Математичка гимназија

Матурски рад
из математике

Ремзијева теорија

Ученик
Стеван Радивојевић, IVд

Ментор
др Соња Чукић

Београд, 27. мај 2024.

Садржај

1

Увод

Ремзијеву теорију је први развио британски математичар Френк П. Ремзи почетком 20. века. Он се конкретно бавио проблемом постојања и израчунавања Ремзијевих бројева. Уз помоћ других математичара попут Пола Ердоша, Алфреда Хејлса и Рађишовског, током 20. века Ремзијева теорија се шири, популаризује и самим тим долази до нових открића унутар ње. Ова теорија конкретно истражује услове под којима одређена структура мора постојати унутар великих и довољно сложених система, попут графова или скупова и самим тим нам гарантује да тотални хаос никад није могућ, чак ни у наизглед великим системима без икаквог реда.

Ремзијева теорија не само да пружа дубок увид у комбинаторне структуре, него има и значајан утицај на развој математике и њених примена. Она има широке примене, не само у математици, већ и у информатици, конкретно у дизајну комуникационих мрежа, теорији игара и статистици. Њена способност да пронађе ред у наизглед хаотичним системима чини је посебно интересантном за проучавање.

У првом делу рада ћемо приказати шта су Ремзијеви бројеви, показати њихово постојање, најбоље процене које постоје у вези њих и израчунати пар познатих вредности. У другом делу ћемо се бавити конкретно Ремзијевом теоријом, главним теоремама у њој и последицама које имају у теорији игара, контркретно у генерализованим (m, n, k)–играма.

2

Уводни појмови

2.1 Граф

Дефиниција 2.1. Граф G је уређени пар (V, E) где је V скуп чворова, а E скуп грана, где важи $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V\}$.

Видимо да, са оваквом дефиницијом, између свака два чвора може да постоји највише једна грана. Грану $\{u, v\}$ ћемо означавати и са uv.

Дефиниција 2.2. Граф је прост ако ни за једно $x \in V$ не важи $\{x\} \in E$.

У наставку рада подразумевамо да су сви графови прости.

Дефиниција 2.3. Степен чвора v је број грана које су повезане за чвором v и означавамо га са $\deg v$.

Дефиниција 2.4. Подграф графа $G(V, E)$ је граф $G'(V', E')$ где су скупови V', E' подскупови скупова V, E редом.

Дефиниција 2.5. Граф је комплетан ако између свака два чвора графа постоји грана. Комплетан граф са n чворова означавамо са K_n.

2.2 Бојење графа

Дефиниција 2.6. Са $[n]$ означавамо скуп првих n природних бројева.

Дефиниција 2.7. r–бојење скупа A је функција f која слика све чланове скупа A у неке елементе из $[r]$ (тј. $f : A \to [r]$).

Дефиниција 2.8. r–бојење графа $G(V, E)$ је r–бојење скупа E.

Дефиниција 2.9. Монохроматски граф је граф у коме је свака грана исте боје.

Дефиниција 2.10. Ремзијев број $R(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ је најмањи природан број такав да за сваки природни број $m \geqslant R(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ важи да за било какво k–бојење графа K_m постоји природан број i, $1 \leqslant i \leqslant k$, такав да постоји монохроматски граф K_{n_i} боје i који је подграф од K_m.

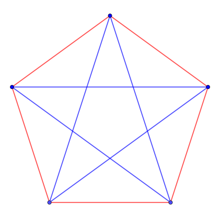
3

Ремзијеви бројеви

Пример 3.1. Нека се шесторо људи налази у соби. Показати да можемо изабрати троје људи таквих да се они или сви међусобно познају или не познају.

Доказ. Преведимо овај проблем у свет графова. „Нови” задатак нам је да докажемо да сваки K_6 обојен у две боје, рецимо црвену и плаву, садржи монохроматски троугао. Претпоставимо супротно и посматрајмо неки чвор A. Његов степен је 5 тако да без умањења општости можемо рећи да има макар 3 плаве гране, назовимо одговарајуће чворове са којима их прави B, C и D. Ако је било која од грана BC, CD или BD плава, заједно са теменом A би чинили плави троугао, што значи да су све три црвене, из чега следи да је троугао BCD црвен. □

Ако ово преведемо на језик Ремзијеве теорије, добијамо да је $R(3,3) \leqslant 6$. Шта више, испоставиће се да $R(3,3) = 6$ и да је израчунавање Ремзијевих бројева за веће бројеве озбиљан проблем.



Слика 3.1. Пример који показује да K_5 није довољан

Прво ћемо показати да Ремзијеви бројеви постоје за произвољне бројеве и број боја.

Теорема 3.1. Вредност $R(n, m)$ је коначна за све природне бројеве n и m.

Доказ. Доказ извршавамо индукцијом по $n+m$. Јасно је да за $n+m = 2$ услов важи јер је једини могућ случај $n = m = 1$. Овај услов тривијално испуњава граф са једним чвором.

Сад претпоставимо да постоје $R(n-1, m)$ и $R(n, m-1)$. Тврдимо да је

$$R(n, m) \leqslant R(n-1, m) + R(n, m-1). \tag{3.1}$$

Нека је $t = R(n-1, m) + R(n, m-1)$. Посматрајмо произвољно 2–обојен K_t и изаберимо произвољан чвор v. Рецимо да је он повезан са N плавих и M црвених грана. Како је $N + M = \deg v = R(n-1, m) + R(n, m-1) - 1$, следи да је или $N \geqslant R(n-1, m)$ или $M \geqslant R(n, m-1)$. Без умањења општости рећи ћемо да је $N \geqslant R(n-1, m)$. Сад знамо да је v директно повезан или са плавим K_{n-1}, где заједно праве плави K_n, или са црвеним K_m што је крај доказа. □

Теорема 3.2. *[Ремзи]* Вредност $R(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ је коначна за све одабире броја k и бројева n_i за све $1 \leqslant i \leqslant k$.

Доказ. Доказ извршавамо индукцијом по броју боја (односно по броју k). Случај $k = 2$ је доказан у теореми 3.1.

Под претпоставком да је тврдња тачна за $k-1$ и произвољан избор n_k доказаћемо да важи

$$R(n_1, n_2, \ldots, n_k) \leqslant R(n_1, n_2, \ldots, n_{k-2}, R(n_{k-1}, n_k)). \tag{3.2}$$

Ако је $t = R(n_1, n_2, \ldots, n_{k-2}, R(n_{k-1}, n_k))$, k–обојимо граф K_t. Посматрајмо боје $k-1$ и k као исте. У том случају имамо граф са $R(n_1, n_2, \ldots, n_{k-2}, R(n_{k-1}, n_k))$ чворова и $(k-1)$-обојен што значи да или постоји монохроматски подграф K_{n_i} за неко i из опсега $1 \leqslant i \leqslant k-2$, или подграф $K_{R(n_{k-1}, n_k)}$ обојен том „заједничком” бојом. Ако је први случај у питању доказ је завршен. Ако је други случај у питању, раздвојимо сад опет те боје на оригиналну $k-1$ и k–ту боју. Сад имамо комплетан граф величине $R(n_{k-1}, n_k)$ који је 2–обојен што значи да постоје монохроматски $K_{n_{k-1}}$ или K_{n_k} што је и крај доказа. □

Доказали смо постојање Ремзијевих бројева, али још не знамо у којим границама се налазе, њихове конкретне вредности и слично.

3.1 Ограничавање Ремзијевих бројева

Проблем процене $R(n_1, \ldots, n_k)$ је изузетно тежак. У овом делу рада ћемо приказати неке основне оцене Ремзијевих бројева и приказати како се добијају прецизније оцене за $R(n, m)$.

Лема 3.1. За свака два природна броја m и n важи $R(m, n) \leqslant \binom{m+n-2}{n-1}$.

Доказ. Доказ извршавамо индукцијом по $n + m$. За $m = 2$ тривијално важи $R(2, n) \leqslant n$. Коришћењем услова за $n + m - 1$ доказаћемо и за $n + m$. Из једначине (3.1) знамо да је

$$\begin{aligned} R(n, m) &\leqslant R(n-1, m) + R(n, m-1) \\ &\leqslant \binom{m+n-3}{n-2} + \binom{m+n-3}{n-1} \\ &= \binom{m+n-2}{n-1}. \end{aligned}$$

□

Лема 3.2. За сваки број $k \in \mathbb{N}$ и произвољан избор бројева $n_i \in \mathbb{N}$ важи

$$R(n_1 + 1, \ldots, n_k + 1) \leqslant \binom{n_1 + \cdots + n_k}{n_1, \ldots, n_k}.$$

Доказ. Знамо да важи

$$R(n_1 + 1, \ldots, n_k + 1) \leqslant R(n_1, \ldots, n_k + 1) + \cdots + R(n_1 + 1, \ldots, n_k) - (k - 2)$$

из истих разлога као и једначина (3.1) само за више бројева. Занемарујући члан $(k - 2)$ (што можемо јер је $k \geqslant 2$), исто као у леми 3.1 индуктивно доказујемо ову оцену. □

Лема 3.3. За сваки број $m \in \mathbb{N}$ важи $R(m, m) \geqslant 2^{\frac{m}{2}}$.

Доказ. Доказ извршавамо пробилистичком методом. Нека је $n = R(m, m)$. Ако насумично обојимо граф K_n у две боје, знамо да обе боје имају вероватноћу појављивања $p = \frac{1}{2}$ и да је вероватноћа да K_m буде монохроматски $2p^{\binom{m}{2}}$ (може бити неке од две боје, док грана у графу има управо $\binom{m}{2}$). Како подграфова величине m има $\binom{n}{m}$ то значи да ако је вероватноћа постојања монохроматског подграфа величине m највише

$$\binom{n}{m} 2p^{\binom{m}{2}} = \binom{n}{m} 2^{1-\binom{m}{2}}.$$

Кад би ова вредност била мања од 1, знали би да постоји бојење у ком не постоји монохроматски граф, што значи да

$$P = \binom{n}{m} 2^{1-\binom{m}{2}} \geqslant 1.$$

Претпоставимо сад да је $n < 2^{\frac{m}{2}}$.

$$\begin{aligned} P = \binom{n}{m} 2^{1-\binom{n}{m}} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} 2^{1-\frac{m^2}{2}+\frac{m}{2}} \\ &\leqslant \frac{n^m}{m!} \cdot \frac{2^{1+\frac{m}{2}}}{2^{\frac{m^2}{2}}} < \frac{2^{\frac{m^2}{2}}}{m!} \cdot \frac{2^{1+\frac{m}{2}}}{2^{\frac{m^2}{2}}} = \frac{2^{1+\frac{m}{2}}}{m!}. \end{aligned}$$

Индукцијом се лако може показати да је $m! > 2^{1+\frac{m}{2}}$ за $m \geqslant 3$ што значи да за $m \geqslant 3$ знамо да $P < 1$ што је контрадикција. Још нам остаје да докажемо да тврђење важи за $m = 2$, а како је $R(2,2) = 2 = 2^{\frac{2}{2}}$, то крај доказа. $\square$

3.2 Томасонова оцена

Можемо да приметимо да нам ова оцена уопште не даје прецизну горњу границу, јер пре свега користимо глобалан услов који важи на целом графу и примењујемо га на само један једини чвор. Али, испоставиће се да је најбоља оцена за сад нама позната истог реда као у леми 3.1.

Томасон је оцену тражио у облику $R(n+1, m+1) \leqslant f(m,n)\binom{n+m}{n}$. Најпре, мотивација за овако нешто је што се одржава ред величине, а оцена уопште није прецизна за $f(n,m) = 1$ те покушавамо да је „поправимо”.

Лема 3.4. Нека су γ и δ реални бројеви и нека је $n = \lceil f(k,l)\binom{k+l}{k} \rceil = f^*(k,l)\binom{k+l}{k}$. Претпоставимо да за $m \in \{1,2\}$ важи

$$\begin{aligned} &R(k+1-m, l+1) \leqslant f(k-m, k)\binom{k-m+l}{k-m}, \\ &R(k+1, l+1-m) \leqslant f(k, l-m)\binom{k+l-m}{k}, \\ &\frac{f(k-m,l)}{f^*(k,l)} \leqslant 1 + m\gamma, \\ &\frac{f(k,l-m)}{f^*(k,l)} \leqslant 1 + m\delta. \end{aligned}$$

Ако за свако $s \in [-l\delta, k\gamma]$ важи

$$\begin{aligned} 3(k+l-1)s^2 + 2s\Big((k-l)(k+l-1) - k(k-1)\gamma \\ + l(l-1)\delta\Big) + kl - 2k^2(k-1)\gamma - 2l^2(l-1)\delta > \varepsilon, \end{aligned}$$

где је

$$\varepsilon = \frac{k+l}{n}\left((k+l-1)(2l-k-3s) - l(l-1)(1+2\delta) - \frac{(k+l)(l+k-1)}{n}\right),$$

онда важи

$$R(k+1,l+1) \leqslant n \leqslant f(k,l)\binom{k+l}{k}.$$

Доказ. Претпоставимо супротно, и посматрајмо бојење K_n такво да не постоји ни црвени K_{k+1} ни плави K_{l+1}. Нека црвени степен (број црвених грана које су повезане са тим чвором) чвора i буде d_i. Онда знамо да

$$d_i \leqslant R(k,l+1) - 1 \leqslant f(k-1,l)\binom{k+l-1}{k-1} \leqslant \frac{kn}{k+l}(1+\gamma).$$

Такође, на исти начин посматрајући плави степен добијамо

$$n - 1 - d_i \leqslant R(k+1,l) - 1,$$

односно

$$d_i \geqslant n - R(k+1,l) \geqslant n - \frac{nl}{k+l}\cdot\frac{f(k,l-1)}{f^*(k,l)} \geqslant \frac{kn}{k+l}\left(1 - \frac{l\delta}{k}\right).$$

Дефинишимо d и s као $\sum_{i=1}^{n} d_i = nd = \frac{kn^2}{k+l}(1+\frac{s}{k})$. Одавде добијамо да је s добро дефинисано односно спада у тражени интервал. Преко ових вредности и бројања монохроматских путева дужине два можемо да добијемо да је број монохроматских троуглова

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{d_i}{2} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1-d_i}{2} - \binom{n}{3}\right) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(n\binom{d}{2} + n\binom{n-1-d}{2} - \binom{n}{3}\right). \end{aligned}$$

Такође знамо да ниједна црвена грана не сме бити у $R(k-1,l+1)$ црвених троуглова и ниједна плава грана не сме бити у $R(k+1,l-1)$ плавих троуглова, па онда важи

$$\begin{aligned} T &\leqslant \frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i(R(k-1,l+1)-1) + \sum_{i=1}^{n}(n-d_i-1)(R(k+1,l-1)-1)\right) \\ &\leqslant \frac{n}{6}\left(\frac{dnk(k-1)f(k-2,l) + (n-1-d)nl(l-1)f(k,l-2)}{(k+l)(k+l-1)f^*(k,l)} - (n-1)\right) \\ &\leqslant \frac{n^2}{6(k{+}l)(k{+}l{-}1)}\Big(dk(k{-}1)(1{+}2\gamma) + (n{-}1{-}d)l(l{-}1)(1{+}2\delta)\Big) - \frac{n(n{-}1)}{6}. \end{aligned}$$

Када одузмемо ове две неједнакости које смо добили за T, помножимо их са $\frac{6(k+l-1)(k+l)^2}{n^3}$ и заменимо d са формулом преко s добијемо

$$3(k+l-1)s^2 + 2s\Big((k-l)(k+l-1) - k(k-1)\gamma + l(l-1)\delta\Big) \\ + kl - 2k^2(k-1)\gamma - 2l^2(l-1)\delta \leqslant \varepsilon.$$

што је контрадикција са почетним условима. □

Уз погодан избор функције f тако да су испуњени сви услови леме 3.4 можемо индуктивно да добијемо да оваква граница важи за све (k,l). Томасон је показао да постоји коефицијент A тако да следећа функција испуњава све услове и уједно даје најбољу познату оцену Ремзијевих бројева

$$R(k+1,l+1) \leqslant \exp\{-\frac{l}{2k}\log k + A\sqrt{\log k}\}\binom{k+l}{k}.$$

3.3 Израчунавање Ремзијевих бројева

Као што смо већ рекли, израчунавање самих вредности Ремзијевих бројева је веома тешко. Пољски математичар Рађишовски, који већ више деценија проучава Ремзијеву теорију и Ремзијеве бројеве, је сакупио следеће процене (два броја у пољу представљају доњу и горњу границу):

k \ l	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 42	47 50	53 59	60 68	67 77	74 87
4		18	25	36 41	49 61	59 84	73 115	92 149	102 191	128 238	138 291	147 349	158 417
5			43 48	58 87	80 143	101 216	133 316	149 442	183 633	203 848	233 1138	267 1461	275 1878
6				102 165	115 298	134 495	183 780	204 1171	262 1804	294 2566	347 3703	5033	401 6911
7					205 540	219 1031	252 1713	292 2826	405 4553	417 6954	511 10578	15263	22112
8						282 1870	329 3583	343 6090	457 10630	16944	817 27485	41525	873 63609
9							565 6588	581 12677	22325	38832	64864		
10								798 23556	45881	81123			1313

Слика 3.2. Табела познатих вредности Ремзијевог броја

Као што можемо видети, осим тривијалних $R(1,k) = 1$ и $R(2,k) = k$ израчунато је још само неколико бројева. Иако је опсег за на пример $R(5,5)$

доста мали, величине тог графа, број грана и број комбинација које би морале да се провере су веома велике, због чега је и тешко наћи тај број. Изјава мађарског математичара Пола Ердоша нам доста приближава саму тежину израчунавања Ремзијевих бројева. Он је рекао: „Кад би ванземаљци дошли на Земљу и рекли да имамо годину дана да нађемо вредност $R(5,5)$ или ћемо бити уништени као раса, уз све врхунске математичаре и информатичаре на свету мислим да људска раса има добре шансе. Ипак, кад би нам тражили да нађемо $R(6,6)$, више среће би имали у тражењу оружја за борбу против њих.”.

На почетку рада смо показали да је $R(3,3) = 6$. Сада ћемо израчунати још пар вредности Ремзијевих бројева.

Пример 3.2. Важи $R(3,4) = 9$.

Доказ. Можемо доказати лако да је $R(3,4) > 8$. Индексирајмо чворове од 1 до 8 и обојимо у плаво све гране ij где важи $|i-j| = 2$ или $|i-j| = 3$, а остале у црвено. За комплетан доказ нам недостаје $R(3,4) \leqslant 9$ што можемо да добијемо на коришћењем следеће тврдње: ако су и $R(k-1,l)$ и $R(k,l-1)$ парни онда $R(k,l) \leqslant R(k-1,l) + R(k,l-1) - 1$.

Нека је $R(k-1,l) = p$, $R(k,l-1) = q$. Посматрајмо K_{p+q-1}. Знамо да ако је d_i плави степен сваког чвора онда је сума свих њих парна, а како је $p+q-1$ непарно, значи да постоји x где је d_x парно. $\deg x = d_x + (p+q-1-1-d_x) = p-2+q$ одакле знамо да је или $d_x \geqslant p-1$ или $p+q-2-d_x \geqslant q$, а како је $p-1$ непарно, можемо поправити аргумент на $d_x \geqslant p$, па онда на исти начин као и у теореми 3.1 завршавамо доказ. □

Пример 3.3. Важи $R(4,4) = 18$.

Доказ. Знамо да је $R(4,4) \leqslant 2R(3,4) = 18$ што значи да нам је довољно да докажемо да је $R(4,4) > 17$. Претпоставимо да је $R(4,4) = 17$. Означимо чворове бројевима од 0 до 16 и обојимо у плаво грану v_1v_2 ако је $|v_1 - v_2|$ квадратни остатак по модулу 17, а у супротном у црвено. Знамо да имамо 4 чвора где су сва 4 повезана истом бојом. То значи да имамо бројеве a, b, c, $a-b$, $b-c$, $c-a$ који су сви или квадратни остаци или квадратни неостаци. Један од a, b, c је сигурно различит од нула, без умањења општости рецимо да је то a. Помножимо све њих са a^{-1} по модулу 17, и видимо да нам се сад траже (x,y) тако да су $1, x, y, 1-x, 1-y, x-y$ квадратни остаци, али лако можемо да проверимо да је то немогуће за све изборе (x,y). □

Пример 3.4. $R(3,5) = 14$.

Доказ. $R(3,5) \leqslant R(3,4) + R(2,5) = 9 + 5 = 14$.
Остаје нам још да покажемо да је $R(3,5) > 13$. Претпоставимо да $R(3,5) = 13$. Индексирајмо редом чворове од K_{13} и обојимо плаво гране ab ако је $a-b$ кубни

остатак по модулу 13, односно ако $a - b$ даје неки од остатака $\{1, 5, 8, 12\}$ по модулу 13.

Лако је видети да не постоји плави троугао, остаје још видети постоји ли црвени K_5. Можемо лако видети да не постоји јер уз проверу случајева добијамо да ће увек бити изабрани неки (a, b) где $a - b \in \{1, 5, 8, 12\}$. $\square$

4

Ремзијева теорија

Ремзијеви бројеви су започели Ремзијеву теорију, али су они само мали део ње. Ремзијева теорија се бави проучавањем наизглед хаотичних структура и налази правилности у њима, најчешће интерпретирано у смислу бојења.

4.1 Шурова теорема и последице

Шурова теорема је последица Ремзијеве теореме (теореме 3.2) иако на изглед немају претеране сличности.

Теорема 4.1. *[Шур]* За сваки природан број n, постоји природан број $S(n)$ тако да ако је скуп $[S(n)]$ обојен у n боја, тада постоје $x, y, z \in [S(n)]$ тако да важи $x + y = z$ и сва три броја су исте боје.

Доказ. Доказаћемо да $t = R(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, где је $m_i = 3$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$, испуњава услов. Обојимо скуп $[t]$ у n боја и посматрајмо граф K_t. Означимо чворове природним бројевима од 1 до t и обојимо гране на следећи начин: грана $\{x, y\}$ је исте боје као и $|x-y|$ у оригиналном бојењу скупа $[t]$ (приметимо да је ово t–бојење графа K_t). По дефиницији постоји монохроматски троугао са теменима $a - b$, $b - c$ и $a - c$ за неке $a > b > c$ што значи да су бројеви $a - b$, $b - c$ и $c - a$ исте боје. Нека је $x = a - b$, $y = b - c$ и $z = a - c$, крај доказа. $\square$

Приметимо да x и y не морају бити различити бројеви

Слика 4.1. Пример бојења за $n = 2$ на скупу $[R(3, 3)]$

Последица 1. За фиксирано $m \in \mathbb{N}$ постоји q тако да за све просте $p \geqslant q$, једначина $x^m + y^m = z^m$ има решење у $\mathbb{Z}_p^*$.

Доказ. Доказаћемо да $q = S(m) + 1$ испуњава услов. Нек g буде генератор, односно примитивни корен по модулу p. За свако $x \in \mathbb{Z}_p^*$ важи $x = g^t$ где $t \in \mathbb{N}$. Представићемо t као $t = mj + i$ где је $i < m$, односно $x = g^{mj+i}$. Сад бојимо елементе $\mathbb{Z}_p^*$ са m боја где је $x = g^{mj+i}$ обојен у i–ту боју. По Шуровој теореми постоје истобојни a, b и c тако да је $a + b = c$. Односно

$$g^{mj_a+i} + g^{mj_b+i} = g^{mj_c+i}$$

што ако помножимо обе стране са g^{-i} се своди на

$$(g^{j_a})^m + (g^{j_b})^m = (g^{j_c})^m$$

што је крај доказа. $\square$

4.2 Хејлс–Џувет теорема и последице

Једно од најбитнијих тврђења у Ремзијевој теорији је Хејлс–Џувет теорема. Помоћу ње се решавају многи проблеми у теорији игара, и доказују остале битне теореме у самој Ремзијевој теорији. Многи сматрају да без ове теореме, сама Ремзијева теорија не би заживела нити имала толико примена као што има сад.

Дефиниција 4.1. t-словни алфабет је скуп од t елемената, подразумевано $[t]$ ако се не назначи другачије.

Дефиниција 4.2. n-словна реч је низ n слова из алфабета. На пример 41321 је 5-словна реч из $\{1, 2, 3, 4\}$ алфабета.

Дефиниција 4.3. Скуп свих n-словних речи из t-словног алфабета се означава као $([t])^n$.

Дефиниција 4.4. Корен τ алфабета A је реч из $A \cup \{*\}$ који садржи макар једну $*$. На пример $\tau = 41 * 2 * 3$ је корен алфабета $\{1, 2, 3, 4\}$. $\tau(a)$ је реч која настаје заменом свих $*$ са словом a.

Дефиниција 4.5. За дат корен τ, скуп речи $\{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(t)\}$ се зове комбинаторна линија генерисана од стране τ.

Можемо приметити да је свака линија дефинисана са почетном тачком и *активним* скупом координата I у $[t]$ које се константно померају за 1 у сваком кораку (налазе се у опсегу од 1 до t). Такав начин разматрања комбинаторне линије доста олакшава доказ следеће теореме.

Теорема 4.2. *[Хејлс–Џувет]* За дати t-словни алфабет и r боја, постоји природан број $HJ(r,t)$ тако да за сваки природан број $N \geqslant HJ(r,t)$ и било које r-бојење свих речи дужине N, постоји монохроматска комбинаторна линија генерисана од τ.

Доказ. За сваку линију L означимо са L^- почетак $(\tau(0))$ и са L^+ крај $(\tau(t-1))$. Линију L_i зовемо *центрираном* у f ако $L_i^+ = f$, а *обојеном* у f ако је монохроматска занемарујући $L_i^+ = f$.

Циљ нам је да покажемо да ако је вредност $HJ(m,t-1)$ коначна за свако m, да је онда и вредност $HJ(r,t)$ коначна.

Да би ово успели показаћемо постојање природног броја $FHJ(r,s,t)$ за $\forall s \leqslant r$ тако да постоји или

- комбинаторна линија или
- s обојених линија.

Постојање $FHJ(r,r,t)$ би очигледно значило и постојање самог $HJ(r,t)$.

Постојање $FHJ(r,s,t)$ ћемо доказати индуктивно. Лако се може видети да је $FHJ(r,1,t) = HJ(r,t-1)$ што нам је случај $s=1$.
Претпоставимо да је вредност $FHJ(r,s-1,t) = n$ коначна. Доказаћемо да је

$$FHJ(r,s,t) \leqslant FHJ(r,s-1,t) + HJ(r^{t^n}, t-1) = n + n' = N.$$

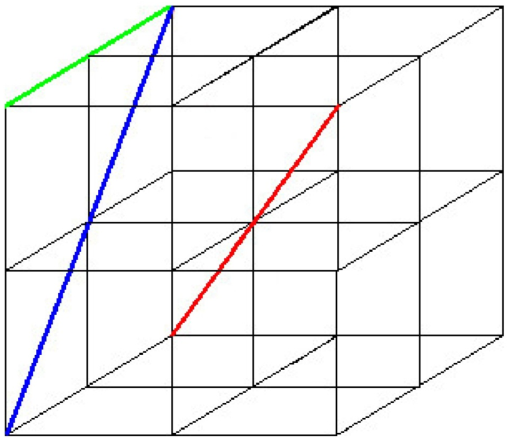
Посматрајмо r- бојење f на скупу $[t]^N$. Прво ћемо да га посматрамо као r^{t^n}-бојење f' на $[t]^{n'}$ тако што сваки елемент $b \in [t]^{n'}$ поистовећујемо са целом f-обојеном коцком $\{(a,b) \mid a \in [t]^n\}$. По дефиницији броја n' постоји линија L у $[t]^{n'}$ са скупом активних координата I тако да је L обојена у L^+ у бојењу f'. То значи да за бојење f, свако $a \in [t]^n$ и свако $b, b' \in L \backslash \{L^+\}$ и неко бојење f'' скупа $[t]^n$ важи

$$f((a,b)) = f((a,b')) = f''(a).$$

По индуктивној хипотези постоји $s-1$ обојених линија $L_1, \ldots, L_{s-1}$ у $[t]^n$, са активним скупом координата $I_1, \ldots, I_{s-1}$ у некој тачки l.

Сад завршавамо тако што за сваку линију L_i дефинишемо L_i' у $[t]^N$ са првом тачком у (L_i^-, L^-) и активним скупом координата $I \cup I_i$, а линија L_s' да буде линија у $[t]^N$ са првом тачком (l, L^-) и активним скупом координата I. Следи да ако не постоји целокупна монохроматска линија, постоји s обојених линија у (l, L^+) што је крај доказа. $\square$

Ова теорема се сматра главном и највећом у целој Ремзијевој теорији. Као што је случај и са самим Ремзијевим бројевима, сами бројеви $HJ(r,t)$ не могу лако да се одреде и поред $HJ(1,k)=1$ познати су једино још $HJ(2,2)=2$ и $HJ(2,3)=4$.



Слика 4.2. Црвена линија је комбинаторна линија која одговара корену ***. Зелена линија је комбинаторна линија која одговара корену 02*. Плава линија пролази кроз тачке $(0,2,0),(0,1,1)$ и $(0,0,2)$ што није комбинаторна линија.

Теорема 4.3. *[Ван дер Варден]* За све $r,t\in\mathbb{N}$ постоји природан број $W(r,t)=n$ тако да за свако $m\geqslant n$ и r-бојење скупа $[m]$ постоји макар једна монохроматска аритметичка прогресија дужине t.

Доказ. Узмимо $M=nt+1$ где је $n=HJ(r,t)$. Доказаћемо да за M важе услови задатка. Дефинишимо функцију $f:[t]^n\mapsto[M]$ као

$$f(x)=f((x_1,\ldots,x_n))=\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Дефинишимо r-бојење ϕ на $[t]^n$. Добијамо онда и бојење $\overline{\phi}$ скупа $[M]$ за које важи $\phi(x)=\overline{\phi}(f(x))$.

Посматрајмо било коју монохроматску комбинаторну линију дужине t

$$L_\tau=\{\tau(1),\ldots,\tau(t)\}$$

која постоји по теореми 4.2. Разлика $f(\tau(i+1)) - f(\tau(i))$ је тачно колико се $*$ налази у корену τ, одакле следи да је овај број константан односно

$$f(\tau(2)) - f(\tau(1)) = f(\tau(3)) - f(\tau(2)) = \cdots = f(\tau(t)) - f(\tau(t-1)).$$

Што значи да се L_τ слика у аритметичку прогресију дужине t односно $\{f(\tau(i))|1 \leqslant i \leqslant t\}$ је пермутација аритметичке прогресије. Како знамо да је $\phi(x) = \overline{\phi}(f(x))$ можемо да добијемо $const = \phi(\tau(i)) = \overline{\phi}(f(\tau(i))$ што је крај доказа. □

Како граница за саме HJ неконтролисано брзо расте, можемо видети да је то случај и за Ван дер Варденове бројеве. Такође, исте проблеме израчунавања имамо као и са Ремзијевим бројевима, али као и за HJ бројеве њихово само постојање нам је много битно.

Теорема 4.4. Ако је $\mathbb{N}$ партиционисан у r скупова без пресека $C_1, , \ldots, C_r$ онда макар један садржи произвољно дугачку аритметичку прогресију.

Доказ. Због теореме 4.3 за свако t постоји $M_t = nt + 1$ где је $n = HJ(r,t)$ тако да постоји скуп C_j који садржи аритметичку прогресију дужине t. Како је вредност броја r коначна, знамо да за макар један скуп C_j важи да постоји бесконачно много t за које C_j садржи аритметичку прогресију дужине t (у супротном би добили контрадикцију са чињеницом да је $\mathbb{N}$ бесконачан). Одатле следи да сигурно постоји скуп C_j у ком имамо аритметичку прогресију произвољне дужине. □

4.3 Игре везане за Ремзијеву теорију

4.3.1 Генерализација Икс-Окса - (m, n, k)-игра

Икс–Окс је игра коју играју 2 играча, сваки са својим симболом (традиционално X и O) који играју наизменично постављајући по један симбол на 3×3 таблу. Први који успе да створи 3-комплетну линију свог симбола (вертикалну, хоризонталну или дијагоналну) је победио. Стандардни Икс–Окс може да се генеразилује као игра где је циљ да играч створи k-комплетну линију на $m \times n$ табели (познато као (m, n, k)-игра). Можемо чак генерализовати ову игру корак даље, као $(m_1, \ldots, m_n, k)$-игра: тражи се k-комплетна линија на n-димензијалној табли. Генерализација Икс–Окса (од сад па надаље скраћено гИО) којом ћемо се на даље бавити у овом раду је $(t, t, \ldots, t, k)$-игра.

Дефиниција 4.6. „Таблу” на којој два играча играју гИО означавамо са $[t]^n$ (на пример, класичан Икс–Окс се игра на $[3]^2$).

Дефиниција 4.7. Комбинацију симбола на табли зовемо *позиција*.

Дефиниција 4.8. Позиција која садржи монохроматску линију је *победничка позиција*, тад кажемо да је играч победио.

Дефиниција 4.9. Позиција која није победничка, а сва поља су попуњена је *пат позиција*, тад кажемо да је нерешено.

Приметимо да нису све позиције на табели могуће због правила игре.

Дефиниција 4.10. Позиција коју је могуће постићи под правилима игре је *легална позиција.*

Приметимо да је гИО игра где су све информације познате и једном и другом играчу (садашња и претходне позиције, услови за победу...).Такође, како је табла коначна приметимо да је и игра коначна (завршава се у највише $[t]^n$ потеза).

Теорема 4.5. У гИО играма ако постоји победничка стратегија, има је први играч.

Доказ. Ради контрадикције претпоставимо да други играч има победничку стратегију S. Први играч ће ову стратегију претворити у стратегију за њега, тако што ће одиграти насумичан први потез и од сад узети стратегију S и пратити њу. Ако S тражи да у неком тренутку играч одигра на поље које је насумично одабрао у првом кораку, само ће одиграти неки други насумични потез и наставити даље са стратегијом S, јер један више његов знак на табли њему никако не шкоди. Како смо добили да ако постоји победничка стратегија за другог играча, да онда постоји и за првог, завршавамо са контрадикцијом. □

Можемо приметити да је заправо циљ игре гИО направити монохроматску линију на $[t]^n$ дужине $k \leqslant t$. Коришћењем Хејлс–Цувет теореме можемо да видимо да ли постоји победничка стратегија за првог, односно да видимо кад је немогуће бити нерешено. Кад год је $n \geqslant HJ(2,t)$ знамо да је немогуће бити нерешено, јер због дефиниције самог броја $HJ(2,t)$ знамо да како год они попунили ту таблу, постоји монохроматска линија дужине k.

4.3.2 Скривена Ремзијева теорија у играма

Игра гИО може бити трансформисана у наизглед веома другачије игре које на први поглед немају ништа слично са њима, док су заправо изоморфне.

Пример 4.1. Два играча наизменично бирају бројеве из скупа [9] без понављања. Први играч који одабере 3 броја тако да им је збир 15 је победник. Посматрајмо магични квадрат димензије 3×3.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Можемо да видимо да је играч победио, ако је направио 3-комплетну линију на табли $[3]^2$, односно можемо читаву игру да поистоветимо са класичним Икс–Оксом.

Како магичне квадрате можемо да уопштимо у n димензија, можемо да генерализујемо читаву игру:
Игра где два играча наизменично бирају бројеве из скупа $[t^n]$ и где први играч који одабере t бројева, тако да им је збир $M_n = \frac{t(t^n+1)}{2}$ је победио је заправо $(m_1, \ldots, m_n, t)$-игра, где је $m_i = t$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$.

Пример 4.2. Два играча играју игру на графу K_6. Сваки играч има своју одабрану боју, и њом боји по једну грану у свом потезу. Први играч који направи истобојни троугао своје боје је победник. (Познато као игра *Сим*).

Из истих аргумената као у теореми 4.5. (класични аргумент крађе стратегије) можемо да видимо да ако постоји победничка стратегија, има је први играч . Такође знамо да је нерешена позиција немогућа јер је $R(3,3) = 6$ тако да како год обојили K_6 постоји монохроматски троугао. Игра такође може да се генерализује тако што се игра на K_t где је $t \geqslant R(k,k)$ где поново важе сви аргументи да постоји победничка стратегија за првог играча.

Литература

[1] A. Thomason, *An Upper Bound for Some Ramsey Numbers*, Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom (1988)

[2] Mathew Steed *Some theorems and applications of Ramsey theory*, University of Chicago, Chicago, USA

[3] Stanislaw P. Radziszowski *Small Ramsey Numbers* Department of Computer Science, Rochester Institute of Technology, Rochester, NY (2021)

[4] A. W. Hales, R. I. Jewet *Regularity and positional games*, (1963)