелова зелена линија

Као и у претходном делу, Анђео ће у сваком свом потезу покушати да трчи што више може, док му лева рука увек додирује и боји зид. (Из техничких разлога не дозвољавамо Анђелу да обоји више од 4 зида по потезу.) Као што се може видети на слици, чудно је да је боја на страницама квадрата, а не на страницама осмоуглова, али ово је оно што нам треба за процене.

Лако је проверити да Анђео обоји најмање 2 зида у сваком потезу. Дакле, у t потеза он обоји најмање $2t$ зидова (рачунајући вишеструкости, ако је потребно). Како квадрат (x, y) одговара квадрату $[x, x+1] \times [y, y+1]$ у равни, Анђелова зелена линија почиње из $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Лако је проверити да лема 3.3. важи и за овог Анђела и његову зелену линију (само доказ трећег дела је другачији, видети и слику). Дакле, све док Анђелова зелена линија поново не достигне x-осу, Анђео не може да двапут обоји зид који је обојио на самом почетку игре, и притом сваки зид обоји највише једном. Касније ћемо користити ову чињеницу.

Такође ћемо претпоставити да је Фини Ђаво појео све квадрате $\{(x, y) \mid x < 0\}$ пре почетка игре.

Теорема 3.4. Анђелова зелена линија никада неће поново достигнути x-осу.

Доказ. Посматрајмо први пут када је зелена линија достигла x-осу. Претпоставимо да се то догодило у t-том потезу Анђела. Дакле, Фини Ђаво је појео већ (највише) t квадрата, а Анђео је већ обојио најмање $2(t-1)+1$ зидова: $2(t-1)$ у својих првих $t-1$ потеза, и морао је да обоји још најмање један у овом потезу да би достигао x-осу. Из претходног је лако закључити да се ради о различитим зидовима. Нека је d број квадрата које је Фини Ђаво појео у области $\{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ и нека a буде број различитих зидова које је Анђео обојио док његова зелена линија није достигла x-осу. Имамо

$$d \leqslant t \quad \text{и} \quad a \geqslant 2t-1. \tag{4}$$

Хајде да прекинемо игру у овом тренутку и да избришемо све са доње половине табле: то јест, избришимо све поједене квадрате и све квадрате поједене пре почетка игре са $\{(x, y) \mid y < 0\}$. (Нема зелене линије у овој полуравни.) Избришимо и све квадрате поједене пре почетка игре осим квадрата $\{(-1, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant N-1\}$ за неки веома велики цео број N. Нека је $N-100$ веће од y-координате „највишег” поједеног квадрата који је Фини Ђаво појео током игре, а такође веће од y-координате „највише” тачке зелене линије. Дакле, на табли је остало тачно $N+d$ поједених поља.

Сада замолимо Анђела да настави свој пут и своје бојење као што је то чинио раније. Али нећемо дозволити да Фини Ђаво једе више квадрата. Пре или касније Анђео ће се вратити на своју почетну позицију у квадрату $(0, 0)$, а зелена линија ће се вратити у тачку $(0, 0)$. Стога ће зелена линија формирати круг. Означимо њену дужину са l (ово је и укупан број обојених зидова).

Лема 3.6. За дужину l дефинисану изнад важи

$$l \geqslant a+2N+5.$$

Доказ. Анђео је током регуларне игре обојио различите зидове све док зелена линија није достигла x-осу, рецимо у тачки $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Дакле, x_0 је природан број. Онда је зелена линија сигурно прекрила дуж $[(x_0, 0), (x_0+1, 0)]$. Док зелена линија не дође до тачке $(0, N)$, она мора да иде на горе најмање N пута и на лево најмање $x_0+1 \geqslant 2$ пута. Затим, зелена линија покрива $[(0, N), (-1, N)]$ и $[(-1, N), (-1, 0)]$ (што је лева страна квадрата поједених пре игре $\{(-1, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant N-1\}$). Коначно, зелена линија покрива $[(-1, 0), (0, 0)]$. Према томе, $l \geqslant a+1+N+2+1+N+1 = a+2N+5$. □

Лако је проверити да су поједени квадрати унутар зелене линије повезани. (Ово није тачно за Тркача, али важи за нашег паметнијег Анђела снаге 2.) Овај повезани скуп има најмање l страница на својој граници (можда много више). Дакле, број квадрата у овом скупу је најмање $\frac{l-2}{2}$ према леми 3.5. С друге стране, у овом скупу има највише $N + d$ квадрата, па

$$N + d \geqslant \frac{l-2}{2}.$$

Из леме 3.6. даље имамо

$$N + d \geqslant \frac{a + 2N + 5 - 2}{2} = \frac{a+3}{2} + N.$$

Из (4) следи

$$N + t \geqslant \frac{2t - 1 + 3}{2} + N = N + t + 1,$$

што је контрадикција. Стога зелена линија не може поново достићи x-осу током игре. □

Теорема 3.5. Анђео снаге 2 може да победи Финог Ђавола.

Доказ. Дали смо стратегију за Анђела снаге 2 тако да замишљена зелена линија никада више не достигне x-осу, и стога Анђео више никада неће обојити исти зид (теорема 3.4). Пошто у ограниченој области постоје само руте коначне дужине где би зелена линија могла да иде, очигледно ће зелена линија напустити сваку ограничену област – стога ће и Анђео напустити сваку ограничену област, како год да игра Фини Ђаво. □

Одавде на основу теореме 3.2. одмах добијамо следеће.

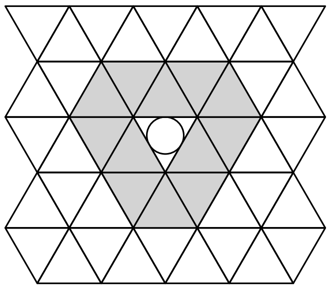
Теорема 3.6. Анђео снаге 2 може да победи Ђавола.

4

Троуглови и шестоуглови

У овом поглављу ћемо разматрати шта се деси кад *преселимо* играче ове игре на другачије табле: троугаону и шестоугаону. Правила остају скоро иста. Ђаво у свом потезу једе једно поље, док Анђео снаге k може да прелети до поља удаљеног за највише k. То јест, Анђео снаге k може да прелети на било које поље на које би Краљ дошао у највише k потеза. Анђео губи ако је заробљен, тј. ако једино поље на које може да прелети тренутно поље.

Модификујући доказ за квадратну таблу из претходног поглавља, доказаћемо да на троугаоној табли Краљ побеђује, а затим на основу тога да на шестоугаоној табли Анђео снаге 2 побеђује.



Слика 4.1. Краљ на троугаоној табли

4.1 Троугаона табла

Доказ из претходног поглавља се геометријски ослања на одређену неједнакост да повезани скуп од n поља не може имати произвољно велики обим.

На квадратној табли, горња граница обима је $2n + 2$. Упоређујући са шестоугаоном и троуганом таблом, схватамо да је коефицијент 2 заправо број страница поља минус 2. На шестоугаоној табли одговарајућа горња граница је $4n + 2$ док је на троугаоној $n + 2$. Чињеница да је граница боља за троуглове сугерише да се може наћи слабији победнички Анђео на троуганој табли. Показаћемо да на троуганој табли Анђео на слици побеђује (Краљ).

Лема 4.1. Нека S буде скуп n троуглова из $\mathbb{Z}^2$ ($n \geqslant 1$). Ако је S повезан, онда се граница скупа $\bigcup S$ састоји од највише $n + 2$ странице (јединичних дужи).

Доказ. Лако се докаже индукцијом. За $n = 1$ очигледно важи. Посматрајмо скуп $n + 1$ повезаних троуглова. Тада сигурно постоји троугао чијим уклањањем остатак остаје повезан (ако посматрамо као граф, изаберемо произвољан лист разапињућег стабла). По индуктивној хипотези остатак има највише $n+2$ страница. Враћањем претходно уклоњеног троугла у повезани скуп троуглова бришемо (најмање) једну страницу и додајемо највише две нове. Дакле, скуп $n + 1$ повезаних троуглова има највише $n + 2 - 1 + 2 = (n + 1) + 2$ страница, чиме смо доказали тврђење леме. □

Посматрамо игру Финог Ђавола и Краља који примењује стратегију налик Тркачевој. Прво ћемо *ойшшије* доказати теорему 3.2, и преформулисати $B(N)$ у било какав коначан скуп поља S, да бисмо могли да је применимо и на троугаону таблу.

Дефиниција 4.1. Потез Ђавола на поље на ком је раније био Анђео, или поље на које је Анђео некада могао да скочи али то није учинио називамо *заседа*.

Последица 2. Фини Ђаво је Ђаво који не прави заседе.

Дефиниција 4.2. Ако је S коначан скуп поља, онда се стратегија Ђавола која гарантује да Анђео никада не напусти S назива S-победничка.

Очигледно (слично леми 3.1) Ђаво има победничку стратегију ако и само ако за неко коначно S има S-победничку стратегију.

Лема 4.2. Нека S буде коначан скуп поља. Ако Ђаво има S-победничку стратегију, има је и Фини Ђаво.

Доказ. Доказаћемо лему индукцијом. Претпоставимо да Ђаво има S-победничку стратегију Θ која не прави заседу у првих n потеза. Докажимо онда да постоји S-победничка стратегија која не прави заседу у првих $n + 1$ потеза.

Нека Ђаво игра према Θ првих n потеза. Претпоставимо да у $n+1$ потезу Θ од Ђавола захтева да направи заседу на пољу a (иначе немамо шта да доказујемо). У том случају, модификујемо стратегију тако да у том потезу Ђаво одигра произвољан потез који није заседа. Затим, Ђаво игра према Θ докле год Анђео не дође у a. Кад год Анђео дође у поље a, Ђаво се пребацује на игру како би играо према Θ да је Анђео дошао на поље a први пут када је могао.

Закључујемо да не постоји n за које је Ђаво приморан да направи заседу током првих n потеза како би задржао Анђела унутар S. Пошто Ђаво има само коначно много *разумних* потеза (ћелије у S и оне до којих Анђео може доћи једним потезом од S), следи тврђење леме. $\square$

Дефиниција 4.3. Троуглу $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ одговара троугао у равни странице 1 чије је средиште висине на хоризонталну страницу у тачки $(\frac{1}{2}x, \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}y) \in \mathbb{R}^2$. За парно $x + y$ троугао је усмерен на доле, а за непарно на горе.

Пре почетка игре замолимо Финог Ђавола да поједе све троуглове лево од праве $y = -x\sqrt{3}$ (тј. $\{(x, y) \mid y < -x\sqrt{3}\}$). То му свакако не може шкодити. За наше потребе је довољно да Фини Ђаво не једе троуглове које је Краљ користио.

Краљ ће да се понаша слично као Тркач из претходног дела. Измене су то да Краљ може да пређе на свако поље које има заједничко теме са тренутним (нпр. од $(0, 0)$ до $(-1, 1)$), и наравно само за једно поље по потезу (снага 1). Наравно, Краљ се увек налази на пољу које дели ивицу са поједеним пољем, док му лева рука рука додирује и боји зид.

Лако је проверити Краљ обоји најмање 1 зид у сваком потезу. Дакле, у t потеза он обоји најмање t зидова (рачунајући вишеструкости, ако је потребно). Како *најниже* теме троугла $(0, 0)$ одговара координатном почетку, Краљева зелена линија почиње из $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Лако је проверити да лема 3.3. важи и за Краља и његову зелену линију (само доказ трећег дела је другачији). Дакле, све док Краљева зелена линија поново не достигне x-осу, Краљ не може да двапут обоји зид који је обојио на самом почетку игре, и притом сваки зид обоји највише једном. Касније ћемо користити ову чињеницу.

Теорема 4.1. Краљева зелена линија никада неће поново достигнути x-осу.

Доказ. Посматрајмо први пут када је зелена линија достигла x-осу. Претпоставимо да се то догодило у t-том потезу Краља. Дакле, Фини Ђаво је појео већ (највише) t троуглова, а Краљ је већ обојио најмање t зидова. Из претходног је лако закључити да се ради о различитим зидовима. Нека је d број троуглова које је Фини Ђаво појео у области $\{(x,y) \mid x \geqslant 0 \ \wedge \ y \geqslant -x\}$. Нека a буде број различитих зидова које је Краљ обојио док његова зелена линија није достигла x-осу. Имамо

$$d \leqslant t \quad \text{и} \quad a \geqslant t. \tag{5}$$

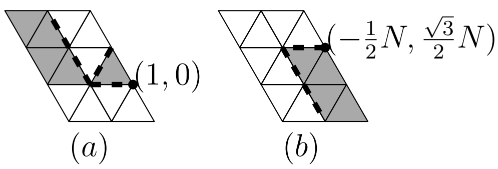
Хајде да прекинемо игру у овом тренутку и да избришемо све са доње половине табле: то јест, избришимо све поједене троуглове и све троуглове поједене пре почетка игре са $\{(x,y) \mid y < 0\}$. (Нема зелене линије у овој полуравни.) Избришимо и све троуглове поједене пре почетка игре осим $\{(x,x) \mid 0 \leqslant x \leqslant N-1\}$ и $\{(x,x+1) \mid 0 \leqslant x \leqslant N-1\}$ за неки довољно велики цео број N (доста већи од координата било ког троугла на ком је био неки од играча). Дакле, на табли је остало тачно $2N+d$ поједених поља.

Сада замолимо Краља да настави свој пут и своје бојење као што је то чинио раније. Али нећемо дозволити да Фини Ђаво једе више троуглова. Пре или касније Краљ ће се вратити на своју почетну позицију у троуглу $(0,0)$, а зелена линија ће се вратити у тачку $(0,0)$. Стога ће зелена линија формирати круг. Означимо њену дужину са l (ово је и укупан број обојених зидова).

Лема 4.3. За дужину l дефинисану изнад важи

$$l \geqslant a + 2N + 3.$$

Доказ. Анђео је током регуларне игре обојио различите зидове све док зелена линија није достигла x-осу, рецимо у тачки $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Дакле, најмање што x_0 може да буде је 0 или 1, али у оба случаја зелена линија пролази кроз $(1,0)$, видети слику. Док зелена линија не дође до $(-\frac{1}{2}N, \frac{\sqrt{3}}{2}N)$, она мора да пређе пут најмање дужине $N+1$. Затим зелена линија покрива дужи $[(-\frac{1}{2}N, \frac{\sqrt{3}}{2}N), (-\frac{1}{2}N-1, \frac{\sqrt{3}}{2}N)]$, $[(-\frac{1}{2}N-1, \frac{\sqrt{3}}{2}N), (-1,0)]$ и $[(-1,0),(0,0)]$. Према томе $l \geqslant a + N + 1 + 1 + N + 1 = a + 2N + 3$. □



Слика 4.2. Кључне тачке зелене линије

Лако је проверити да су поједени троуглови унутар зелене линије повезани. Овај повезани скуп има најмање l страница на својој граници (можда много више). Дакле, број троуглова у овом скупу је најмање $l-2$ према леми 4.2. С друге стране, у овом скупу има највише $2N+d$ троуглова, па

$$2N + d \geqslant l - 2.$$

Из леме 4.3. даље имамо

$$2N + d \geqslant a + 2N + 3 - 2 = 2N + a + 1.$$

Из (5) следи

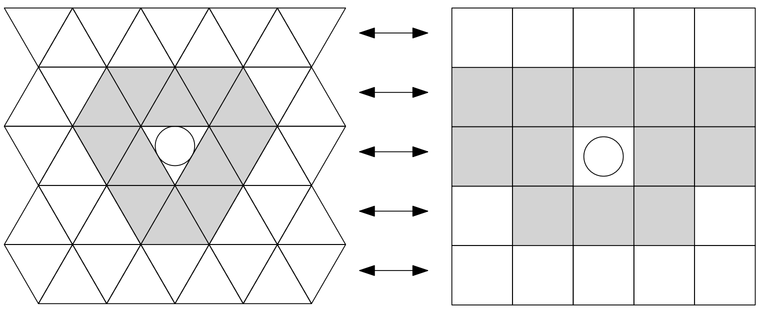
$$2N + t \geqslant 2N + t + 1,$$

што је контрадикција. Стога зелена линија не може поново достићи x-осу током игре. □

На основу теореме 3.5. и леме 4.2. добијамо

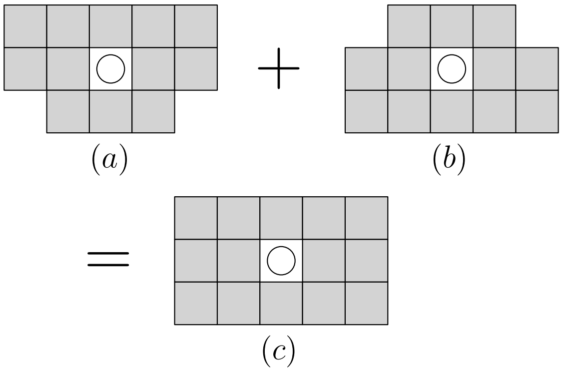
Теорема 4.2. Краљ може да победи Ђавола на троугаоној табли.

4.2 Шестоугаона табла



Слика 4.3. 1-1 пресликавање

Рецимо да Анђео има *јачину* j ако је његов максимални број легалних потеза из било које позиције j. Пресликавањем 1-1 између троугаоне и квадратне табле приказане на слици, Краљ троугаоне табле се трансформише у Анђела јачине 12 на квадратној решетки. Образац кретања овог Анђела је ограничен, али није инваријантан при транслацији. Са стандардним бојењем шаховске табле, овај Анђео ће се кретати као на слици 4.4(a) са поља једне боје, а као на слици 4.4(b) са поља друге боје. Из тога следи да Анђео са слике 4.4(c), који може да се помери са средњег квадрата на било који други квадрат правоугаоника 5 са 3, може побећи од Ђавола. Овај Анђео јачине 14 је најслабији познати победнички Анђео инваријантан при транслацији, али верујемо да постоје знатно слабији победнички Анђели.



Слика 4.4. Анђео јачине 14

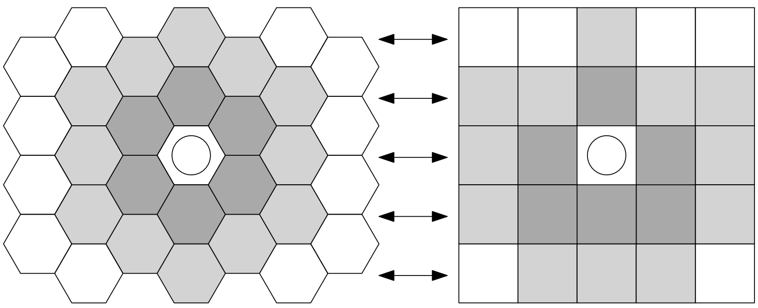
Дефиниција 4.4. Шестоуглу $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ одговара шестоугао у равни странице 1 чији је центар у $(\frac{3}{2}x,\ nep(x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}y) \in \mathbb{R}^2$, где је $nep(x) = \frac{1-(-1)^x}{2}$.

Пресликавањем 1-1 између шестоугаоне и квадратне табле приказане на слици, Краљ шестоугаоне табле се трансформише у Анђела јачине 6 на квадратној решетки. Следи да је он слабији од Краља квадратне табле, па из теореме 2.1. директно добијамо следеће.

Теорема 4.3. Ђаво може да победи Краља на шестоугаоној табли.

Истим овим пресликавањем се Анђео снаге 2 на шестоугаоној табли слика у Анђела јачине 18 на квадратној табли (слика). Приметимо да је он онда стриктно јачи од Анђела јачине 14 са слике 4.4(c), па следи следеће.

Теорема 4.4. Анђео снаге 2 може да победи Ђавола на шестоугаоној табли.



Слика 4.5. 1-1 пресликавање

5

Закључак

У овом раду је прво представљен доказ да на квадратној табли Анђео снаге 2 има победничку стратегију. Затим је показано да на троугаоној табли Ђаво не може да ухвати Краља. На крају је вештим пресликавањима установљено да постоји победнички Анђео мање јачине на квадратној табли, као и да на шестоугаоној табли само Краљ може бити ухваћен.

Искористио бих ову прилику да се захвалим свом ментору др Соњи Чукић на издвојеном времену и бројним корисним коментарима и сугестијама.

Литература

[1] Conway, J. H. (1996). The angel problem. *Games of no chance*, 29, 3-12.

[2] Máthé, A. (2007). The angel of power 2 wins. *Combinatorics, Probability and Computing*, 16(3), 363-374.

[3] Wästlund, J. (2008). A weaker winning angel.

[4] Guy, R. K., Conway, J. H., & Berlekamp, E. R. (2003). *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Volume 3. CRC Press.