Математичка гимназија

Матурски рад
из математике

Геометријске последице теорема о непрекидним функцијама

Ученик
Симонида Зејак, IVe

Ментор
др Соња Чукић

Београд, јун 2024. године

Садржај

1

Увод

„Дуго је била моја аксиома, да су мале ствари оне најважније”, речи су једног од највећих детектива и књижевних ликова уопште, познатог, засигурно свима по својој генијалности дедуктивног закључивања и уникатном начину схватања света. Уистину, читајући приче Шерлока Холмса и његовог верног помоћника доктора Вотсона, нико није могао остати равнодушан према њиховој наизглед нерешивој потрази за истином, која се увек сводила на пажљиво коришћење ситних и скоро неповезаних чињеница и опажања. Наиме, у математици оваквих доказа је јако много и често су баш такви, они који нас највише одушевљавају. Ми ћемо се, у овом раду, управо њима и бавити.

Непрекидне функције, познат су појам у математици, још од давнина, мада је строга дефиниција дата тек у 19. веку. Много пре тога, разни филозофи и математичари, бавили су се бројним геометријским проблемима, међу којим је наравно и квадратура круга. Научници тог времена, претпостављали су да за сваки круг мора постојати квадрат једнаке површине. Први ригорозни доказ теореме која решава то питање издат је у листу 1817. године од стране *Бернарда Болцана*[1]. Ова теорема као и још пар њих граде темељ многих нових лема, теорема и последица, па стога и бива једна од фундаменталних карика у овом раду.

У следећем запису, покрићемо једне од многих геометријских последица концепта непрекидности као што су описивање квадрата око произвољне фигуре, проблем дељења фигуре на три дела мањег дијаметра или, пак, на четири дела једнаких површина уз помоћ две међусобно нормалне праве. Употребом непрекидних функција и њихових својстава доказаћемо познату „сендвич” теорему у две димензије и дати врло кратка и јасна поткрепљења за разна упрошћења познатих тврђења из области топологије.

[1] *Bernard Bolzano* (1781-1848), италијански математичар

2

Теореме о непрекидним функцијама

Као што је речено, и најсјајније последице морају имати свој узрок из кога црпе поткрепљење, своју истинитост и заправо смисао, те ћемо њих на почетку и навести. Прво, саму дефиницију непрекидне функције, па затим и све теореме које ће нам бити потребне за даље доказивање различитих геометријских тврђења.

Дефиниција 2.1. Нека је $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Тачка x_0 је тачка нагомилавања домена D ако важи да за свако $\varepsilon > 0$ важи $A = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap D \neq \varnothing$.

Ако је x_0 тачка нагомилавања домена $D \subseteq \mathbb{R}$, онда приметимо да назначени скуп A у претходној дефиницији, не само да није празан, већ има бесконачно много елемената.

Дефиниција 2.2. Функција $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ је непрекидна у тачки x_0 ако x_0 није тачка нагомилавања њеног домена или ако x_0 јесте тачка нагомилавања њеног домена и важи:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Јасно је да из ове једнакости важи:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \quad \text{тј.} \quad \lim_{\Delta x \to 0} (f(x + \Delta x) - f(x)) = 0.$$

Више се пута може наићи и на следећу проверу непрекидности функције у тачки нагомилавања свог домена. Ако је x_0 тачка нагомилавања домена функције f, она је непрекидна у тачки x_0 ако важи:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

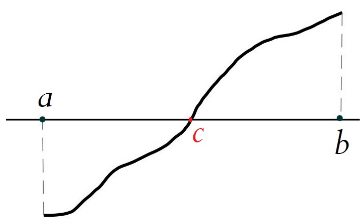
тј. када су и леви и десни лимес у тачки x_0 једнаки и износе $f(x_0)$.

Јасно је да је функција f непрекидна на неком интервалу ако је непрекидна у свакој тачки тог интервала. Коначно, функција је непрекидна ако је непрекидна у свакој тачки свог домена.

Графички посматрано, функција је непрекидна на неком подинтервалу свог домена ако цртајући њен график ниједном не дигнемо оловку са папира. Наравно, ово је само здраворазумско објашњење које није употребиво при доказивању теорема и њихових последица.

Теорема 2.1. (*Коши*[1]*-Болцано*) Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ дефинисана и непрекидна на $[a, b]$. Ако важи $f(a) \cdot f(b) \leqslant 0$ онда постоји $c \in [a, b]$ тако да је $f(c) = 0$.

Ово је интуитивно сасвим логично. Наиме, ако су тачке $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ са различитих страна x-осе онда је јасно да ће непрекидна функција f морати бар једанпут прећи преко x-осе, како би од једне тачке „дошла” до друге тј. имаће бар једну нулу на том интервалу (видети слику 2.1).



Слика 2.1

Замислимо да постоји једна огромна пустиња и негде у њој лав кога требамо пронаћи. При руци имамо само мапу пустиње и детектор који нам тачно одговара са „да” или „не” када га питамо било шта. Како пронаћи лава? Доказ наше теореме се, у суштини, базира управо на овом познатом проблему. Ево шта се испоставља као најефикаснија тактика: поделимо мапу на два дела и питамо детектор да ли се лав налази у првој/другој половини пустиње. Затим, узмемо половину у којој се налази лав, њу делимо на два дела и постављамо исто питање. Исто понављамо за наредну половину и тако редом. Јасно је да ћемо у неком тренутку, оваквим поступком, пронаћи нашег лава.

Доказ. Ако је $f(a) = 0$ или $f(b) = 0$, доказ је завршен. Ако, пак, то не важи, без умањења општости, претпоставимо да је $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Нека је $x_0 = (a + b)/2$. Имамо три могућа случаја:

$f(x_0) < 0$: нека је $a_1 = x_0$, $b_1 = b$;

$f(x_0) > 0$: нека је $a_1 = a$, $b_1 = x_0$;

$f(x_0) = 0$: доказ је завршен.

Даље, нека је $x_1 = (a_1 + b_1)/2$. Спроведемо ли исти поступак са x_1 добићемо нове a_2 и b_2. Сваки следећи корак изгледаће исто овако:

[1] *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857), француски математичар

$f(x_k) < 0$: нека је $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$;
$f(x_k) > 0$: нека је $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$;
$f(x_k) = 0$: доказ је завршен,

где $k + 1$ представља редни број спроведеног корака. Доказ смо завршили у коначно много корака ако је у неком кораку важио трећи случај. Претпоставимо да се то није десило, тј. да нисмо успели да нађемо тражену нулу у коначно много корака. Знамо да важи:

$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2]... \supseteq [a_k, b_k] \supseteq ...$$

По Канторовом принципу уметнутих одсечака, постоји пресек свих ових затворених интервала, тј.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \neq \varnothing.$$

Даље, када је у питању дужина интервала, она се смањује два пута са сваким новим кораком, па је: $|b_n - a_n| = \frac{1}{2^n}|b - a|$. Важи:

$$\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}|b - a| = 0.$$

Дакле, наш пресек је једночлани скуп са елементом c и важи:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$$

Како је функција f непрекидна, важи:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

Знамо да за свако n важи да је $f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$. То би значило да низ негативних бројева и низ позитивних бројева теже истој граничној вредности што је једино могуће ако је она једнака нули тј. $f(c) = 0$. ■

Теорема 2.2. (*Болцано-Вајерштрас*[2]) Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ дефинисана и непрекидна на $[a, b]$, тада:

$$(\exists \mu, M \in [a, b])(\forall x \in [a, b]) f(\mu) \leqslant f(x) \leqslant f(M).$$

Другим речима, тада функција f достиже и минимум и максимум на интервалу $[a, b]$.

[2] *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass* (1815-1897), немачки математичар

Рецимо, да шетамо неком планином, која има своје удолине и узбрдице. Нека је надморска висина функција нашег тренутног положаја. Интуитивно је јасно да је та функција непрекидна и да ће иста, на сваком нашем произвољном путу, достизати бар једном минимум и максимум. Међутим, доказ ове тврдње није тако тривијалан.

Доказ. Докажимо прво да је функција f ограничена.

Претпоставимо супротно, да није ограничена одозго (аналогно се доказује и други случај). То би значило да за свако $M > 0$ постоји $x \in [a, b]$ тако да је $f(x) > M$. Ово бисмо могли да преформулишемо у еквивалентан исказ да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $x_n \in [a, b]$ тако да је $f(x_n) > n$. Низ (x_n) је ограничен, па по Болцано–Вајерштрасовој теореми о низовима, он има конвергентан подниз. Други речима, постоји низ бројева (x_{n_k}) за који важи:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$$

и важи $c \in [a, b]$ (што не би био случај са отвореним интервалом, јер он не садржи све своје тачке нагомилавања). Како је фукција f непрекидна, то важи $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c) \in \mathbb{R}$. По конструкцији низа $f(x_n)$, важи $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$, па је онда и $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = +\infty$, што није могуће јер смо већ доказали да је низ $f(x_{n_k})$ конвергентан. Из претходног закључујемо да је скуп вредности функције f (назваћемо га S) ограничен одозго. Према томе, он има супремум који ћемо означити са s. Питамо се да ли је $s \in S$ тј. да ли постоји $x \in [a, b]$ тако да је $f(x) = s$. За супремум s важе две ствари:

$$\begin{gathered}(\forall x \in [a, b])\ f(x) \leqslant s \\ (\forall n \in \mathbb{N})(\exists y_n \in [a, b])\ f(y_n) > s - \frac{1}{n}\end{gathered} \tag{2.1}$$

Поново, низ (y_n) је ограничен, па има конвергентан подниз. Важи:

$$\lim_{m\to\infty} y_{n_m} = d,\ d \in [a, b].$$

Из непрекидности следи: $\lim_{m\to\infty} f(y_{n_m}) = f(d)$. По (2.1) знамо да важи:

$$s - \frac{1}{n} < f(y_n) \leqslant s,$$

па по теореми о два полицајца и лопову, важи: $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = s$. Јасно је да је $\lim_{m\to\infty} f(y_{n_m}) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$, па мора да важи $f(d) = s$, одакле видимо да постоји максимум скупа S, што је и требало доказати. Доказ за минимум је врло сличан. ■

Последица 1. Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ дефинисана и непрекидна на $[a, b]$ и нека је θ произвољна вредност између $f(a)$ и $f(b)$. Тада постоји $t \in [a, b]$ тако да је $f(t) = \theta$.

Доказ. Без умањења општости претпоставимо да је $f(a) \leqslant f(b)$. Дефинишимо нову функцију $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \theta$ која је такође непрекидна. Како је $f(a) \leqslant \theta \leqslant f(b)$, тако је $g(a) = f(a) - \theta \leqslant 0$ и $g(b) = f(b) - \theta \geqslant 0$ тј. $g(a) \cdot g(b) \leqslant 0$. Дакле, по теореми 2.1 мора постојати $t \in [a, b]$ тако да је $g(t) = 0$ тј. $f(t) = \theta$. ■

Штавише, за свако θ, $\mu \leqslant \theta \leqslant M$ (за μ и M из теореме 2.2) постоји вредност $t \in [a, b]$ тако да је $f(t) = \theta$, што је доказиво на јако сличан начин.

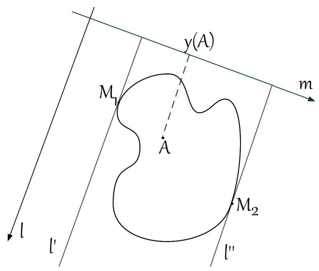
3

Геометријске последице

Након што смо навели и образложили све потребне теореме, можемо почети са доказивањем њихових геометријских последица. Пре свега, треба напоменути да се у овом поглављу нећемо бавити баш свим произвољним фигурама. У следећим последицама подразумеваћемо да су фигуре скупови без тачака самопресецања који садрже своју границу и имају површину. За прву последицу је потребно познавање једног новог појма.

Дефиниција 3.1. *Права ослонца фигуре F у правцу a* је њој паралелна права чији је пресек са F непразан, и која дели раван на две полуравни тако да се у једној од њих налази цела фигура F.

Лема 3.1. За сваку ограничену фигуру F и праву l постоје две права ослонца фигуре F у правцу l.

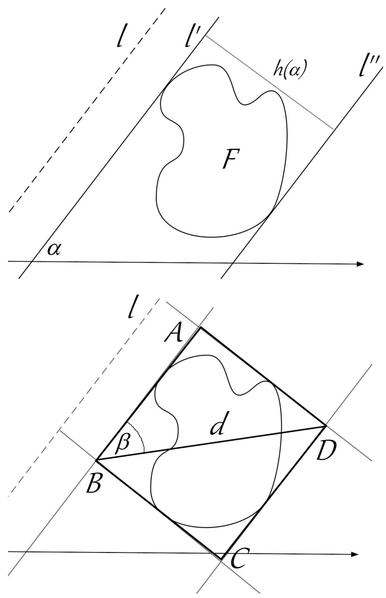


Слика 3.1

Доказ. Без умањења општости, рецимо да l не сече фигуру F. Уведимо њој нормалну праву m, тако да ни она не сече F (слика 3.1). Посматрајмо ове две праве као координатне осе и уведимо функцију $y : F \to \mathbb{R}$, тако да она представља ординату тачке $A \in F$, где је m посматрана оса. Уведимо функцију $r : F \to \mathbb{R}$ која мери растојање тачке фигуре F од тачке A. Јасно је да је $r(A')$, за било коју тачку $A' \in F$, веће или једнако од $|y(A) - y(A')|$, па по теореми о два полицајца и лопову важи $\lim\limits_{r(A')\to 0} |y(A) - y(A')| = 0$, што значи да је y непрекидна на затвореном скупу тачака фигуре F. По теореми 2.2 постоје тачке M_1 и M_2 тако да за свако $A \in F$ важи $y(M_1) \leqslant y(A) \leqslant y(M_2)$, па самим тим цела фигура F мора да се налази између правих l' и l'' паралелних правој l које садрже M_1, односно M_2. ■

Теорема 3.1. (*Урисон*[1]) Око сваке ограничене фигуре могуће је описати квадрат.

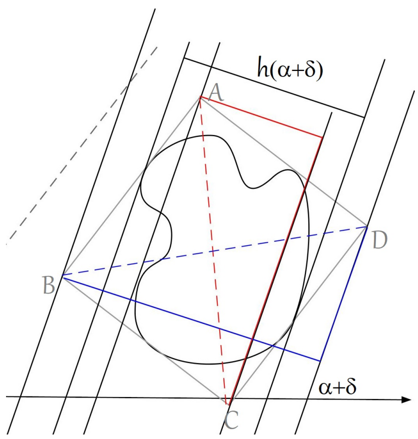
Доказ. Нека је фигура F ограничена и нека је l права која са x-осом гради угао α и ту фигуру не сече. По леми 3.1 постоје две праве l' и l'' ослонца фигуре F у правцу l. (слика 3.2, горња).



Слика 3.2

Посматрајмо сада функцију $h(\alpha)$ дефинисану као растојање између две праве ослонца фигуре F у правцу l која са позитивним делом x-осе гради угао α. Приметимо да је она дефинисана за свако $\alpha \in \mathbb{R}$, као и то да је периодична са периодом π, тј. $h(\alpha+\pi) = h(\alpha)$. Нас ће, уствари, занимати да докажемо непрекидност ове функције.

Нека је $ABCD$ правоугаоник, такав да су праве AB и CD праве ослонца фигуре F у правцу l и праве BC и AD праве ослонца фигуре F у правцу нормале на l (слика 3.2, доња). Узмимо да је $BD = d$ и $\sphericalangle ABD = \beta$. Видимо да је $h(\alpha) = d \sin \beta$.



Слика 3.3

Сада, увећајмо α за неки јако мали угао δ и конструишимо праве ослонца у новом задатом правцу праве b која заклапа угао $\alpha+\delta$ са x-осом. Затим, конструишимо два пара правих паралелних правој b од којих једна из првог пара садржи тачку A, а друга C, исто тако и за други пар правих, једна садржи тачку B, а друга D (слика 3.3). Уочимо да је растојање између првог пара правих једнако $d\sin(\beta-\delta)$, а између другог $d\sin(\beta+\delta)$. Са слике се види да важи:

$$d\sin(\beta-\delta) \leqslant h(\alpha+\delta) \leqslant \; d\sin(\beta+\delta).$$

Даље, проценимо разлику $h(\alpha+\delta) - h(\alpha)$:

$$d\sin(\beta-\delta) - d\sin(\beta) \leqslant h(\alpha+\delta) - h(\alpha) \leqslant d\sin(\beta+\delta) - d\sin(\beta).$$

[1] *Павел Самуилович Урысон* (1898-1924), руски математичар

Употребимо ли тригонометријске трансформације разлике у производ

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

добићемо следеће:

$$-2d\cos\left(\beta-\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \leqslant h(\alpha+\delta)-h(\alpha) \leqslant 2d\cos\left(\beta+\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Како за сваки угао x важи $|\cos x| \leqslant 1$, онда важи и:

$$\begin{aligned} -2d\cos\left(\beta-\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) &\geqslant -2d\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \\ 2d\cos\left(\beta+\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) &\leqslant 2d\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \\ \Longrightarrow -2d\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \leqslant h(\alpha+\delta)-h(\alpha) &\leqslant 2d\sin\left(\frac{\delta}{2}\right). \end{aligned}$$

Наравно, мораћемо узети и у обзир када је $\delta < 0$. Сличним поступком добијамо да важи $2d\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \leqslant h(\alpha+\delta)-h(\alpha) \leqslant -2d\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$. Коначно:

$$|h(\alpha+\delta)-h(\alpha)| \leqslant 2d\sin\left|\frac{\delta}{2}\right|,$$

па по теореми о два полицајца и лопову важи:

$$\lim_{\delta\to 0} h(\alpha+\delta)-h(\delta) = 0$$

одакле добијамо да је h непрекидна функција.

Посматрајмо, сада, функцију $f(\alpha) = h(\alpha+\frac{\pi}{2})-h(\alpha)$. Збир две непрекидне функције је непрекидна функција, те је f такође непрекидна. Приметимо да важи: $f(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -f(\alpha)$. То значи да су $f(\alpha+\frac{\pi}{2})$ и $f(\alpha)$ различитог знака, па по теореми 2.1 постоји $\theta \in [\alpha, \alpha+\frac{\pi}{2}]$ тако да је $f(\theta) = 0$ тј. $h(\theta) = h(\theta+\frac{\pi}{2})$. ■

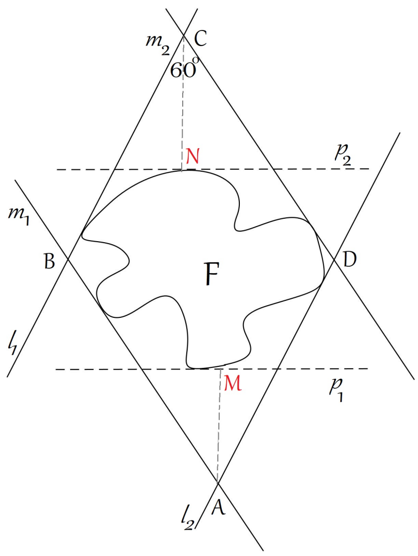
Након овакве теореме, многи би се запитали следеће: *Да ли се у сваку ограничену фигуру може уписати квадрат?* Проблем уписивања квадрата у сваку ограничену фигуру остаје и даље нерешен проблем у геометрији. Многи су га доказали на одређеној групи фигура, међу којима је и *Л. Г. Шнирелман*[2]. Он је међу првима добио позитивне резултате за конкретно конвексне фигуре, али генерално тврђење остаје под знаком питања и данас.

[2] *Лев Генхирович Шнирельман* (1905-1938), белоруски математичар

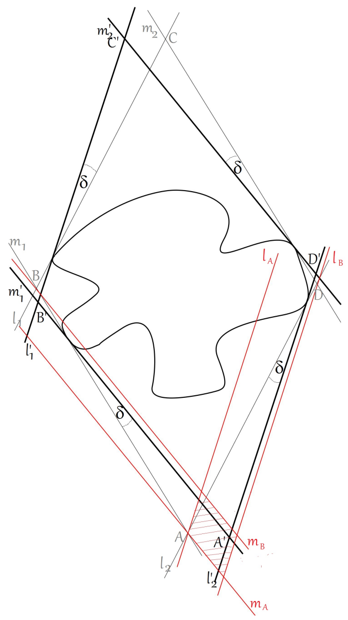
За следеће леме ће нам требати познавање једног појма који је интуитивно јасан, а то је дијаметар фигуре. То је растојање између две најудаљеније тачке на фигури. Кругу би то био пречник, троуглу најдужа страница, квадрату дијагонала... Надаље ћемо га обележавати са $\operatorname{diam} F$, и обично ћемо у доказима узимати да је његова вредност једнака d, $\operatorname{diam} F = d$.

Лема 3.2. Нека је F ограничена фигура дијаметра d. Постоји правилни шестоугао чије је растојање између паралелних страница једнако d и који садржи целу фигуру F.

Доказ. Нека су праве l_1 и l_2 паралелне праве ослонца у неком правцу дате фигуре F. Јасно је да растојање између њих неће никад премашити d, ма у којем правцу оне биле. Даље, доцртајмо још две паралелне праве ослонца m_1 и m_2, тако да са правама l_1 и l_2 заклапају угао од $60°$. Ове четири праве граде паралелограм $ABCD$ који садржи целокупну фигуру F (слика 3.4). Поново уведимо нове праве ослонца p_1 и p_2 које ће заклапати угао од $120°$ са правама l_1 и l_2. Нека су тачке M и N, редом, подножја нормала из тачака A и C на p_1 тј. p_2. Ми ћемо доказати да постоји одређени правац правих l_1 и l_2 (који смо на почетку узели произвољно) тако да је $AM = NC$. Без умањења општости, претпоставимо, да за наше AM и NC важи $AM \neq NC$ и да је $AM < NC$.



Слика 3.4



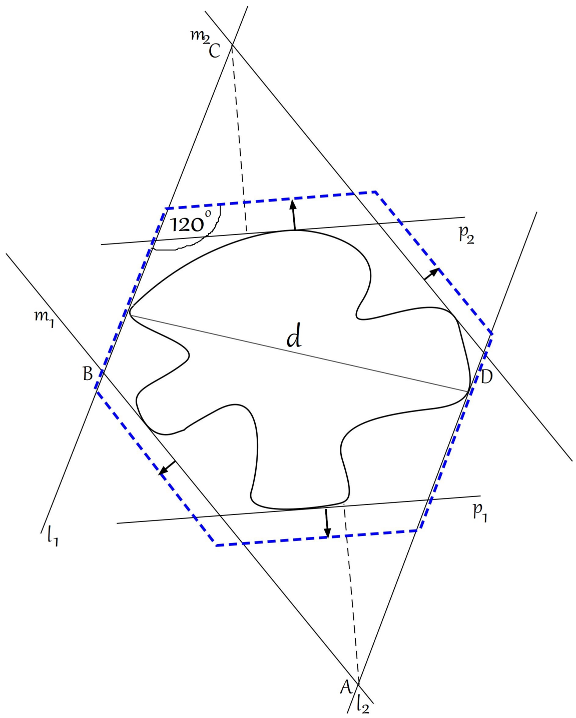
Слика 3.5

Уведимо функцију $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(\alpha) = AM - NC$, која зависи од почетног правца (угла који заклапа са x-осом) праве l_1. Показаћемо да је та функција непрекидна, тј. да разлика дужина AM и NC непрекидно зависи од правца праве l_1. Заправо, доказаћемо само непрекидну зависност положаја тачке A од тог правца, док је за тачке M, N, C доказ врло сличан.

Нека се наша права l_1 која, рецимо заклапа угао α са x-осом, заротира за неки мали угао δ.

Новодобијене одговарајуће праве означимо са $l'_1, l'_2, m'_1, m'_2, p'_1$ и p'_2 (слика 3.5). Сада, повуцимо праве m_A и m_B које, редом, садрже тачке A и B и паралелне су са m'_1. Видимо да права m_A сече F, а права m_B са истом нема додирних тачака, осим можда тачке B, што значи да m'_1 мора бити између њих. Слично, када доцртамо праве l_A и l_D које, редом, садрже тачке A и D и паралелне су са l'_2, видимо да права l'_2 мора бити између те две праве. Отуда, тачка A' у којој се секу m'_1 и l'_2, мора бити у паралелограму ког граде праве m_A, m_B, l_A и l_D. Што је мањи угао δ то су димензије тог паралелограма мање, па су и тачке A и A' све ближе. То употпуњује наш доказ. Када је то доказано и за сваку од тачака N, M и C, доказано је и да је функција f непрекидна.

Даље је, како смо претпоставили раније, $f(\alpha) < 0$. Када се наша права заротира за угао π, дужи AM и NC ће заменити места, што значи: $f(\alpha+\pi) = -f(\alpha) < 0$. По теореми 2.1, постоји $\theta \in [0, 2\pi]$ тако да је $f(\theta) = 0$, тј. $AM = NC$. Када уведемо нове праве l_1 и l_2 са тим правцем, а са њима и остале, шестоугао који оне граде биће симетричан у односу на свој центар (слика 3.6). Његови углови су $120°$ и растојање између наспрамних страна не премашује d. Ако је растојање између правих p_1 и p_2 мање од d, удаљавамо их за једнако растојање, све док растојање између њих не буде једнако d. То урадимо и за праве l_1 и l_2 и праве m_1 и m_2. Сада, наш шестоугао има све углове од по $120°$ и сва растојања између наспрамних страница једнака d, што га чини правилним. Он садржи целу фигуру F, па је доказ завршен. ■

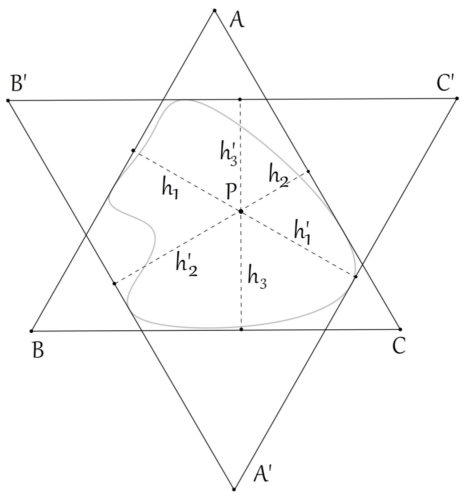


Слика 3.6

Теорема 3.2. (*Борсук*[3]) Било која ограничена фигура се може поделити на три дела са дијаметрима мањим од дијаметра почетне фигуре.

Доказ. Нека је фигура F произвољна ограничена фигура дијаметра d. По претходној леми, постоји правилни шестоугао $ABCDEF$ чија су растојања између наспрамних страна једнака d и који садржи целу фигуру F. Нека су

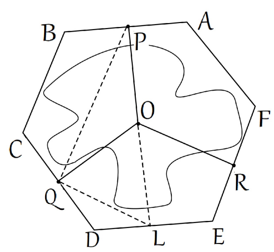
[3] *Karol Borsuk* (1905-1982), пољски математичар



Слика 3.8

P, Q и R, редом, средишта страница AB, CD и EF, и нека је O његов центар. Дијаметри добијених петоуглова (видети слику 3.7) су уствари дужине PQ, QR и RP. Нека је L средиште странице DE. Посматрајмо троугао $\triangle PQL$. Он је правоугли са правим углом $\sphericalangle PQL$. То значи да је $PL = d > PQ$, па су дијаметри ова три петоугла мањи од d. Дијаметар сваког од њих, је већи од дијаметра дела фигуре коју он обухвата, па је наша фигура подељена на три дела мањих дијаметара од њеног. ∎

Битно је поменути, да је немогуће сваку фигуру поделити на таква два дела и то је очигледно на примеру круга и једнакостраничног троугла. Наиме, Борсук доказује 1933. да се то може спровести када су три дела у питању. Те године, он поставља још једну занимљиву хипотезу: „Свака n-димензиона фигура се може поделити на $n+1$ део мањег дијаметра од полазне фигуре.”. Међутим та хипотеза врло брзо бива оповргнута, премда је 1955. енглески математичар *Г. Еглстон*[4] доказао тврђење за $n = 3$.



Слика 3.7

Лема 3.3. Свака конвексна фигура дијаметра $D = 1$ може се „покрити” једнакостраничним троуглом странице $a = \sqrt{3}$.

[4] *H. G. Eggleston* (1921–?), енглески математичар

Доказ. Нека је F ограничена фигура дијаметра $D = 1$. Нека је $\triangle ABC$ једнакостранични троугао чије су све странице праве ослонца фигуре F. Тај троугао постоји, што можемо брзо и доказати. Ако, пак, нацртамо произвољан једнакостранични троугао и праве ослонца фигуре F, паралелне његовим правама (по леми 3.1, оне постоје), добили бисмо наш троугао. Даље, нека је $\triangle A'B'C'$ још један троугао са страницама које су паралелне страницама троугла $\triangle ABC$ и које такође представљају праве ослонца на фигуру F (по леми 3.1, постоје две праве ослонца фигуре у правцу дате праве, па постоји и други овакав троугао, слика 3.8). За било коју тачку у унутрашњости једнакостраничног троугла знамо да је збир растојања те тачке од сваке странице једнак висини тог троугла. Уведимо једну такву произвољну тачку P која припада фигури F, па уједно и троугловима. Нека су $h_1, h_2, h_3, h'_1, h'_2, h'_3$ растојања од тачке P до страница $AB, AC, BC, A'C', A'B', B'C'$ троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$. Јасно је да важи $h_1 + h'_1 \leqslant 1$, $h_2 + h'_2 \leqslant 1$, $h_3 + h'_3 \leqslant 1$, јер су то растојања између паралелних правих ослонца, па:

$$h_1 + h'_1 + h_2 + h'_2 + h_3 + h'_3 \leqslant 3,$$

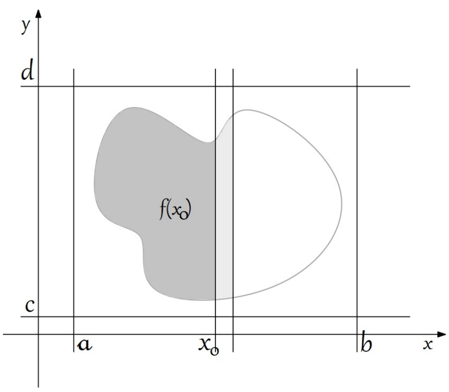
$$h + h' \leqslant 3 \implies \min\{h, h'\} \leqslant \frac{3}{2},$$

а како је код једнакостраничног троугла $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, закључујемо да је:

$$\min\{a, a'\} \leqslant \sqrt{3}.$$

■

Теорема 3.3. За сваку ограничену повезану фигуру F у xOy равни постоји права нормална на x-осу која дели F на две фигуре једнаких површина.

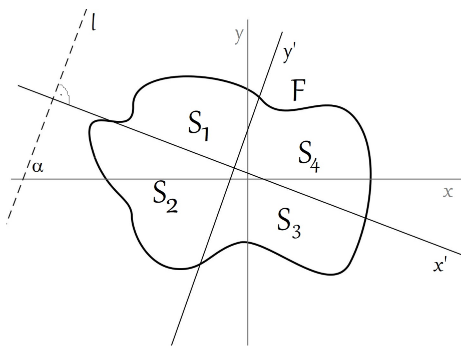


Слика 3.9

Доказ. Како је речено да је F ограничена, то значи да постоје вредности a, b, c и d тако да је фигура F садржана у правоугаонику којег чине праве $x = c, x = d, y = a, y = b$. Нека је $T_{x_0} = \{(x, y) \mid x < x_0\}$ полураван „лево” од праве $x = x_0$. Уведимо функцију $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ тако да је $f(x) = P(T_x \cap F)$, где је P функција површине. Функција f је непрекидна - за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta = \frac{\varepsilon}{d-c} > 0$ тако да за $|h| < \delta$ важи $|f(x_0 + h) - f(x_0)| < |h|(d - c)$ (слика 3.9). Знамо да је $f(a) = 0$, а $f(b) = P$. Како је $P/2$ између тих вредности, по последици 1, постоји $t \in [a, b]$ тако да је $f(t) = P/2$. ■

Наравно, ово може и да се мало преформулише. Другим речима, за сваку ограничену повезану фигуру F у равни и неку праву l постоји права нормална на l која дели дату фигуру на два дела једнаких површина. Онда, слично, за сваку праву постоји права њој паралелна, која дели дату фигуру на пола.

Теорема 3.4. Свака конвексна фигура у равни се може, са две нормалне праве, поделити на четири дела једнаких површина.



Слика 3.10

Доказ. Нека је F произвољна конвексна фигура у равни. Поделимо ту фигуру са две нормалне праве x и y (слика 3.10). Уведимо неку праву l која са правом y заклапа угао α. По теореми 3.3, постоји права x' нормална на l, таква да дели дату фигуру на два дела једнаких површина. Исто тако, постоји права y' нормална на x' која дели фигуру на пола. Сада, имамо две нормалне праве које деле дату фигуру на четири дела чије су површине: $S_1(\alpha), S_2(\alpha), S_3(\alpha), S_4(\alpha)$, где је α угао који права l, односно y', заклапа са првобитном правом y. Како је

$$S_1(\alpha) + S_2(\alpha) = S_3(\alpha) + S_4(\alpha)$$
$$S_1(\alpha) + S_4(\alpha) = S_3(\alpha) + S_2(\alpha),$$

то одузимањем те две једначине добијамо да је $S_1(\alpha) = S_3(\alpha)$ и $S_2(\alpha) = S_4(\alpha)$. Ово, пак, није довољно да тврдимо једнакост површина сва четири дела. Треба доказати да постоји неко α за које је $S_1(\alpha) = S_2(\alpha)$. Уведимо, онда, функцију $f(\alpha) = S_1(\alpha) - S_2(\alpha)$. Врло слично као у досадашњем излагању доказујемо да је f непрекидна функција. Даље, приметимо да важи:

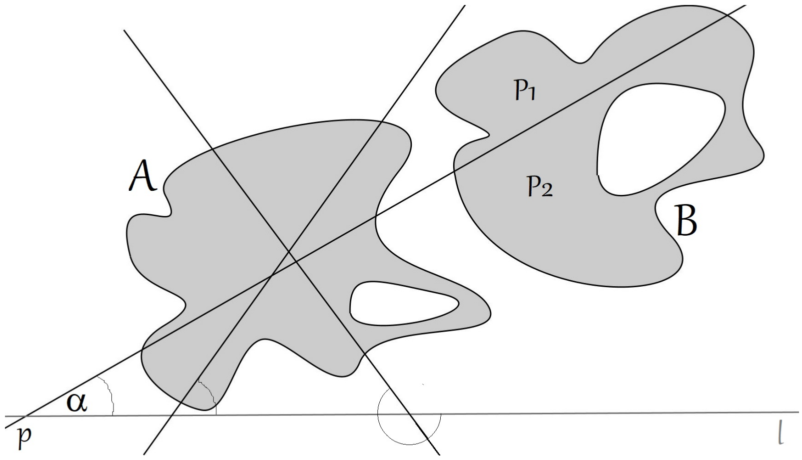
$$S_1\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = S_4(\alpha) = S_2(\alpha)$$
$$S_2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = S_3(\alpha) = S_1(\alpha),$$

што, уствари, значи да је $f(x + \frac{\pi}{2}) = -f(x)$. Како је функција f непрекидна на интервалу $[0, \frac{\pi}{2}]$ то по теореми 2.1 следи да постоји неки угао $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ за који важи $f(\alpha) = 0$ тј. $S_1(\alpha) = S_2(\alpha)$. ∎

Оно што је невероватно је да ова теорема важи и у свим већим димензијама. Свако тело се може пресећи са три међусобно нормалне равни на

8 делова једнаке запремине, те свако N-димезионо „тело" може бити подељено на 2^N делова једнаке „запремине" са N међусобно нормалних N-димензионих „равни".

Теорема 3.5. (*Сендвич теорема*) Нека су A и B две фигуре у равни. Тада постоји права која сече те две фигуре истовремено на два дела једнаких површина.

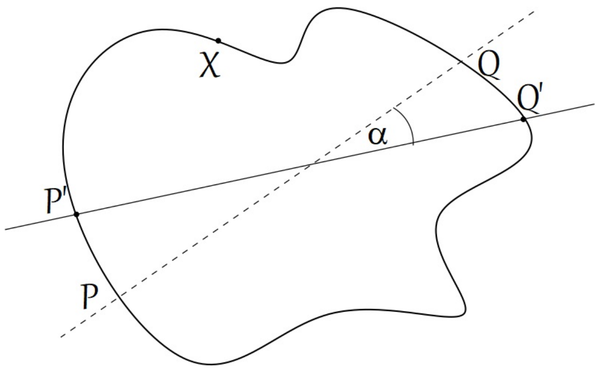


Слика 3.11

Доказ. Фиксирајмо неку праву l у равни. По теореми 3.3 постоји права p која са l заклапа неки угао α и која дели фигуру A на два једнака дела. Права p ће такође делити површину друге фигуре B на неки начин. Означимо површину фигуре B са једне стране праве p као $P_1(\alpha)$, а са друге $P_2(\alpha)$ (слика 3.11). Наиме, ако права p нема пресечних тачака са B или је права ослонца фигуре B, једна од ових површина биће 0, док ће друга имати вредност целокупне површине фигуре B. Сада уведимо функцију: $f(\alpha) = P_1(\alpha) - P_2(\alpha)$ где је $\alpha \in [0, 2\pi]$. Ако α увећамо за π тада се права само „вратила" у свој првобитни положај, с тим да су сада површине замењене. То значи да важи $f(x+\pi) = -f(x)$, тј. $f(x+\pi) \cdot f(x) < 0$. Како је фунција f непрекидна на $[0, \pi]$, по теореми 2.1 постоји $\alpha \in [0, \pi]$ за које важи $f(\alpha) = 0$ тј. $P_1(\alpha) = P_2(\alpha)$. ■

Доказали смо у равни, познату теорему која је такође генерализована на све димензије. У трећој димензији позната је под именом *Сендвич теорема* јер су шунка и два парчета хлеба три тела које једна раван може пресећи истовремено на два дела једнаких површина без обзира где се они налазили и како образовали сендвич. У N-тој димензији N „тела" се може симултано преполовити са N-димензионом „равни".

Теорема 3.6. За сваку повезану фигуру у равни постоји права која дели њену површину и границу на два једнака дела.



Слика 3.12

Доказ. Нека је F произвољна повезана фигура у равни и нека је P тачка на њеној граници. Посматрајмо функцију $g(X)$ која представља дужину исечка границе фигуре одређеног тачкама P и X, где је X такође нека тачка на граници. Функција g је непрекидна на свом домену. Како постоји тачка T на граници за коју је $g(T) > O/2$, где је O обим дате фигуре, то по последици 1 знамо да онда постоји тачка Q на граници фигуре F „између" P и T за коју је $g(Q) = O/2$.

Повуцимо и фиксирајмо једну праву кроз произвољну тачку P и њену одговарајућу тачку Q тако да деле границу на два једнака дела. Доказивањем да таква права за неку тачку P дели и површину на два једнака дела, доказ би био завршен. Ако узмемо тачку P и „шетамо" са њом по граници, наравно пазећи да померамо и тачку Q тако да се подела границе на пола очува, добићемо разне праве које деле површину на различите начине. Слично као и у претходним доказима, уведимо функцију $f(\alpha)$ која ће одређивати разлику површина делова добијених дељењем фигуре F правом p која заклапа угао α са првобитном правом PQ. Та функција је непрекидна на интервалу $[0, \pi]$ и за њу важи $f(\alpha + \pi) = -f(\alpha)$, што значи (по теореми 2.1) да постоји $\alpha \in [0, \pi]$ за које је $f(\alpha) = 0$ тј. постоји права p која дели дату фигуру на два дела једнаких површина, и уједно дели границу на два једнака дела. ∎

Пример 1. (*Лема о тетиви*) Нека је функција $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ непрекидна и функција за коју важи $f(0) = f(2)$. Доказати да тада постоје $a, b \in [0, 2]$ тако да је $a - b = 1$ и $f(a) = f(b)$.

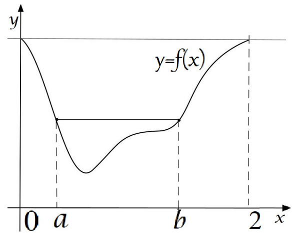
Другим речима, доказати да график овако задате функције f има тетиву дужине 1 паралелну са x-осом (слика 3.13).

Доказ. Посматрајмо функцију:

$g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x+1) - f(x).$

Како је функција f непрекидна, то је и g непрекидна. Приметимо да важи:

$$g(0) = f(1) - f(0) = f(1) - f(2),$$
$$g(1) = f(2) - f(1) = -g(0),$$



Слика 3.13

што значи да је $g(1) \cdot g(0) \leqslant 0$, па по теореми 2.1 постоји $x \in [0,1]$, тако да је $g(x) = 0$ тј. $f(x) = f(x+1)$. ■

Теорема 3.7. Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција за коју важи $f(a) = f(b)$. Тада за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $x \in [a,b]$ тако да је $f(x) = f(x + \frac{b-a}{n})$.

Ова теорема, слично као и претходни пример, тврди да график сваке функције, непрекидне на интервалу $[a,b]$ за коју важи да је $f(a) = f(b)$, има тетиву паралелну x-оси дужине $(b-a)/n$ за било који природан број n.

Доказ. Случај где је $n = 1$ је тривијалан, тј. одмах се види да такво x постоји и да је $x = a$. Даље, случај када је $n = 2$ решен је у примеру 1.

За $n \geqslant 3$, доказ је врло сличан. Наиме, посматрајмо функцију:

$$g : \left[a, b - \frac{b-a}{n}\right] \to \mathbb{R},\ g(x) = f\left(x + \frac{b-a}{n}\right) - f(x)$$

Пошто је g збир две непрекидне функције, она је и сама непрекидна. Обратимо пажњу на следеће:

$$g\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) = f\left(a + (k+1) \cdot \frac{b-a}{n}\right) - f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right), k \in [n-1].$$

Сумирањем ових једнакости добијамо следеће:

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) - f(a) + f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) - f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) +$$
$$+ \ldots + f\left(a + n\frac{b-a}{n}\right) - f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right).$$

Када се одговарајући елементи пократе добијамо:

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = f(b) - f(a) = 0,$$

па можемо да тврдимо да постоје $i, j \in [n-1]$ тако да важи:

$$g\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \leqslant 0 \leqslant g\left(a + j \cdot \frac{b-a}{n}\right).$$

Ако су сви елементи суме једнаки 0, онда је доказ завршен. Иначе, постоји један од интервала $[a + i \cdot \frac{b-a}{n}, a + j \cdot \frac{b-a}{n}]$, $[a + j \cdot \frac{b-a}{n}, a + i \cdot \frac{b-a}{n}]$, назваћемо га I. Коначно, по теореми 2.1 постоји $x \in I$, такво да је $g(x) = 0$ тј. $f(x) = f\left(x + \frac{b-a}{n}\right)$. ■

Теорема 3.8. (*Брауер*[5]) Било која непрекидна функција $f : [a, b] \to [a, b]$ има бар једну фиксну тачку.

Доказ. Посматрајмо функцију $g(x) = f(x) - x$. Пошто представља збир две непрекидне функције, она је и сама непрекидна. Уочимо да мора да важи: $f(b) \leqslant b$ и $f(a) \geqslant a$, те је $g(b) \leqslant 0 \leqslant g(a)$. Теорема 2.1 нам онда налаже да мора постојати $x \in [a, b]$ тако да је $g(x) = 0$ тј. $f(x) = x$. ■

Ово би била само упрошћена верзија праве теореме која важи за n-димензионе просторе чији би доказ захтевао веће знање математике.

Теорема 3.9. (*Борсук-Улам*[6]) Нека је $f : K \to \mathbb{R}$ непрекидна функција која круг K слика у скуп $\mathbb{R}$. Тада постоје две антиподалне тачке A и B круга K тако да је $f(A) = f(B)$.

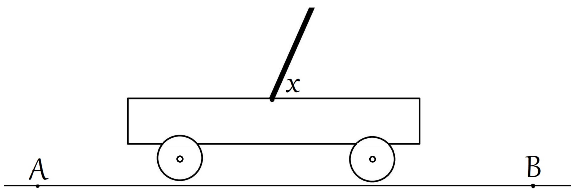
Доказ. Повуцимо произвољну праву кроз центар круга K, која ће сећи круг у тачкама A и B. Дефинишимо нову функцију $d(\alpha) = f(A) - f(B)$, која зависи од угла праве који она гради са неком фиксираном x-осом. Ако се права заротира за угао π, тачке A и B ће заменити места, што значи $d(\alpha+\pi) = -d(\alpha)$. Функција d је непрекидна, па по теореми 2.1, постоји $\alpha \in [0, 2\pi]$ $d(\alpha) = 0$ тј. $f(A) = f(B)$. ■

Борсук-Уламова теорема је једна од најважнијих теорема у топологији, а ово је само упрошћена верзија која се бави проблемом у равни. Исти је овом теоремом решен у свим већим димензијама.

На крају, навешћемо још један јако занимљиви, али уједно тешки проблем у механици који се невероватно лако доказује и решава употребом поменутих теорема. Претпоставимо да неки воз путује од места A до места B, без скретања, правом линијом. Он не мора нужно путовати равномерном брзином нити имати равномерно убрзање. Воз се може кретати на било који начин: убрзавати, успоравати, чак и ићи уназад пре него што стигне до B.

[5] *Luitzen Egbertus Jan Brouwer* (1881–1966), холандски математичар
[6] *Stanisław Marcin Ulam* (1909-1984), пољски математичар

Али, претпоставља се да је кретање воза унапред познато, односно дата је функција $f(t) = s$, која за дато време t одређује растојање s од места A. На поду једног вагона воза постављена је шипка, тако да је један њен крај фиксиран за под, а други није (слика 3.14). Шипка се може без трења дизати, спуштати, ићи напред и назад. Међутим, када горњи део једном дотакне под, остаје у том положају до краја пута. Може ли се увек наћи почетни положај штапа, тако да на крају пута горњи део остане у ваздуху, ако се кретао само под дејством гравитације и кретања воза? Ова претпоставка, на први поглед изгледа, крајње немогућа, а овај проблем парадоксалан. Чини се крајње невероватним да се за било који распоред и начин кретања воза, уз узајамно деловање гравитационих и инерцијалних сила, штап може одржати у ваздуху на крају пута само тачним одабиром почетног положаја. Но, упркос томе, једноставна математика доказује да је то теоретски могуће. При доказивању нису потребни никакви сложени алати механике и комплексно знање из динамике, само једноставна претпоставка физичке природе: Кретање штапа непрекидно зависи од његовог почетног положаја. Означимо са x угао који штап заклапа са подом у почетном тренутку, са y угао који гради са подом на крају пута. Са почетним углом x, по нашој претпоставци, y је јединствено одређен функцијом $g(x) = y$, која је уз то и непрекидна и има вредности $y = 0$ за $x = 0$ и $y = \pi$ за $x = \pi$. По последици 1, за $y = \pi/2$, постоји $x \in [0, \pi]$ тј. постојаће почетни угао штапа за који ће штап на крају бити нормалан са подом. Ово је, наравно, чисто теоретско резоновање проблема, које је у



Слика 3.14

пракси готово немогуће. Ако је пут AB много дугачак и кретање воза веома нестално, интервал могућих почетних углова x за које $g(x)$ неће бити 0 или π биће јако мали. То је јасно свима који су бар једном покушали да на столу одрже иглу у усправном положају на неко време. Без обзира на то, овакав доказ нам још једном савршено показује непредвидиву корисност теорема о непрекидним функцијама и њихову употребу у различитим пољима науке.

Литература

[1] Болтянский В., *„Соображения непрерывности и крах гипотезы Борсука”*, Квант, лист 3, 1994.

[2] Richard Courant, Herbert Robbins, Ian Stewart *„What is Mathematics?”*, Oxford, Second Edition, 1996.

[3] Зоран Каделбург, Владимир Мићић, Срђан Огњановић, Соња Чукић, *„Анализа са алгебром 3”, Додатак уџбенику*, Круг, 2018.

[4] Martin Gardner, *„Mathematical Games”*, Scientific American Inc, vol.237, 1977.

[5] Vladimir Grigor'evich Boltyanskii and, Izrail' Tsudikovich Gohberg, *„The Decomposition of Figures into Smaller Parts”*, The University of Chicago Press, 1980.

[6] *„Universal Chord Theorem”*, Wikipedia, 2022.

[7] *„Intermediate Value Theorem”*, Wikipedia, 2024.