МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД

из математике

Инверзија

Ученик:
Мира Вукмировић, 4ц

Ментор:
Бојана Матић

Београд, јун 2024.

Предговор

Кроз четири године Гимназије видела сам и научила много тога, а ипак ме најлепша сећања везују за области геометрије у ранијим годинама школовања. Она ме инспирише да јој се сада вратим и њој посветим матурски рад, као специјално место чувано за једну, од многих фасцинантних области о којима може да се пише.

Узимајући у обзир ширину геометрије и разноликост њених области, било је веома тешко одлучити се коју тему одабрати. Након истраживања о областима инверзије, ипак се одлучујем за геометрију у равни, упркос првобитној жељи да пишем о геомертрији у простору.

Кроз рад је описана сама инверзија и њене примене на неке проблеме. Инверзија је заиста обимна област и о њој би могло да се пише много, много више од овога. Како нисам могла да покријем све, кренула сам путем оних области које ће полако водити причу ка Штајнеровом поризму.

У еуклидској равни инверзија се оставља недефинисаном у центру круга инверзије. Зато је у првом поглављу уведена бесконачно далека тачка у коју се центар инверзије природно слика. У другом поглављу се налазе основне особине инверзије. Такође, једна важна примена инверзије је у решавању Аполонијевих проблема, којима сам посветила треће поглавље. У четвртом и петом поглавлу уводи се радикална оса, а уз помоћ ње и праменови кругова. Сви ови помови омогућују доказ Штајнеровог поризма у шестом поглављу. Њега сам детаљно обрадила, као завршницу свог рада.

Све слике су цртане у софтверу Геогебра и линкови на најбитније аплете се могу наћи на самом крају.

Надам се да ће заинтересовани читаоци са лакоћом и уживањем читати овај рад.

Садржај

1 Инверзивна раван и њени елементи

Испоставља се да обична, еуклидска раван, није природан амбијент за инверзије, јер у њој инверзија остаје недефинисана у центру круга. То се може решити тако што се еуклидској равни дода бесконачно далека тачка у коју ће се сликати центар круга.

Бесконачно далеку тачку (∞) у раван уводимо интуитивно, као јединствену тачку која је бесконачно далеко од координатног почетка.

Инверзивну раван $\bar{E}^2$ дефинишемо као еуклидску раван E^2 којој је додата бесконачно далека тачка, тј.

$$\bar{E}^2 = E^2 \cup \{\infty\}.$$

Од сада ћемо инверзивну раван посматрати као амбијент за инверзију и све о чему ћемо надаље причати одиграва се у њој.

Напомена: Инверзивна раван се формално може увести преко тзв. Риманове сфере (видети [6]), али се ми тиме нећемо бавити.

Даље, узимајући у обзир да бесконачно далека тачка постоји, можемо приметити да је права заправо круг одређен са две тачке и трећом која је бесконачно далека. Стога уводимо појам који обједињује круг и праву.

Уопштени круг је круг или права којој је додата бесконачно далека тачка (круг бесконачно великог пречника).

Сматрамо да свака права садржи бесконачно далеку тачку. Зато праве које се секу у коначној тачки можемо посматрати као уопштене кругове који се секу у две тачке, а паралелне праве као уопштене кругове који се додирују.

2 Основне особине инверзије

Дефиниција 2.1 *Нека је k произвољан круг еуклидске равни са центром O и полупречником r.* **Инверзија** *φ_k је пресликавање инверзивне равни*

$$\varphi_k : \bar{E}^2 \to \bar{E}^2$$

која тачку $X \neq O$, $X \neq \infty$ пресликава у тачку X' полуправе OX, такву да важи

$$OX \cdot OX' = r^2. \tag{1}$$

и додатно, $\varphi_k(O) = \infty$, $\varphi_k(\infty) = O$.

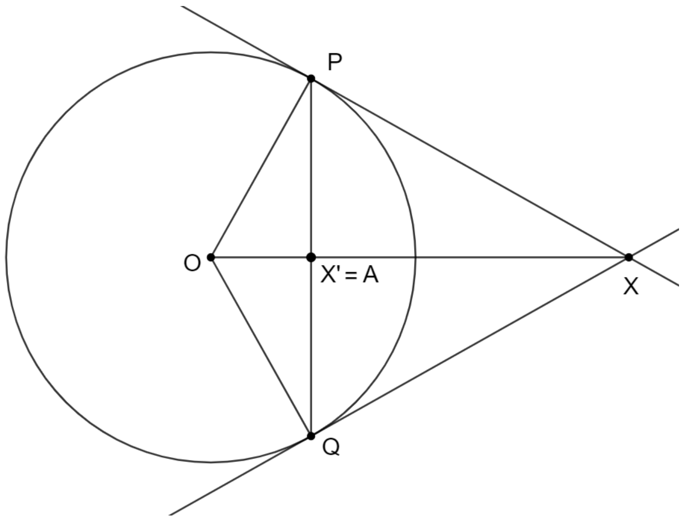
Лако се уочавају следеће особине инверзије:

- Изверзија је бијективно пресликавање;
- Инверзија је инволуција, тј. $\varphi_k^2 = Id$;
- Инверзија мења оријентацију равни;
- Инверзија у односу на круг $k(O, r)$ пресликава унутрашњу област тог круга у његову спољашњу област; и обрнуто, пресликава спољашњу област тог круга у његову унутрашњу;
- Тачка инверзије је инваријантна ако и само ако се налази на кругу инверзије.

Лема 2.1 *Инверз неке тачке X ван круга $k(O, r)$ у инверзији φ_k се налази у пресеку дужи OX и PQ, где су P и Q тачке додира тангенти из тачке X на круг k.*

Доказ: Нека је A пресек дужи PQ и дужи OX (Слика 1). Како је $OP = OQ$ и $XP = XQ$, следи да је $OPXQ$ делтоид, те су му дијагонале нормалне, тј. $PQ \perp OX$. Тада је $\triangle OPX \sim \triangle OAP$ (из једнакости углова), па важи $\frac{OX}{OP} = \frac{OP}{OA}$. Одатле видимо да је $OX \cdot OA = r^2$, а како је $A \in OX$, тачка A мора бити инверз тачке X, тј. $X' = A$. $\square$

Из дате леме можемо приметити како се конструишу инверзне тачке. У случају да је тачка X ван круга инверзије, инверз добијамо у пресеку OX са дужи која спаја додирне тачке тангенти из X на круг; у супротном, ако је X унутар круга, поступак је обрнут.



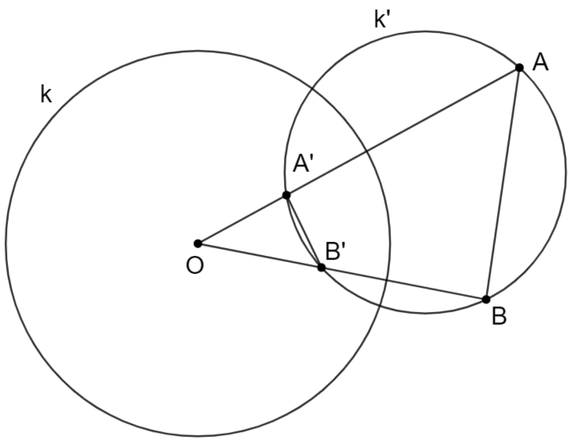
Слика 1: Конструкција инверзне тачке, Лема 2.1

Напомена: Интересантно је напоменути да се инверзна тачка може конструисати само шестаром, без употребе лењира. Наиме, важи много више, Мор [1]-Маскеронијева [2] теорема каже да се свака конструкција која се изводи лењиром и шестаром може извести само шестаром.

Лема 2.2 *Нека су дате тачке A и B такве да су A, B, O неколинеарне и нека су $A' = \varphi_k(A)$, $B' = \varphi_k(B)$. Тада важи:*

1) $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$;

2) A, B, A', B' су концикличне.



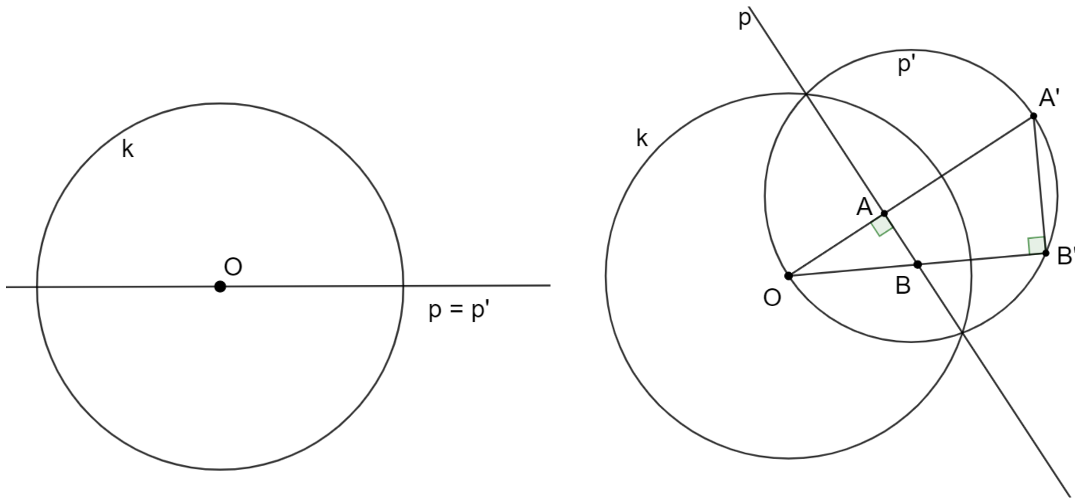
Слика 2: Слика уз Лему 2.2

[1]Jørgen Mohr, (1640 - 1697), дански математичар
[2]Lorenzo Mascheroni, (1750 - 1800), италијански математичар

Доказ: 1) Како $A' = \varphi_k(A)$, $B' = \varphi_k(B)$, то је $OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB'$, тј. $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$ (Слика 2), одакле следи 1).
2) Из доказане сличности важи да је $\angle OAB \sim \angle OB'A'$, па је $\angle A'B'B = 180° - \angle OAB$, па тврђење важи. $\square$

Теорема 2.1 *При инверзији φ_k уопштени круг се слика у уопштени круг.*

Доказ: Случај 1. Претпоставимо да је уопштени круг права p која садржи центар O (Слика 3, лево). По дефиницији инверзије, свака тачка A праве p слика се у тачку A' која такође припада правој p. Дакле, при инверзији φ_k, права која садржи центар круга k, слика се у саму себе.
Случај 2. Претпоставимо да је уопштени круг права p која не садржи центар O (Слика 3, десно). Нека је A подножје нормале из O на праву p и $A' = \varphi_k(A)$. Нека је B произвољна тачка праве p таква да $B \neq A$ и $B' = \varphi_k(B)$. Тада је, на основу Леме 2.2, $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$, тј. $\angle OAB = \angle OB'A' = 90°$. Закључујемо да тачка B' припада кругу над пречником OA'. Специјално, по дефиницији, бесконачно далека тачка праве p се пресликава у центар O. Дакле, при инверзији φ_k, права која не пролази кроз центар O, се пресликава у круг који садржи O.



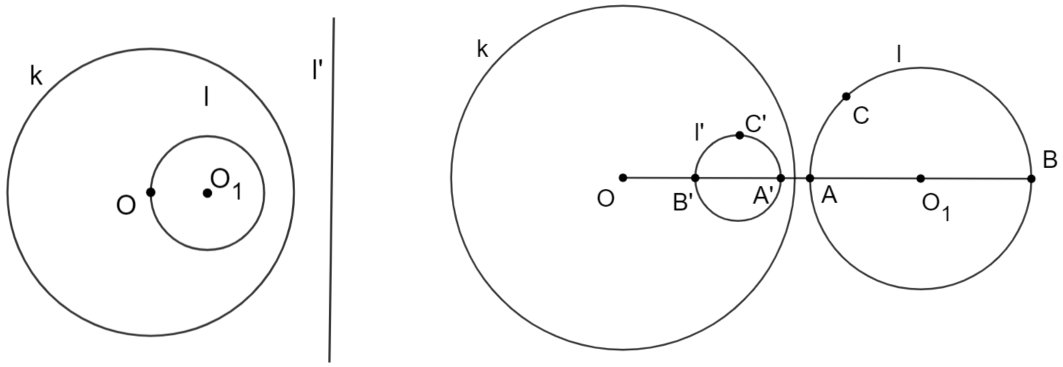
Слика 3: Слике правих при инверзији (Теорема 2.1)

Случај 3. Претпоставимо да је уопштени круг круг l са центром O_1, такав да $O \in l$ (Слика 4, лево). Како је инверзија инволуција и важи Случај 2, слика круга који садржи тачку O, при инверзији φ_k, биће права која не садржи тачку O.
Случај 4. Претпоставимо да је уопштени круг круг l са центром O_1 такав да $O \notin l$ (Слика 4, лево). Нека су A и B пресеци праве OO_1 са кругом l и нека је C произвољна тачка на кругу l. Означимо $\angle BAC = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$. Нека су $A' = \varphi_k(A)$, $B' = \varphi_k(B)$, $C' = \varphi_k(C)$. Како је AB пречник круга l, $\angle ACB = 90°$. Доказаћемо да је $\angle A'C'B' = 90°$. На основу Леме 2.2,

$\triangle OAC \sim \triangle OC'A'$, тј. $\angle OC'A' = \angle OAC = 180° - \alpha$ и $\triangle OBC \sim \triangle OC'B'$, тј. $\angle OC'B' = \angle OBC = \beta$. Како је

$$\angle A'C'B' = \angle OC'A' - \angle OC'B' = (180° - \alpha) - \beta = 90°$$

следи да се тачка C' налази на кругу над пречником $A'B'$. Исто се показује за сваку тачку круга l и њен инверз. Дакле, слика круга који не садржи O, при инверзији φ_k, је круг који такође не садржи тачку O. □



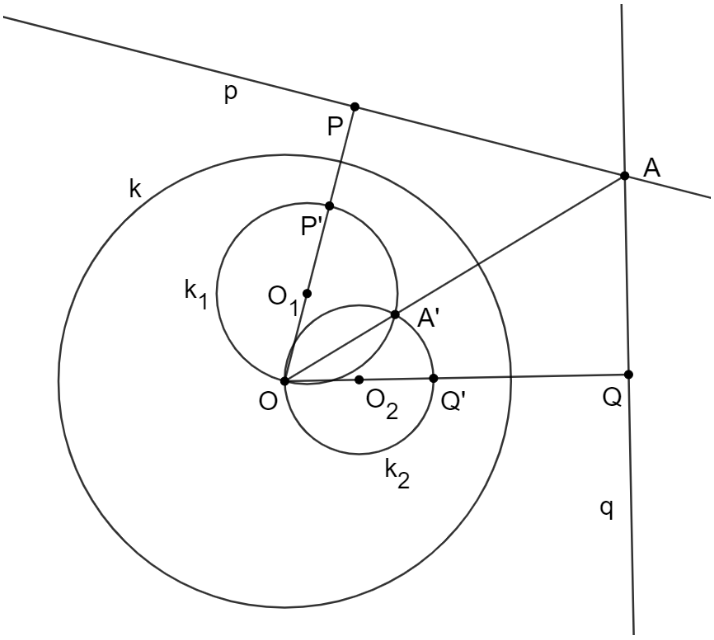
Слика 4: Слике кругова при инверзији (Теорема 2.1)

Из Случаја 4 такође следи:

Примедба 2.1 *При инверзији φ_k која слика круг l у круг l', центри кругова k, l, l' су колинеарни.*

Теорема 2.2 *Инверзија чува углове између уопштених кругова.*

Доказ: Размотримо случајеве. Угао између два круга своди се на угао између тангенти у њиховим заједничким тачкама, док се угао између праве и круга своди на угао између праве и тангенте круга у пресечној тачки са правом. Дакле, довољно је доказати теорему у случају да су уопштени кругови две праве. Стога, узмимо праве p и q, такве да $p \cap q = \{A\}, A \neq O$. Нека су $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ редом слике правих p и q при инверзији φ_k и $\varphi_k(A) = A'$. На основу Теореме 2.1, $k_1 \cap k_2 = \{O, A'\}$. Нека су P и Q редом подножја нормала из центра круга k инверзије на праве p и q и $\varphi_k(P) = P'$, тј. $\varphi_k(Q) = Q'$ (Слика 5). Претпоставимо да су P и Q са разних страна праве OA (ако су са истих страна доказ је сличан). Означићемо углове $\angle OAP = \alpha$ и $\angle OAQ = \beta$, тј. биће $\angle(p, q) = \alpha + \beta$. На основу Леме 2.2, из сличности троуглова, $\angle OA'P' = \angle OPA = 90°$ и $\angle OA'Q' = \angle OQA = 90°$, па важи да су ово углови над пречницима и да су тачке P', A' и Q' колинеарне. Одатле и из сличности троуглова видимо да $\angle OP'Q' = \angle OP'A' = \angle OAP = \alpha$ и $\angle OQ'P' = \angle OQ'A' = \angle OAQ = \beta$. Тада се из $\triangle OP'Q'$ види да је $\angle(k_1, k_2) = \angle O_1OO_2 = 180° - (\alpha + \beta)$, тј. $\angle(k_1, k_2) = \angle O_1OO_2 = \alpha + \beta$, што је и требало показати. □



Слика 5: Слика уз Теорему 2.2

Теорема 2.3 *Нека је дата тачка* X *и* $\varphi_k(X) = X'$. *Ако за уопштени круг* l *важи* $\{X, X'\} \subset l$, *тада је* $\varphi_k(l) = l$.

Доказ: Ако је l права XX', тада l садржи центар O круга k инверзије, па је $\varphi_k(l) = l$.
Ако је l еуклидски круг који садржи X и X'. Тада l не садржи O, па је $l' = \varphi_k(l)$ круг. Из $X \in l$ добијамо $X' \in l'$, а из $X' \in l$ добијамо $\varphi_k(X') \in l'$, тј. $X \in l'$. Центри кругова l и l' припадају симетрали дужи XX', а како су, на основу Примедбе 1, ти центри колинеарни са O, они морају бити исти. Дакле $l = l'$. □

Теорема 2.4 *Нека је* l *уопштени круг. Тада важи* $l \perp k$ *ако и само ако* $\varphi_k(l) = l$.

Доказ: У случају да је l права тада је $\varphi_k(l) = l$ ако и само ако l садржи центар круга инверзије, тј. $l \perp k$.
Сада посматрамо случај када је l круг.
($\Rightarrow$) Нека је $l \perp k$. На основу Теореме 2.2, $\varphi_k(l) \perp \varphi_k(k)$, тј. $l' \perp k$. Како су кругови l и k нормални, они се секу у тачкама X и Y, за које такође важи $\{X, Y\} \in l'$. Како је круг који сече круг k у тачкама X и Y и нормалан је на њега јединствен, мора бити $l' = l$, тј. $\varphi_k(l) = l$. □
($\Leftarrow$) Нека је сада $\varphi_k(l) = l$. Када би се круг l налазио унутар, тј. изван круга k, његова слика би била изван, тј. унутар круга k. Дакле, мора бити $l \cap k = \{X, Y\}$, па тангенте t_1 и t_2 на кругове k и l у тачки X граде неки угао α. Како су кругови k и l фиксни при инверзији φ_k, фиксне су и тангенте, па се угао α пресликава у њему подударан напоредни угао α'. Дакле, $\alpha = \alpha'$ и $\alpha + \alpha' = 180°$, па је $\alpha = 90°$, тј. $l \perp k$. □

Лема 2.3 *За сваке две тачке A и B и њихове слике $A' = \varphi_k(A)$, $B' = \varphi_k(B)$ важи:*

$$A'B' = AB \cdot \frac{r^2}{OA \cdot OB}. \tag{2}$$

Доказ: Размотрићемо два случаја. Прво, нека су тачке, A, B и O колинеарне. Нека је, без умањења општости, тачка A између тачака O и B. Тада ће тачка B' бити између тачака O и A', па важи да је

$$A'B' = OA' - OB' = \frac{r^2}{OA} - \frac{r^2}{OB} = \frac{(OB - OA) \cdot r^2}{OA \cdot OB} = AB \cdot \frac{r^2}{OA \cdot OB}.$$

Ако су A, B и O неколинеарне, на основу Леме 2.2, $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$, тј.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OA} = \frac{\frac{r^2}{OB}}{OA} = \frac{r^2}{OA \cdot OB}.$$

$\square$

3 Аполонијеви проблеми о додиру кругова

Аполоније [3] је био антички математичар, астроном и геометар. У математици, његова најпознатија проучавања су била у области конусних пресека, а од великог значаја су његови проблеми о додиру кругова. Аполонијеви проблеми о додиру кругова своде се на конструкцију круга који задовољава три услова који су облика:

- круг садржи дату тачку;
- круг додирује дату праву;
- круг додирује дати круг.

Један од начина решавања ових проблема је управо уз помоћ инверзије. У наставку ћемо навести десет Аполонијевих проблема, а затим и решења неких од њих.

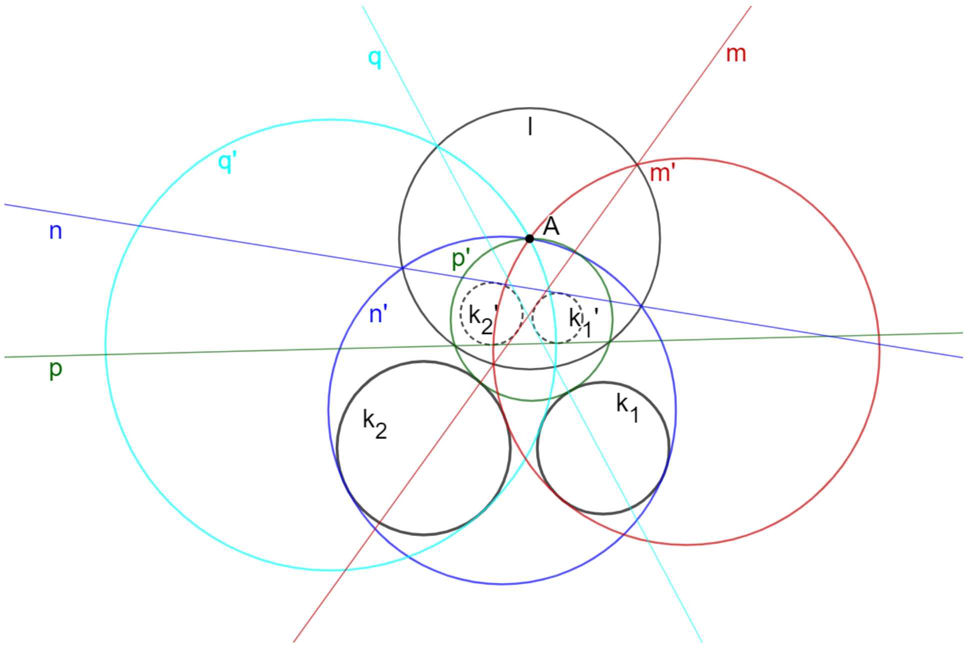
1. Конструисати круг који садржи три дате тачке.
2. Конструисати круг који садржи две дате тачке и додирује дату праву.
3. Конструисати круг који садржи две дате тачке и додирује дати круг.
4. Конструисати круг који садржи дату тачку и додирује две дате праве.
5. Конструисати круг који садржи дату тачку и додирује дату праву и дати круг.
6. Конструисати круг који садржи дату тачку и додирује дата два круга.
7. Конструисати круг који додирује дате три праве.
8. Конструисати круг који додирује дате две праве и дати круг.
9. Конструисати круг који додирује дату праву и дата два круга.
10. Конструисати круг који додирује дата три круга.

За почетак, приметимо да се први проблем своди на конструкцију описаног, а седми на конструкцију уписаног круга троугла. Такође, други и трећи проблем се могу решити лако, без примене инверзије. Остали проблеми се најлакше решавају применом инверзије, углавном на сличне начине. Приказаћемо решење шестог проблема, док решавање осталих препуштамо читаоцу.

[3] Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος, (240 п.н.е. - 190 п.н.е), грчки математичар

Шести Аполонијев проблем: Конструисати круг који садржи тачку A и додирује дата два круга k_1 и k_2, $A \notin k_1$, $A \notin k_2$.

Решење: Нека је k круг који задовољава услове задатка, тј. тражени круг. Нека је l круг са центром у тачки A произвољног полупречника и φ_l инверзија у односу на круг l. Како круг k садржи центар A круга инверзије, он се пресликава у праву k', $A \notin k'$. Кругови k_1 и k_2 не садрже A, па се они пресликавају у кругове k_1' и k_2'. Пошто круг k додирује кругове k_1 и k_2, права k' додирује кругове k_1 и k_2, тј. биће њихова заједничка тангента. Дакле, круг k се добија као инверз заједничких тангенти кругова k_1' и k_2', при инверзији φ_l. У зависности од положаја кругова k_1' и k_2' добићемо различит број решења. Уколико је круг k_1' унутар круга k_2' или обрнуто, решење не постоји. Уколико се кругови додирују изнутра, постоји једно решење. Када се кругови секу постоји два решења, а када се додирују споља три. Уколико су кругови дисјунктни и нису један унутар другог, постоји четири решења. (Слика 6, случај постојања сва четири решења, која су представљена различитим бојама)



Слика 6: Решење шестог Аполонијевог проблема

4 Радикална оса

У овом поглављу ћемо причати о радикалној оси јер ће нам она бити од велике важности за наредна поглавља. Да бисмо објаснили појам радикалне осе, за почетак морамо увести појам потенције.

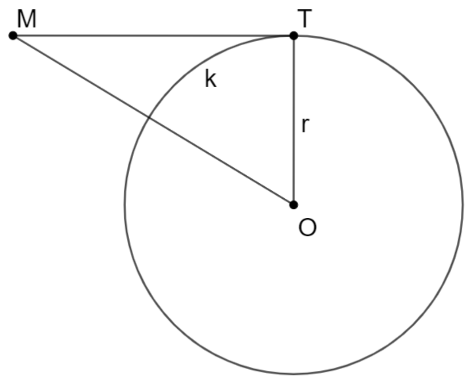
Дефиниција 4.1 *Нека је $k(O, r)$ круг и M тачка.* **Потенција тачке M у односу на круг** k *је број:*

$$p(M, k) := MO^2 - r^2. \tag{3}$$

Приметимо да је:

- $p(M, k) > 0$, ако је M изван круга;
- $p(M, k) = 0$, ако M припада кругу;
- $p(M, k) < 0$, ако је M унутар круга.

Ако је M изван круга и T додирна тачка тангенте из M на k, тада по Питагориној теореми важи $p(M, k) = MT^2$.



Слика 7: Потенција тачке у односу на круг

Дефиниција 4.2 **Радикална оса** *кругова $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$, $O_1 \neq O_2$, је геометријско место тачака M које имају исту потенцију у односу на оба круга, тј. $p(M, k_1) = p(M, k_2)$.*

Испоставља се да је радикална оса кругова k_1 и k_2 уједно нормална на праву O_1O_2. Да бисмо то показали доказаћемо следећу лему.

Лема 4.1 *Нека су X, Y различите тачке равни и $d \geq 0$. Геометријско место тачака M равни таквих да важи:*

$$MX^2 - MY^2 = d^2 \tag{4}$$

је права управна на дуж XY.

Доказ: Нека је M_0 тачка праве XY и Z тачка равни таква да је $ZY = d$, $ZY \perp XY$ (Слика 8). На основу Питагорине теореме за $\triangle M_0YZ$ важи:

$$M_0X^2 - M_0Y^2 = M_0X^2 - (M_0Z^2 - ZY^2) = M_0X^2 - M_0Z^2 + d^2.$$

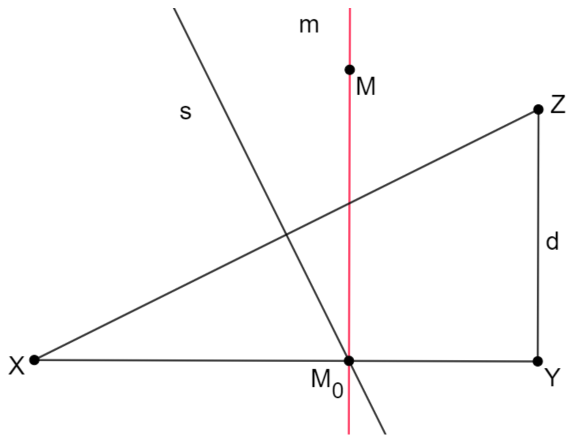
Последњи израз је једнак d^2 ако и само ако M_0 припада симетрали дужи XZ, па је $\{M_0\} = s \cap XY$ јединствена тачка праве XY која задовољава услов израза (4). Покажимо да је права m управна у тачки M_0 на праву XY тражено геометријско место тачака.
($\Rightarrow$) Ако је $M \in m$, на основу Питагорине теореме важи

$$MX^2 - MY^2 = M_0X^2 + M_0M^2 - (M_0M^2 + M_0Y^2) = M_0X^2 - M_0Y^2 = d^2,$$

па M задовољава израз (4).
($\Leftarrow$) Обрнуто, нека M задовољава услов израза (4). Нека је M_1 подножје нормале из M на праву XY. Тада

$$d^2 = MX^2 - MY^2 = MM_1^2 + M_1X^2 - (MM_1^2 + M_1Y^2) = M_1X^2 - M_1Y^2,$$

па је $M_1 = M_0$. Дакле, $MM_0 \perp XY$, па $M \in m$, те је доказ завршен. $\square$



Слика 8: Слика уз Лему 4.1

Приметимо да је за $d = 0$ тражено геометријско место тачака симетрала дужи XY.
Претходну лему можемо применити на дефиницију радикалне осе ρ кругова $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$. Дакле $M \in \rho$ ако

$$MO_1^2 - r_1^2 = p(M, k_1) = p(M, k_2) = MO_2^2 - r_2^2.$$

Ако је, без умањења општости, $r_1^2 \geq r_2^2$, тада $MO_1^2 - MO_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = d^2 \geq 0$, па је радикална оса права, а доказ леме нам омогућава њену конструкцију.

Последица 4.1 *Радикална оса кругова $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ је права управна на O_1O_2.*

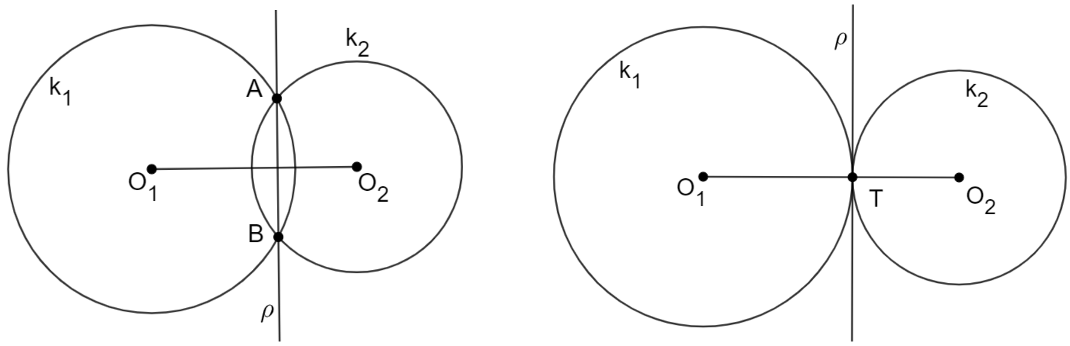
Теорема 4.1 *Радикалне осе трију кругова припадају једном прамену.*

Доказ: Нека је ρ_1 радикална оса кругова k_2 и k_3, ρ_2 радикална оса кругова k_1 и k_3, ρ_3 радикална оса кругова k_1 и k_3. Ако се ρ_1 и ρ_2 секу и $\{M\} = \rho_1 \cap \rho_2$ тада $p(M, k_2) = p(M, k_3) = p(M, k_1)$, па $M \in \rho_3$ и радикалне осе припадају прамену конкурентних правих.

Нека је $\rho_1 \parallel \rho_2$. Ако би ρ_3 секла праву ρ_2 у некој тачки M, тада би на основу доказаног и ρ_1 садржала M, па би се и ρ_1 и ρ_2 секле у M што је контрадикција. Дакле $\rho_1 \parallel \rho_2 \parallel \rho_3$. $\square$

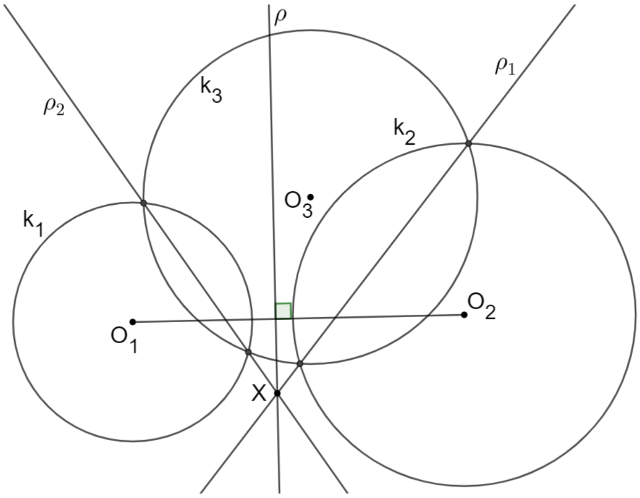
Како конструисати радикалну осу?

Случај 1. (Слика 9, лево) Кругови k_1 и k_2 се секу, тј, $k_1 \cap k_2 = \{A, B\}$. Тада је радикална оса $\rho = AB$ јер је $p(A, k_1) = 0 = p(A, k_2)$ и $p(B, k_1) = 0 = p(B, k_2)$, па је $A, B \in \rho$, тј. $\rho = AB$.
Случај 2. (Слика 9, десно) Кругови k_1 и k_2 се додирују у тачки T, тј. $k_1 \cap k_2 = \{T\}$. Радикална оса ρ је њихова заједничка тангента (која садржи T), јер је она нормална на O_1O_2, а $T \in \rho$.



Слика 9: Радикалне осе кругова који се секу, тј. додирују

Случај 3. (Слика 10) Кругови k_1 и k_2 су дисјунктни, тј, $k_1 \cap k_2 = \emptyset$. Нека је k_3 произвољан круг који сече кругове k_1 и k_2. Нека је ρ_2 радикална оса кругова k_1 и k_3, ρ_1 радикална оса кругова k_2 и k_3. Ако је ρ тражена радикална оса кругова k_1 и k_2, на основу Теореме 4.1 знамо да ρ, ρ_1, ρ_2 припадају једном прамену. Дакле, ρ је права тог прамена која је нормална на O_1O_2 и садржи тачку $\{X\} = \rho_1 \cap \rho_2$.



Слика 10: Радикална оса дисјунктних кругова

Лема 4.2 *Нека је ρ радикална оса кругова $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$, $O_1 \neq O_2$. Тада важи следеће:*

1) Тангентне линије из тачке C на кругове k_1 и k_2 су једнаке дужине ако и само ако $C \in \rho$.

2) Ако за круг $k(C, r)$ важи $k \perp k_1$, тада је $k \perp k_2$ ако и само ако $C \in \rho$.

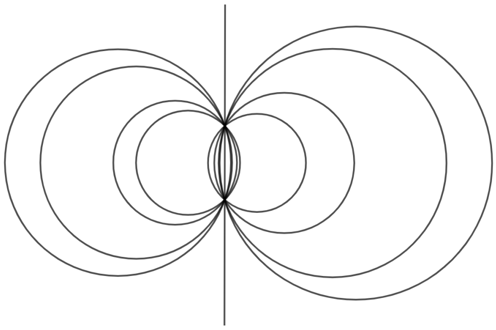
Доказ: 1) Нека су CT_1 и CT_2 тангентне линије из тачке $C \in \rho$ на кругове k_1 и k_2. Прво тврђење је очигледно јер су потенције једнаке квадрату дужина тангентних линија.
Докажимо сада 2). Нека је $k(C, r)$ круг такав да важи $k \perp k_1$, тј. биће $CO_1^2 = r_1^2 + r^2$. Ако је $k \perp k_2$, тј. $CO_2^2 = r_2^2 + r^2$, тада важи

$$p(C, k_1) = CO_1^2 - r_1^2 = r^2 = CO_2^2 - r_2^2 = p(C, k_2),$$

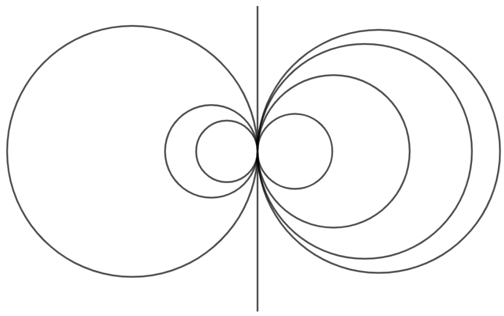
тј. $C \in \rho$. Слично се доказује обрнуто, да из $k \perp k_1$ и $C \in \rho$ следи $k \perp k_2$. □

5 Праменови кругова

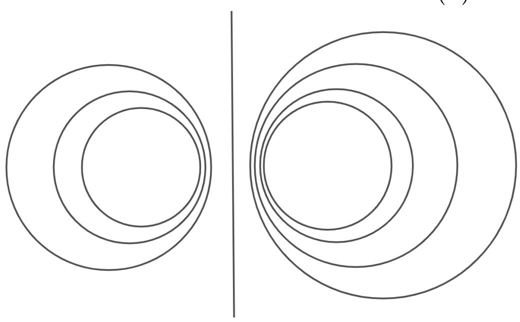
Дефиниција 5.1 *Макисмална фамилија χ кругова таква да свака два круга те фамилије имају исту радикалну осу ρ, зове се* **прамен кругова**.



(а) Елиптички



(б) Параболички



(ц) Хиперболички

Слика 11: Праменови кругова

Јасно је да свака два неконцентрична круга k_1 и k_2 одређују радикалну осу ρ, а тиме и целу фамилију. Зато постоје 3 типа праменова кругова (у зависности од положаја k_1 и k_2):

1. **Елиптички прамен кругова** одређен је двама круговима k_1 и k_2, који се секу. (Слика 11, (а))

   Приметимо да и заједничку радикалну осу $\rho = AB$, такође можемо сматрати (уопштеним) кругом прамена.

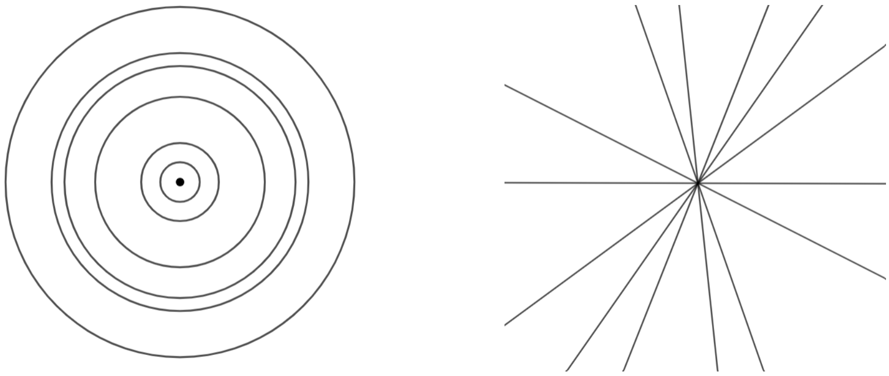
2. **Параболички прамен кругова** одређен је двама круговима k_1 и k_2, који се додирују. (Слика 11, (б))

   Њихова заједничка радикална оса ρ је тангента у тачки T. Њу такође можемо сматрати кругом прамена.

3. **Хиперболички прамен кругова** одређен је двама круговима k_1 и k_2, који су дисјунктни. (Слика 11, (ц))

   Радикалну осу ρ такође можемо сматрати кругом тог прамена.

Показује се да је природно увести још два типа праменова уопштених кругова, за које радикална оса није дефинисана.



(а) Концентрични кругови (б) Конкурентне праве

Слика 12: Праменови кругова без радикалне осе

4. **Прамен концентричних кругова** (Слика 12, (а))
5. **Прамен конкурентних правих** (Слика 12, (б))
   Приметимо да се сваке две праве прамена правих конкурентних у O секу и у тачки ∞, па прамен конкурентних правих можемо сматрати елиптичким праменом кругова.

Примедба 5.1 *Центри кругова једног прамена су колинеарни.*

Примедба 5.2 *Нека је ρ радикална оса прамена кругова χ и k круг са центром $C \in \rho$, управан на један круг прамена χ. Тада је, на основу Леме 4.2, k управан на све кругове прамена χ.*

Нека су $k_1(C_1, r_1)$ и $k_2(C_2, r_2)$ кругови који одређују прамен χ са радикалном осом ρ. Нека су $k_1'(C_1', r_1')$ и $k_2'(C_2', r_2')$ кругови ортогонални на кругове k_1 и k_2. Они одређују прамен χ' са радикалном осом ρ'. На основу Примедбе 5.1 важи $C_1', C_2' \in \rho$, тј. $\rho = C_1'C_2'$, а такође и $C_1, C_2 \in \rho'$, тј. $\rho' = C_1C_2$. На основу Примедбе 5.2 сви кругови прамена χ су ортогонални на све кругове прамена χ', па се χ и χ' називају **ортогонални праменови**.

Примедба 5.3

1) Радикалне осе ортогоналних праменова су ортогоналне.

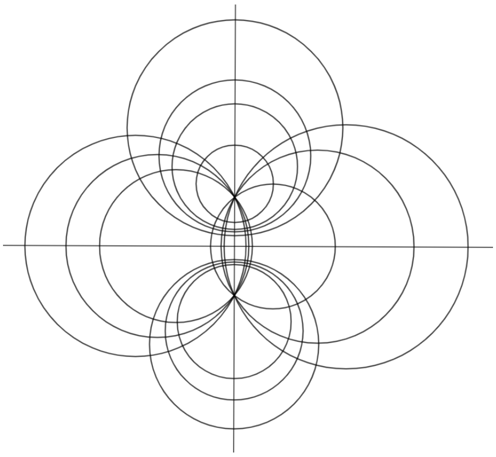
2) Сви кругови неког прамена нормални су на све кругове њему ортогоналног прамена.

3) Прамен кругова је скуп свих кругова ортогоналних на дата два круга.

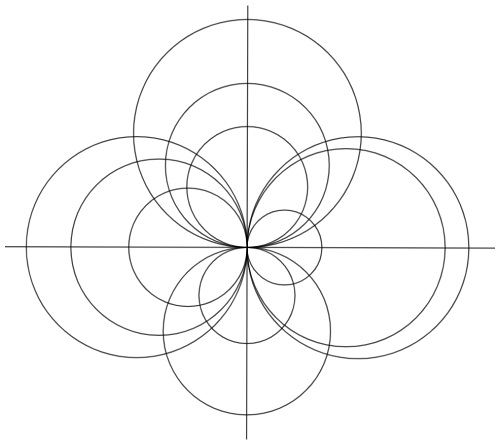
Последица 5.1 *Инверзија пресликава прамен кругова у прамен кругова (на основу Примедбе 4.3)).*

Теорема 5.1 *Нека је χ прамен кругова и χ' њему ортогоналан прамен. Тада важи:*

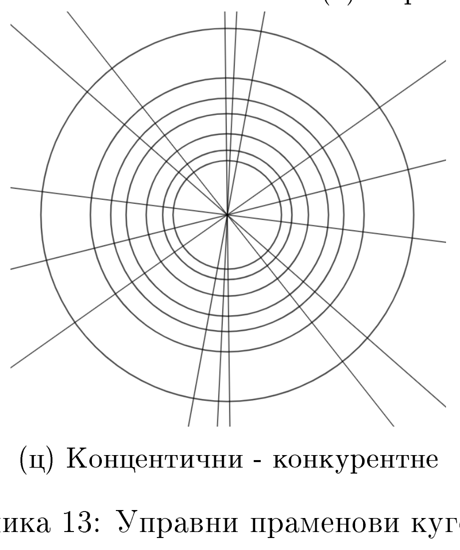
- *ако је χ хиперболички, χ' је елиптички;*
- *ако је χ елиптички, χ' је хиперболички;*
- *ако је χ параболички, χ' је параболички;*
- *ако је χ прамен конкурентних правих, χ' је прамен концентричних кругова и обрнуто.*



(а) Хиперболички - елиптички



(б) Параболички - параболички



(ц) Концентични - конкурентне

Слика 13: Управни праменови кугова

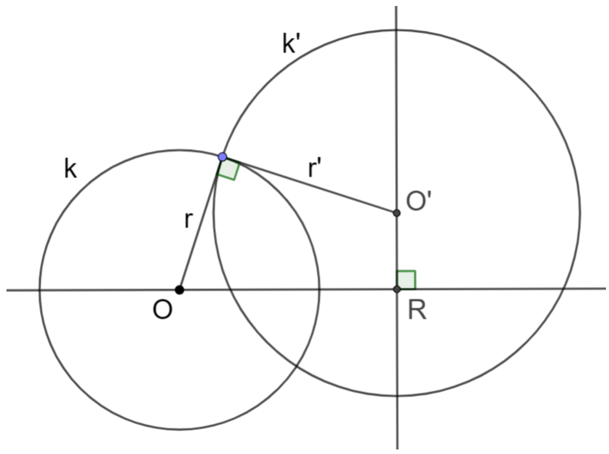
Доказ: Последњи случај је очигледан (Слика 13, (ц)) . Посматрајмо управне праменове кругова χ и χ' (Слика 13, (а), (б)). Нека је R пресек њихових радикалних оса и нека су $k(O,r)$ и $k'(O',r')$ неки кругови тих праменова, редом (Слика 14). Како је $k \perp k'$ и радикалне осе су међусобно нормалне важи:

$$OR^2 + O'R^2 = OO'^2 = r^2 + r'^2$$

тј.

$$OR^2 - r^2 = -(O'R^2 - r'^2).$$

Дакле, уколико је $OR^2 - r^2 > 0$, тада R припада кругу k, тј. круг k припада елиптичком прамену. Тада је $O'R^2 - r'^2 < 0$, па R не припада кругу k', тј. k' припада хиперболичком прамену и обратно. У специјалном случају, када је $OR^2 - r^2 = 0$ и $O'R^2 - r'^2 = 0$, дата два прамена су параболичка, зато што додирују своје радикалне осе у тачки R. □



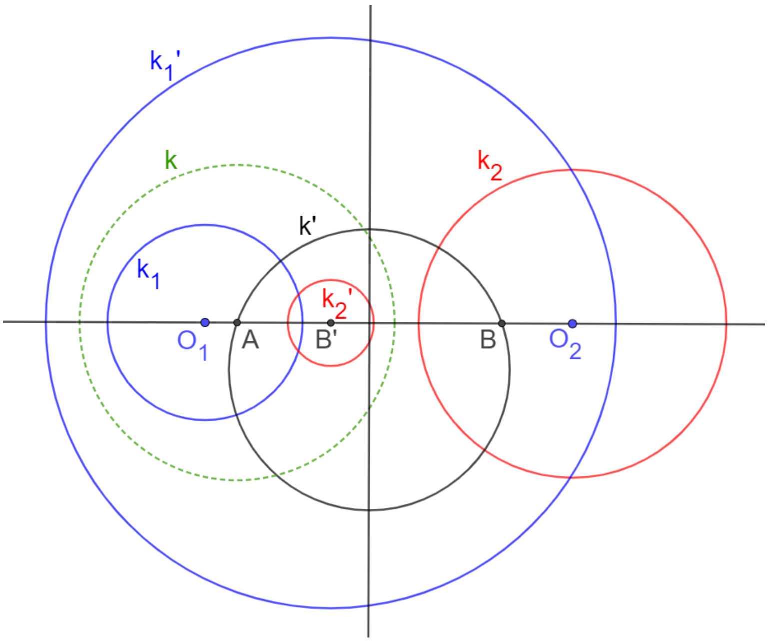
Слика 14: Доказ ортогоналности одређених праменова

Сада ћемо доказати лему значајну за следеће поглавље.

Лема 5.1 *Постоји инверзија која два дисјунктна круга k_1 и k_2 пресликава у два концентрична круга.*

Доказ: Заправо ћемо показати да постоји инверзија која хиперболички прамен кругова χ одређен дисјунктним круговима k_1 и k_2 пресликава на прамен концентричних кругова (плави и црвени круг на Слици 15). Нека је χ' елиптички прамен кругова ортогоналан на χ и нека су A и B заједничке тачке свих кругова прамена χ'. Нека је k произвољан круг са центром A. Инверзија φ_k пресликава тачку B у тачку B'. Како сви кругови прамена χ' садрже центар инверзије A, они се сликају у конкурентне праве кроз B'. Кругови прамена χ, међу којима и k_1 и k_2, се сликају у кругове ортогоналне на те праве, тј у концентричне кругове. □

Напомена: Приметимо да смо уместо произвољног круга са центром у A могли узети произвољан круг са центром у B.



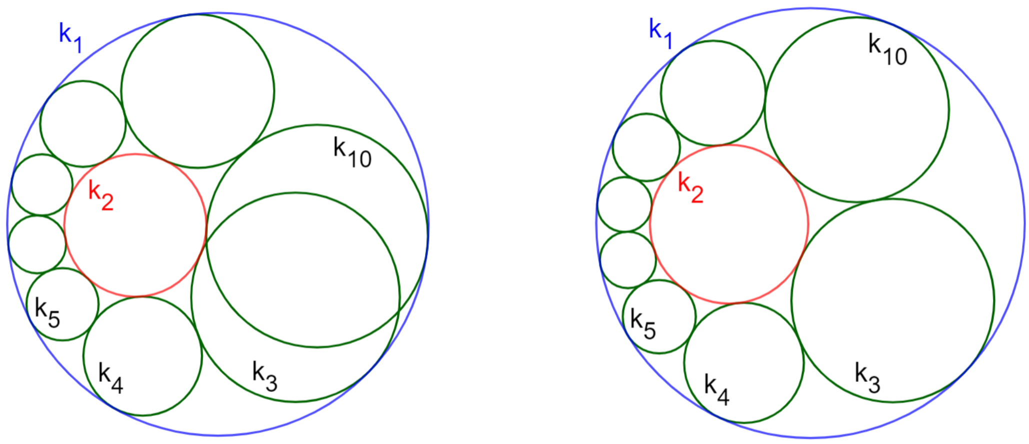
Слика 15: Слика уз Лему 6

6 Штајнеров поризам

Поризам *је математички проблем конструктивне природе за који или не постоји решење или их постоји бесконачно много.*

Штајнеров [4] поризам: Нека су k_1 и k_2 кругови такви да је k_2 унутар k_1. Нека је k_3 неки круг који додирује k_1 и k_2. Ако постоји низ кругова $k_4, k_5, \ldots, k_{n+2}$ такав да k_i додирује k_1, k_2 и k_{i-1}, $i = 4, 5, \ldots, n+2$ и да k_{n+2} додирује k_3, тада, такав низ постоји за ма који избор круга k_3.

Низ $k_3, k_4, k_5, \ldots, k_{n+2}$ од n кругова који додирују k_1 и k_2 и међусобно се додирују зову се **Штајнеров ланац**. (На Слици 16, лево приказан је случај када Штајнеров ланац не постоји, а на Слици 16, десно када постоји)



Слика 16: (Не)постојање Штајнеровог ланца

Доказ: На основу Леме 5.1, постоји круг k такав да се инверзијом φ_k кругови k_1 и k_2 пресликавају у концентричне кругове k_1' и k_2' [5]. Ако постоји, Штајнеров ланац $k_3, k_4, k_5, \ldots, k_{n+2}$ кругова k_1 и k_2 пресликава се у Штајнеров ланац кругова $k_3', k_4', k_5', \ldots, k_{n+2}'$ кругова k_1' и k_2'. Јасно је да Штајнеров ланац $k_3', k_4', k_5', \ldots, k_{n+2}'$ постоји независно од избора круга k_3', јер су добијени кругови ланца подударни. Избор другог круга k_3' само ротира ланац. Зато и ланац $k_3, k_4, k_5, \ldots, k_{n+2}$, ако постоји, постоји независно од избора круга k_3. □

Дакле, постојање Штајнеровог ланца зависи само од кругова k_1 и k_2, тј. од односа полупречника кругова k_1' и k_2'. Такође, однос полупречника a и b кругова k_1' и k_2' не зависи од круга k таквог да су $k_1' = \varphi_k(k_1)$ и $k_2' = \varphi_k(k_2)$ концентрични. То ћемо показати у следећој леми.

[4] Jakob Steiner, (1796 - 1863), швајцарски математичар

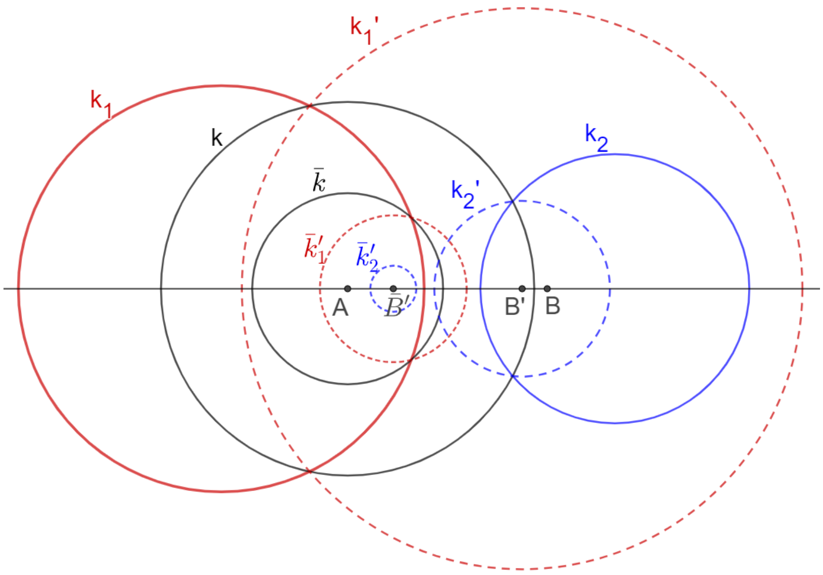
[5] Након доказа теореме показујемо да овај доказ не зависи од избора круга k

Лема 6.1 *Нека су k_1 и k_2 дисјунктни кругови, а круг k такав да су $k_1' = \varphi_k(k_1)$ и $k_2' = \varphi_k(k_2)$ концентрични. Однос $\frac{a}{b}$ полупречника кругова k_1' и k_2' не зависи од избора круга k.*

Доказ: Јасно је да такав круг k мора да има центар у тачки A или B, где су то тачке које одређују прамен елиптичких кругова ортогоналних на k_1 и k_2. Дакле, можемо претпоставити да круг $k(A, r)$ има центар у тачки A, као што смо и урадили у доказу Штајнеровог поризма.
Нека је $\bar{k}(A, \bar{r})$ круг са центром у A, различит од круга k. Нека су $\bar{k}_1' = \varphi_{\bar{k}}(k_1)$ и $\bar{k}_2' = \varphi_{\bar{k}}(k_2)$, а $\bar{a}$ и $\bar{b}$ полупречници кругова $\bar{k}_1'$ и $\bar{k}_2'$.
Како је инверзија инволуција, композиција $\varphi_{\bar{k}} \cdot \varphi_k$ пресликава кругове k_1' и k_2' у кругове $\bar{k}_1'$ и $\bar{k}_2'$. Међутим, испоставља се да је та композиција хомотетија са центром A. Заиста, ако је M произвољна тачка и $M' = \varphi_k(M)$, $\bar{M}' = \varphi_{\bar{k}}(M')$, тада на основу дефиниције инверзије важи

$$A\bar{M}' = \frac{\bar{r}^2}{AM'} = \frac{\bar{r}^2}{\frac{r^2}{AM}} = AM \cdot \frac{\bar{r}^2}{r^2},$$

па је $\varphi_{\bar{k}} \cdot \varphi_k$ хомотетија. Дакле, важи $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{a}{b}$, тј. односи полупречника слика кругова k_1 и k_2 при инверзији φ_k не зависе од избора круга k. $\square$

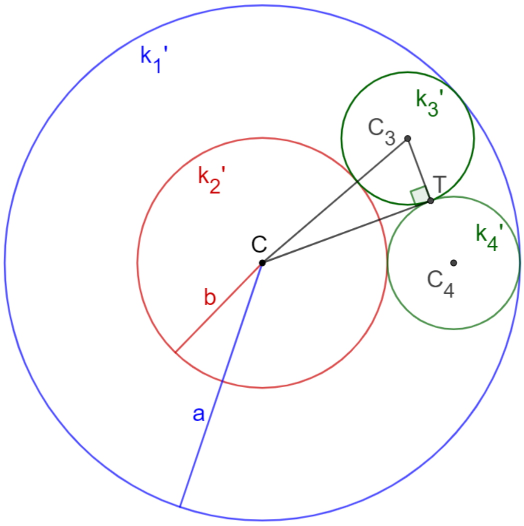


Слика 17: Слика уз Лему 6.1

Какав мора бити однос полупречника a и b кругова k_1' и k_2' да би постојао Штајнеров ланац од n кругова?

Нека је C центар кругова k_1' и k_2', а C_3 и C_4 центри кругова k_3' и k_4' и T додирна тачка кругова k_3' и k_4', тј. средиште дужи C_3C_4. (Слика 18) Троугао CTC_3 је правоугли, па важи

$$\angle CTC_3 = 90^\circ, \;\; C_3T = \frac{a-b}{2}, \;\; CC_3 = \frac{a+b}{2}.$$

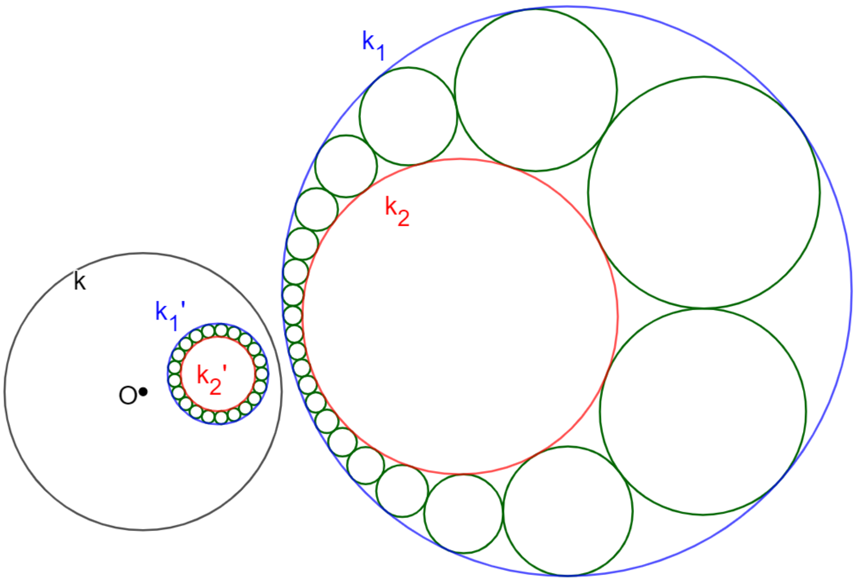


Слика 18

Зато је $\sin\angle TCC_3 = \frac{TC_3}{C_3C} = \frac{a-b}{a+b}$. Штајнеров ланац постоји ако и само ако је $\angle TCC_3 = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$, односно ако важи $\frac{a-b}{a+b} = \sin\frac{\pi}{n}$, тј.

$$b = a\frac{1-\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}. \tag{5}$$

Приметимо да за $n=1$ израз нема смисла, а $n=2$ даје $b=0$. Зато је најмање n за које Штајнеров ланац има смисла $n=3$.



Слика 19: Добијање Штајнеровог ланца

7 Закључак

Читајући рад може се приметити да је акценат био на основама инверзије и тврђењима која воде ка доказу Штајнеровог поризма. Поред Штајнеровог, постоје и неки други интересантни низови кругова који се додирују, као што је Папосов ланац. Више о томе може се пронаћи у чланку [7].

Такође, приказана је примена инверзије на решавање Аполонијевих проблема. Међутим, инверзија има многе друге аспекте и примене. Рецимо, постоји инверзија која слика четири произвољне тачке равни у темена паралелограма, што је предмет матурског рада [3].

Веома је важна и примена инверзије у комплексној геометрији. На пример, обичан инверз комплексног броја је композиција инверзије у односу на јединични круг и рефлексије – видети књигу [6].

Могуће је природно уопштити појам инверзије у односу на круг у равни на појам инверзије у односу на сферу у простору.

Занимљива је и примена инверзије у механици и роботици, рецимо на Поселие-Липкинов механизам – видети [8].

Инверзивна геометрија такође игра важну улогу у дизајнирању оптичких система, на пример за отклањање дисторзије сочива. Такође се користи у компјутерској графици за обраду слика и стварање амбијената у виртуелној реалности.

Листа важнијих аплета

- Инверзија која слика дисјунктне кругове у концентричне, Лема 6, https://www.geogebra.org/classic/xnbygkn2
- Независност односа пречника кругова од инверзије, Лема 7, https://www.geogebra.org/classic/ftseuqpp
- Шести Аполонијев проблем, https://www.geogebra.org/classic/d3rknjxp
- Штајнеров поризам, https://www.geogebra.org/classic/h2qq3xwp

Литература

[1] З. Лучић, *Еуклидска и хиперболичка геометрија,* Графити и Математички факултет, Београд, 1994.

[2] М. Митровић, М. Вељковић, С. Огњановић, Љ. Петковић, Н. Лазаревић, *Геометрија за први разред Математичке гимназије,* Круг ДОО, Београд, 2013.

[3] J. Илић, *Матурски рад - Кружни праменови у инверзивној геометрији*, Математичка гимназија, Београд, 2019.

[4] Д. Браловић, *Матурски рад - Инверзија,* Математичка гимназија, Београд, 2015.

[5] I. E. Leonard, J. E. Lewis, A. C. F. Liu, G. W. Tokarsky, *Classical Geometry,* Wiley, 2014.

[6] D. A. Brannan, M. F. Esplen, J. J. Gray, *Geometry,* Cambridge University Press, 2012.

[7] H. P. Boas, *Reflections on the Arbelos,* The American Mathematical Monthly, Vol.113, No.3 (236 - 249), 2006.

[8] D. W. Henderson, D. Taimiņa, *Experiencing Geometry: Euclidean and Non-Euclidean with History,* Books By Independent Authors, 2020.