Математичка гимназија

Матурски рад
из математике

Планарни графови и бојење

Ученик
Мина Мијатовић, IVe

Ментор
др Соња Чукић

Београд, јун 2024. године

Садржај

1

Уводни појмови

Прво ћемо увести неке основне појмове теорије графова.

Дефиниција 1.1. *Прост граф* G је уређен пар (V, E), где је V коначан скуп *чворова*, а E скуп *грана*, тј. неуређених парова различитих чворова из V. *Ред графа* је број елемената скупа V и означавамо га са $|G|$. За чворове u и v кажемо да су *суседни* ако су повезани граном. Грану $\{u, v\}$ пишемо uv. За грану uv *крајњи чворови* су u и v. Две гране су *суседне* ако имају заједнички крајњи чвор. Грана и њен крајњи чвор су *инцидентни*.

У већем делу овог рада се бавимо простим графовима, па ћемо их једноставно звати графовима, а нагласићемо када дозвољавамо више грана између два иста чвора или грану која повезује чвор са самим собом.

Дефиниција 1.2. *Степен чвора* v је број чворова који су суседни чвору v и означавамо га са $d(v)$.

Дефиниција 1.3. Граф је k*-регуларан* ако је степен сваког његовог чвора тачно k. Специјално, 3-регуларан граф често зовемо *кубним* графом.

Дефиниција 1.4. Графови $G(V, E)$ и $G'(V', E')$ су *изоморфни* ако постоји бијекција $\phi \colon V \to V'$ таква да $xy \in E$ ако и само ако $\phi(x)\phi(y) \in E'$.

Дефиниција 1.5. Граф $G'(V', E')$ је *подграф* графа $G(V, E)$ ако је $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Кажемо да G садржи G'. Ако E' садржи све гране из E које спајају два чвора из V', онда је G' *индукован* скупом V' и G' је *индукован подграф* графа G.

Дефиниција 1.6. *Шетња* W је низ $x_0, e_1, x_1, e_2, \ldots, e_l, x_l$, где је $e_i = x_{i-1}x_i$, за свако $1 \leqslant i \leqslant l$. Кажемо да је W x_0–x_l шетња и означавамо је са $x_0x_1 \ldots x_l$. *Дужина* шетње W је l.

Дефиниција 1.7. *Пут* је шетња $x_0 x_1 \dots x_l$ у којој су $x_0, x_1, \dots, x_l$ међусобно различити.

Дефиниција 1.8. *Циклус* је шетња $x_0 x_1 \dots x_l$ где је $l \geqslant 3$ и где су $x_1, x_2, \dots, x_l$ међусобно различити и $x_0 = x_l$. Граф који је циклус дужине n означавамо са C_n. Специјално, циклус C_3 често зовемо *троугао*.

Дефиниција 1.9. Граф $G(V, E)$ је *комплетан* ако су свака два чвора из V повезана граном. Комплетан граф са n чворова означавамо са K_n.

Дефиниција 1.10. Граф $G(V, E)$ је *бипартитиван са класама* V_1 и V_2 ако $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ и свака грана спаја неки чвор из V_1 са неким чвором из V_2.

Дефиниција 1.11. *Комплетан бипартитиван* граф је бипартитиван граф са класама V_1 и V_2 где је сваки чвор из V_1 спојен са сваким чвором из V_2. Ако је $|V_1| = n$ и $|V_2| = m$, комплетан бипартитиван граф означавамо са $K_{n,m}$.

Дефиниција 1.12. Граф $G(V, E)$ је *повезан* ако постоји пут између било која два различита чвора из V. Максималан повезан подграф графа G је *компонента* графа G.

Дефиниција 1.13. Граф је *стабло* ако је повезан и не садржи циклус.

Дефиниција 1.14. Грана је *мост* ако се њеним брисањем повећава број компоненти графа.

Дефиниција 1.15. *Унија графова* $G_1, \dots, G_k$, $G_1 \cup \ldots \cup G_k$, је граф са скупом чворова $\bigcup_{i=1}^{k} V(G_i)$ и скупом грана $\bigcup_{i=1}^{k} E(G_i)$.

Сада ћемо доказати неколико једноставних тврђења која ћемо касније користити.

Лема 1.1. За сваки граф $G(V, E)$ важи $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Доказ. Сума $S = \sum_{v \in V} d(v)$ броји колико је пута сваки чвор крајњи чвор неке гране. Пошто свака грана има тачно два крајња чвора, $S = 2|E|$. □

Лема 1.2. Свако стабло садржи чвор степена 1.

Доказ. Нека је S стабло и нека је $P = x_1 \dots x_l$ најдужи пут у S. Ако $d(x_l) \neq 1$, онда x_l, поред x_{l-1}, има суседа y. Пошто је пут P максималне дужине, P садржи y, али онда S садржи циклус, што је немогуће. Дакле, $d(x_l) = 1$. □

Лема 1.3. Ако је G стабло и $|V(G)| = n$, онда је $|E(G)| = n - 1$.

Доказ. Доказујемо индукцијом по n. Ако стабло има 1 чвор, онда оно нема ниједну грану.

Претпоставимо сада да тврђење важи за стабла која имају $n-1$ чвор, $n > 1$ и нека је G стабло са n чворова. По претходној леми, G садржи чвор x степена 1. Брисањем x из G остаје нам стабло са $n - 1$ чворова које по индуктивној хипотези има $n - 2$ гране. Пошто је $d(x) = 1$, обрисали смо само једну грану, па враћањем чвора x добијамо да је $|E(G)| = n - 1$. □

Лема 1.4. Граф је унија циклуса са међусобно дисјунктним скуповима грана ако и само ако је сваки чвор парног степена.

Доказ. Ако је граф унија циклуса са међусобно дисјунктним скуповима грана, онда је чвор који је садржан у k циклуса степена $2k$. Сваки чвор припада неком циклусу, па је сваки чвор парног степена.

Претпоставимо сада да је сваки чвор графа G парног степена. Доказаћемо тврђење индукцијом по $m = |E(G)|$. Не постоји граф чији су сви степени парни, а који има тачно једну или две гране. Ако је $m = 3$, онда је $G = C_3$.

Претпоставимо сада да тврђење важи за све овакве графове који имају мање од m грана, $m > 3$ и нека је $|E(G)| = m$. По леми 1.2 свако стабло садржи чвор степена 1. Значи ниједна компонента графа G није стабло, па G садржи неки циклус C. У графу $G \setminus C$ сваки чвор је или истог степена као у G или је за 2 мањи, па је сваки чвор парног степена. По индуктивној хипотези, $G \setminus C$ је унија циклуса који су дисјунктни по гранама. Графови $G \setminus C$ и C немају заједничких грана, па кад вратимо C, добијамо да је и G унија циклуса са дисјунктним скуповима грана. □

Лема 1.5. Граф не садржи мост ако и само ако свака његова грана припада неком његовом циклусу.

Доказ. Претпоставимо да граф G не садржи мост и нека је $e = xy$ произвољна грана тог графа. Пошто грана e није мост, када је обришемо и даље постоји пут $x - y$. Тај пут $x - y$ заједно са граном e чини циклус коме грана e припада.

Претпоставимо сада да свака грана графа G припада неком циклусу. Нека је e произвољна грана која припада неком циклусу C. Између свака два чвора циклуса C постоје два пута, од којих један садржи грану e, а други је не садржи. Према томе, ако су нека два чвора графа G повезана, онда постоји и пут између та два чвора који не садржи грану e. Одавде добијамо да граф $G - e$ има исти број компоненти као и граф G, па грана e није мост. □

2

Планарни графови

Сада ћемо се позабавити тиме како „изгледају" графови када се нацртају у равни.

Дефиниција 2.1. Граф је *планаран* ако може да се нацрта у равни тако да се гране не секу, изузев суседних грана које се секу у крајњим чворовима.

Мало прецизније, чворови графа одговарају различитим тачкама у равни, а гране кривама које спајају тачке крајњих чворова грана. Ми ћемо посматрати цртања у којима су гране изломљене линије.

Ако занемаримо те тачке и криве, раван је подељена на области које зовемо *стране* графа. Сваки граф има тачно једну неограничену страну, а све остале су ограничене циклусима графа. Овде се ослањамо на Жорданову теорему, која нам говори да затворена крива у равни без тачака самопресецања дели раван на две области; унутрашњост и спољашњост. Скуп грана који ограничавају страну чине *границу стране*. Пошто циклус раздваја раван, свака грана циклуса је на граници две стране. Кажемо да су две стране *суседне* ако имају заједничку грану на граници.

2.1 Жорданова теорема

Области на које је раван подељена су одређене скуповима тачака на следећи начин: нека је l затворена крива у равни без тачака самопресецања и P и Q тачке у тој равни које не припадају кривој. Ако постоји изломљена линија од P до Q која не сече l, онда P и Q припадају истој области. Иначе, P и Q припадају различитим областима.

Пре доказа теореме, увешћемо *индекс пресецања*, који ћемо користити у њеном доказу. Нека су a и b две дужи у равни такве да ниједна не садржи крајеве друге дужи. Ако се оне секу, писаћемо $I(a, b) = 1$, а ако не $I(a, b) = 0$.

Ако дуж a садржи крај дужи b или обрнуто, $I(a, b)$ није дефинисано. Број $I(a, b)$ зовемо *индексом пресецања.*

Нека су $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ два скупа дужи у равни тако да је $I(x_i, y_j)$ дефинисано за свако $i \in [n], j \in [m]$. Ако је $\sum_{i,j} I(x_i, y_j)$ непарна, $I(X, Y) = 1$, иначе $I(X, Y) = 0$. Прво ћемо пронаћи индекс пресецања два многоугла који немају тачке самопресецања (скупови дужи су одређени страницама многоугла).

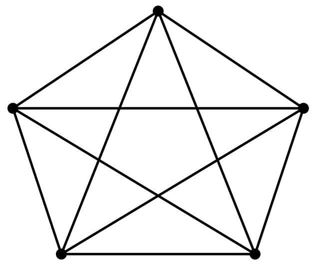
Теорема 2.1. Нека су X и Y два многоугла без тачака самопресецања. Тада је њихов индекс пресецања $I(X, Y) = 0$.

Доказ. Скупове X и Y можемо да схватимо као циклусе који су нацртани као планарни графови. Идеја је да транслирамо X тако да не сече Y и да видимо како се при тој транслацији мења $I(X, Y)$. Малим померањем чворова тако да се $I(X, Y)$ не промени, можемо да постигнемо распоред у коме ниједна грана циклуса X није паралелна ниједној грани циклуса Y. Нека је ℓ права која није паралелна ниједној правој која спаја чвор из $V(X)$ са чвором из $V(Y)$. Посматрамо транслацију циклуса X паралелну правој ℓ. Вредност $I(X, Y)$ може да се промени када чвор из X пређе преко гране из Y или када грана из X пређе преко чвора из Y. Чвор из X не може прећи преко чвора из Y због избора праве ℓ. Нека је y произвољан чвор из Y преко кога пређе грана e из X и нека су a и b гране из Y са крајњим чвором y. Пре преласка преко y, e може да сече и a и b, тачно један од a и b или ни a ни b. Онда након преласка, e не сече ни a ни b, тачно један од b и a или и a и b, редом. У сва три случаја парност броја тачака пресецања се није променила, па се ни индекс пресецања $I(X, Y)$ није променио. Слично закључујемо да се $I(X, Y)$ не промени ни када чвор из X пређе преко гране из Y. Значи $I(X, Y)$ је исти у току целе транслације, тј. на почетку је исти као на крају. На крају се X и Y не секу, па увек важи $I(X, Y) = 0$. $\square$

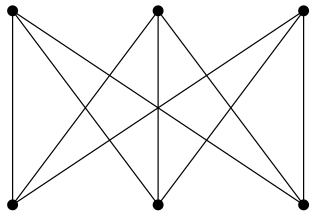
Испитајмо сада планарност неких графова применом индекса пресецања.

Пример 1. Граф K_5 није планаран.

Доказ. Посматрамо произвољно цртање графа K_5 у равни, коме су све гране изломљене линије и нека су $m_1, \ldots, m_5$ чворови. Означимо са J суму индекса пресецања по свим неуређеним паровима несуседних грана mod 2. Ако би K_5 био планаран граф, било би $J = 0$. Значи, довољно је да докажемо да је $J = 1$. Претпоставимо да смо грану $m_1 m_2$ заменили неком другом изломљеном линијом која са претходном нема заједничких тачака осим m_1 и m_2. Нека је x првобитна изломљена линија која је спајала m_1 и m_2, а x' нова. Те две линије заједно чине многоугао X који нема тачака самопресецања. Несуседне грани $m_1 m_2$ су $m_3 m_4, m_3 m_5$ и $m_4 m_5$. Чворови m_3, m_4, m_5 заједно са гранама



Слика 2.1. K_5



Слика 2.2. $K_{3,3}$

m_3m_4, m_3m_5 и m_4m_5 чине многоугао Y. Ако неке две од те три гране не можемо нацртати тако да се међусобно не секу, онда одмах добијамо да K_5 није планаран. Ако је многоугао Y без тачака самопресецања, по теореми 2.1, индекс пресецања многоуглова X и Y је 0. Следи да су $I(x, Y)$ и $I(x', Y)$ исте парности, па J остаје исто при замени x са x'. Значи да је за свако цртање графа K_5, вредност J иста, јер од произвољног цртања можемо стићи до произвољног цртања редом мењајући гране. Са слике 2.1 видимо да K_5 можемо нацртати са непарним бројем пресецања, па је $J = 1$, па одатле K_5 није планаран. $\triangle$

Пример 2. Граф $K_{3,3}$ није планаран.

Доказ. Посматрамо произвољно цртање у коме m_1, m_3, m_5 чине једну класу чворова, а m_2, m_4, m_6 другу. Слично као малопре, посматрамо грану m_1m_2 и циклус $m_3m_4m_5m_6$ и закључујемо да J не зависи од тога како смо нацртали граф. Пошто $K_{3,3}$ можемо нацртати са непарним бројем пресецања (слика 2.2), он није планаран. $\triangle$

Сада ћемо доказати Жорданову теорему. Она важи за произвољну затворену криву која нема тачака самопресецања. Ми ћемо доказати поједностављену верзију у којој је та крива многоугао.

Теорема 2.2 (Жорданова)**.** Многоугао у равни без тачака самопресецања дели раван на две области.

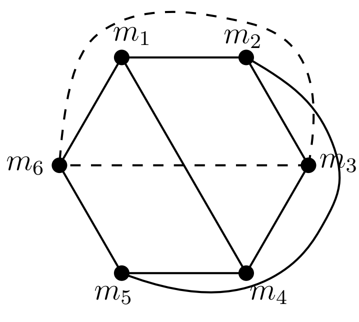
Доказ. У овом доказу када кажемо многоугао подразумевамо да је он без тачака самопресецања. Нека су $b_1, b_2, \ldots, b_n$ странице произвољног многоугла l. Узмимо произвољну дуж која сече b_1 и на њој две тачке P и P' на једнаком растојању од b_1 и са различитих страна. Конструишемо дуж из P, паралелну са b_1, до тачке њеног пресека са симетралом угла између b_1 и b_2. Из те тачке пресека конструишемо дуж паралелну са b_2 до тачке њеног пресека са симетралом угла између b_2 и b_3, итд. Овако добијамо изломљену линију x_1 чије су странице на једнаком растојању од одговарајућих страница многоугла l и паралелне њима. Ако је тачка P довољно близу b_1, онда x_1 не сече l и након што једном прође дуж l стиже до P или P'. Ако x_1 стиже до P', онда x_1 заједно са дужи PP' чини многоугао који са l има тачно једну тачку пресека што је немогуће по теореми 2.1. Значи, x_1 стиже назад до P и нека они чине многоугао x. Аналогно добијамо многоугао x' из тачке P'.

Нека је c произвољна тачка која није на l. Тада c можемо да спојимо са P или P' тако да не пресечемо l. Довољно је да спојимо c са најближом тачком тачки c која је на x или x', а та тачка је спојена са P или P' у зависности од тога да ли је на x или x'.

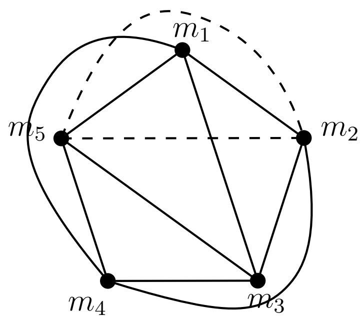
Ако из c постоје две изломљене линије y и z, које се не секу са l, такве да y садржи P, а z P', онда y, z и дуж PP' чине многоугао који има тачно једну тачку пресека са l, што је немогуће.

Нека су сада U и V скупови тачака које можемо спојити са P и P' редом, тако да не пресечемо l. Скупови U и V су дисјунктни. Ако тачке c_1 и c_2 припадају истој области, на пример U, онда постоје изломљене линије које спајају c_1 и c_2 са P и не секу се са l. Њихова унија је тада изломљена линија која повезује c_1 и c_2 и не сече l. Ако c_1 и c_2 припадају различитим областима, онда оне не могу бити повезане многоугаоном линијом која не сече l, јер би као малопре постојао многоугао који би секао l у тачно једној тачки. Дакле, две области на које l дели раван су одређене скуповима U и V. □

Докажимо сада мало другачије и можда интуитивније да графови K_5 и $K_{3,3}$ нису планарни.



Слика 2.3. $K_{3,3}$



Слика 2.4. K_5

Пример 3. Граф $K_{3,3}$ није планаран.

Доказ. Приметимо да $K_{3,3}$ садржи циклус који садржи све чворове графа. Прво нацртамо тај циклус M и чворове $m_1, \dots, m_6$ (слика 2.3). Треба да додамо још гране m_1m_4, m_2m_5, m_3m_6. Пошто M раздваја раван, ове три гране су или унутар или изван M. Нека је m_1m_4 унутар M (ако је изван M ради се исто). Тада је унутар M, m_2 раздвојено од m_5 граном m_1m_4, па m_2m_5 цртамо изван M. Онда је m_3 унутар M раздвојено од m_6 граном m_1m_4, а изван M граном m_2m_5, па не можемо нацртати све гране без пресецања. △

Пример 4. Граф K_5 није планаран.

Доказ. Као и $K_{3,3}$, и K_5 садржи циклус који садржи све чворове графа (слика 2.4). Слично као малопре, ако m_1m_3 нацртамо унутар, m_2m_4 морамо ван, па m_3m_5 морамо унутар и m_4m_1 ван. Остаје нам грана m_2m_5 коју не можемо нацртати ни унутар ни ван. △

2.2 Ојлерова формула

Једна од карактеристика планарних графова је Ојлерова формула која повезује број чворова, грана и страна. Она нам такође говори да је број страна константан, тј. независтан од тога како смо нацртали граф.

Теорема 2.3 (Ојлерова формула)**.** Ако повезан планаран граф G има n чворова, m грана и f страна, онда је $n - m + f = 2$.

Доказ. Доказаћемо индукцијом по f. Ако је $f = 1$, онда G не садржи циклус, па је G стабло и тврђење важи по леми 1.3.

Претпоставимо сада да је $f > 1$ и да тврђење важи за мање вредности f. Нека је e грана произвољног циклуса графа G. Пошто циклус раздваја раван, e је на граници две стране, рецимо S и T. Избацивањем гране e из графа G добијамо планаран граф G' у коме S и T чине једну страну, а све остале стране су исте као у G. Значи, ако су n', m' и f' број чворова, грана и страна графа G' редом, онда је $n' = n$, $m' = m - 1$ и $f' = f - 1$. По индуктивној хипотези закључујемо $n - m + f = n' - m' + f' = 2$. □

Сада ћемо одредити колико највише грана може да има планаран граф. Посматрамо планаран граф у коме су све стране троуглови. Такав граф зовемо *триангулација*. Ако хоћемо да додамо грану овом графу тако да он остане планаран, њени крајњи чворови морају да припадају граници исте стране да не би дошло до нарушења планарности. Пошто су стране троуглови, није могуће додати грану која је различита од свих које су већ у графу. Закључујемо да, за фиксиран број чворова, триангулације имају максималан број грана. Ако покажемо да за триангулацију G са n чворова и m грана важи неко горње ограничење за m, онда то важи и за било који други граф са n чворова јер се он добија брисањем грана из G. Нека граф G има f страна. Пошто свака страна има 3 гране на граници, а свака грана је на граници 2 стране, $2m = 3f$. Из Ојлерове формуле сада $2 = n - m + f = n - m + \frac{2}{3}m = n - \frac{1}{3}m$, а одатле је $m = 3n - 6$. Закључујемо да за сваки планаран граф са бар 3 чвора важи

$$m \leqslant 3n - 6 \tag{2.1}$$

и да се једнакост достиже за триангулације. Ово нам даје једноставан начин да утврдимо да неки графови нису планарни.

Пример 5. Граф K_n није планаран за свако $n \geqslant 5$.

Доказ. Граф K_n има n чворова и $\binom{n}{2}$ грана. Ако би K_n био планаран, важило би $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leqslant 3n - 6$ што је еквивалентно са $(n-3)(n-4) \leqslant 0$, што не важи за $n \geqslant 5$. △

Посматрајмо сада граф $K_{3,3}$ који има 6 чворова и 9 грана. Пошто важи да је $9 \leqslant 3 \cdot 6 - 6$, одавде не можемо закључити да $K_{3,3}$ није планаран. Испоставља се да горње ограничење за број грана можемо ојачати ако узмемо у обзир дужину најкраћег циклуса у графу. Важи следећа теорема.

Теорема 2.4. Нека је G планаран граф са $n \geqslant 3$ чворова и m грана, који није стабло и нека је дужина најкраћег циклуса бар g. Тада је $m \leqslant \dfrac{g}{g-2}(n-2)$.

Доказ. Пошто је дужина најкраћег циклуса бар g, $n \geqslant g$. Ако је $n = g$, G је циклус са $m = g$ грана, па важи $m \leqslant \frac{g}{g-2}(n-2)$.

Претпоставимо да тврђење важи за графове реда мањег од n. Без умањења општости можемо претпоставити да је граф G повезан. Неповезане графове посматрамо као унију повезаних, па сабирањем неједнакости за повезане добијамо неједнакост за неповезан.

Ако G садржи мост e, онда је граф $G - e$ унија два подграфа графа G са дисјунктним скуповима чворова. Нека су то G_1 и G_2. Нека G_i има n_i чворова и m_i грана, $i \in \{1, 2\}$. Ако ни G_1 ни G_2 нису стабло, онда је дужина најкраћег циклуса за оба графа бар g, па по индуктивној хипотези

$$\begin{aligned} m = m_1 + m_2 + 1 &\leqslant \frac{g}{g-2}(n_1 - 2) + \frac{g}{g-2}(n_2 - 2) + 1 = \frac{g}{g-2}(n-2) - \frac{g+2}{g-2} \\ &< \frac{g}{g-2}(n-2). \end{aligned}$$

Ако је један од G_1 и G_2 стабло, нека је то G_1, онда је по леми 1.3 $m_1 = n_1 - 1$, па по индуктивној хипотези

$$\begin{aligned} m = m_1 + m_2 + 1 &\leqslant n_1 - 1 + \frac{g}{g-2}(n_2 - 2) + 1 = \frac{g}{g-2}(n-2) - \frac{2}{g-2}n_1 \\ &< \frac{g}{g-2}(n-2). \end{aligned}$$

Не могу оба графа G_1 и G_2 бити стабло, јер је онда и G стабло, а то је супротно претпоставци.

Ако G не садржи мост, нека је f_i број страна које имају тачно i ивица на граници. Свака грана је на граници две стране, па је $2m = \sum_i if_i$. Онда

$$2m = \sum_i if_i \geqslant g \sum_i f_i = gf = g(2 + m - n).$$

Одавде је $m \leqslant \dfrac{g}{g-2}(n-2)$. □

Приметимо да је 2.1 случај када је $g = 3$.

Пример 6. Граф $K_{3,3}$ није планаран.

Доказ. За $K_{3,3}$ $n = 6$, $m = 9$, $g = 4$ и не важи $9 \leqslant \frac{4}{4-2} \cdot (6-2) = 8$, па $K_{3,3}$ није планаран. △

Сваки подскуп планарног графа је планаран граф. Према томе, ако неки граф садржи K_5 или $K_{3,3}$, он не може бити планаран.

Дефиниција 2.2. *Подела гране* uv је замена те гране $u - v$ путем. Граф H је *подела графа* G ако је H добијен поделама неких грана графа G.

Ако је подела графа G планарна, онда је и G планаран. Пут $x - y$ који имамо у подели графа G, где су $x, y \in V(G)$, ће нам бити грана xy у G. Значи да ако граф садржи поделу графа K_5 или $K_{3,3}$, онда он није планаран. Важи и обрат. Ако граф није планаран, онда он садржи поделу графа K_5 или $K_{3,3}$. То је теорема Куратовског коју нећемо доказивати.

2.3 Дуални граф

Увешћемо сада концепт *дуалног графа* који ће нам бити значајан код бојења. Да бисмо то урадили дозволићемо да између два чвора постоји више од једне гране и да постоје *петље*, тј. чворови који су спојени сами са собом. Дуални граф G^* графа G је граф такав да за сваку страну из G постоји чвор из G^*. Два чвора дуалног графа су повезана граном ако су стране које им одговарају суседне. Дуални граф цртамо тако што у унутрашњост сваке стране X из G ставимо чвор x^*. За сваку грану e која је на граници X нацртамо изломљену линију од x^* до било које тачке на e, која не напушта X. Те линије се међусобно не секу и ниједна линија која нема за крајњи чвор x^* не пролази кроз X. Ако су X и Y стране које имају заједничку грану e, онда изломљене линије из x^* и y^* цртамо тако да им је други крај у истој тачки на e, тј. тако да те две линије можемо спојити у једну која ће бити грана у G^*. Видимо да је G^* такође планаран и при оваквом цртању свака грана из G^* сече тачно једну грану из G и обрнуто. Приметимо да вишеструке гране у дуалном графу добијамо када две стране у почетном графу имају више од једне заједничке гране, а да петљу добијамо када почетни граф садржи мост.

Лема 2.1. Ако је граф G повезан, онда је дуал од G^*, граф G^{**}, изоморфан са G.

Доказ. Ако су око чвора x графа G стране $X_1, \ldots, X_k$, онда је $x_1^* \ldots x_k^*$ циклус у G^* који ограничава страну у којој се налази x и ниједан други чвор из G. Значи свака страна из G^* садржи тачно један чвор из G. Свака грана из G сече тачно једну грану из G^*. Одавде је G дуал од G^*, тј. G^{**} је изоморфан са G. □

Претпоставка да је G повезан нам је потребна, јер ако би G био неповезан, неограничена страна графа G^* би садржала више од једног чвора из G.

Лема 2.2. Дуални граф триангулације је (прост) кубни граф без мостова.

Доказ. Нека је G триангулација. Свака страна има 3 гране на граници, па је степен сваког чвора из G^* једнак 3. Пошто је G триангулација, сваке две суседне стране имају само једну заједничку грану, па у G^* немамо вишеструких грана. Ако би G^* имао мост, онда би дуални граф за G^*, што је G, имао петљу, а то није тачно. Дакле, G^* је кубни граф без мостова. □

3

Број пресецања

Све графове, и оне који нису планарни, често желимо да нацртамо у равни. Природно је цртати их са што мање пресецања.

Дефиниција 3.1. *Број пресецања* $cr(G)$ графа G је најмањи број пресецања у планарном цртању графа G.

Јасно је да је $cr(G) = 0$ ако и само ако је G планаран. Следећа теорема нам говори колико барем пресецања морамо имати у цртању произвољног графа.

Теорема 3.1. Нека је G граф са n чворова и m грана. Ако је k највећи број грана у планарном подграфу графа G, онда важи:

(1) $cr(G) \geqslant m - k$,

(2) $cr(G) \geqslant \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2}$.

Доказ. Нека је H планаран подскуп графа G који има највише грана, тј. k грана. Свака од осталих $m-k$ грана мора да сече бар једну грану из H, иначе H нема максималан број грана. Одатле следи $cr(G) \geqslant m - k$.

Посматрајмо сада $G_1 = G \setminus H$. Планаран подскуп графа G_1 има највише k грана, па по (1) важи $cr(G_1) \geqslant |E(G_1)| - k = m - k - k = m - 2k$. Даље посматрамо $G_2 = G_1 \setminus H_1$, где је H_1 планаран подграф од G_1 са највише грана. На исти начин добијамо $cr(G_2) \geqslant m - 3k$. Итерацијом добијамо да је $cr(G_i) \geqslant m - (i+1)k$, где је $G_i = G_{i-1} \setminus H_{i-1}$, а H_{i-1} је планаран подграф од G_{i-1} са највише грана. Сва ова пресецања су међусобно различита, па је $cr(G) \geqslant \sum_{i=1}^{t}(m - ik)$, где је $t = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor$. Вредност ове суме је $mt - k\frac{t(t+1)}{2}$. Да бисмо добили другу неједнакост написаћемо $m = tk + r$, где је $0 \leqslant r < k$. Сада је $t = \frac{m-r}{k}$ и када то уврстимо добијамо

$$cr(G) \geqslant m\frac{m-r}{k} - \frac{m-r}{2}\left(\frac{m-r}{k} + 1\right) = \frac{m-r}{2k}(m+r-k) = \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2} + \frac{r(k-r)}{2k}.$$

Пошто је $r < k$ важи (2). $\square$

Последица 1. Нека је G планаран граф са n чворова и m грана. Тада је $cr(G) \geqslant m - 3n + 6$.

Доказ. Највећи број грана планарног подграфа од G је $3n-6$, па је $k \leqslant 3n-6$. □

Неједнакости које даје ова теорема су јаке ако граф G има „мало" грана. На пример, за потпуне графове из (2) добијамо да је $cr(K_n) \geqslant P(n)$, где је P полином трећег степена, јер је $k = cn$, где је c нека константа. Међутим, за $cr(K_n)$ можемо добити и јачу неједнакост.

Пример 7. За $n \geqslant 5$ важи $cr(K_n) \geqslant \dfrac{1}{5}\dbinom{n}{4}$.

Доказ. Цртање графа K_n садржи n цртања графова K_{n-1}. Свако пресецање је одређено неким двема гранама ab и cd. Неко пресецање је пресецање и у графу K_{n-1}, тј. подграфу који је добијен брисањем једног чвора, ако је обрисан чвор различит од a, b, c, d. Значи да је свако пресецање из K_n садржано у $n-4$ различитих подграфова K_{n-1}. У сваком од K_{n-1} имамо барем $cr(K_{n-1})$ пресецања. Према томе, важи $(n-4)cr(K_n) \geqslant ncr(K_{n-1})$. Ова неједнакост нам је довољна да завршимо индукцијом. Ако је $n = 5$, $cr(K_5) = 1 \geqslant \frac{1}{5}\binom{n}{4}$. Претпоставимо да тврђење важи за $n-1$ где је $n > 5$. Користећи индуктивну хипотезу и претходну неједнакост добијамо

$$cr(K_n) \geqslant \frac{n}{n-4}cr(K_{n-1}) \geqslant \frac{n}{n-4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24} = \frac{1}{5}\binom{n}{4}. \quad \triangle$$

Дајемо и један пример одређивања горњег ограничења за број пресецања. Горње ограничење налазимо тако што пребројимо пресецања у било ком цртању, јер онда тај граф можемо сигурно нацртати са толико пресецања, а можда и мање. Једно горње ограничење за граф са n чворова је $\binom{n}{4}$, јер чворове можемо распоредити на круг и свака 4 чвора доприносе највише једно пресецање.

Пример 8. За граф $K_{m,n}$ важи $cr(K_{m,n}) \leqslant \left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \dfrac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor$.

Доказ. Урадићемо случај када су m и n парни, остали се раде слично. Нека је $m = 2a, n = 2b$. Распоредимо a тачака на позитиван део $x-$осе и a тачака на негативан део $x-$осе. На исти начин распоредимо $2b$ тачака на $y-$осу. Гране нацртамо као дужи. Укупан број пресецања је 4 пута већи од броја пресецања у првом квадранту. Свака четворка тачака, где су две са позитивног дела $x-$осе и две са позитивног дела $y-$осе, одређује тачно један пресек. Овакву четворку бирамо на $\binom{a}{2}\binom{b}{2}$ начина. Према томе,

$$cr(K_{m,n}) \leqslant 4\binom{a}{2}\binom{b}{2} = a(a-1)b(b-1) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \quad \triangle$$

Следећа теорема даје доње ограничење за графове са „много” грана које за водећи члан има cn^4, где је c нека константа. Дајемо два доказа; први је сличан примеру 7, а други користи технике из вероватноће.

Теорема 3.2. Нека је G граф са n чворова и m грана. Ако је $m \geqslant 4n$, онда је $cr(G) \geqslant \dfrac{m^3}{64n^2}$.

Доказ 1. Радимо индукцију по n. Да би било $m \geqslant 4n$, мора важити $4n \leqslant \binom{n}{2}$, тј. $n \geqslant 9$, па нам је база $n = 9$. За $n = 9$, важи $4n = 36 = \binom{n}{2}$, па је $m = 36$. По последици 1, $cr(G) \geqslant m - 3n + 6 = 15 > 9 = \frac{1}{64} \cdot \frac{36^3}{9^2}$.

Претпоставимо сада да тврђење важи за све графове са $n-1$ чворова, за неко $n > 9$, и нека G има n чворова и m грана. Посматрамо цртање графа G са $cr(G)$ тачака пресецања. Свака тачка пресецања се налази у $n-4$ цртања која су добијена тако што обришемо произвољан чвор у цртању G. Након што обришемо чвор v остаје нам цртање графа $G - v$ са бар $cr(G - v)$ тачака пресецања. Следи да је $(n-4)cr(G) \geqslant \sum_{v \in V(G)} cr(G - v)$. По индуктивној хипотези $cr(G - v) \geqslant \frac{1}{64}(m - d(v))^3/(n-1)^2$. Значи важи

$$(n-4)cr(G) \geqslant \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{64} \frac{(m - d(v))^3}{(n-1)^2} = \frac{1}{64(n-1)^2} \sum_{v \in V(G)} (m - d(v))^3.$$

Пошто је функција $f(x) = x^3$ конвексна на $\mathbf{R}^+$, по Јенсеновој неједнакости важи

$$\sum_{v \in V(G)} (m - d(v))^3 \geqslant n \left(\frac{\sum_{v \in V(G)} (m - d(v))}{n} \right)^3 = n \left(\frac{nm - 2m}{n} \right)^3 = \frac{(n-2)^3 m^3}{n^2}.$$

Сада имамо да је

$$(n-4)cr(G) \geqslant \frac{(n-2)^3 m^3}{64(n-1)^2 n^2},$$

тј.

$$cr(G) \geqslant \frac{(n-2)^3 m^3}{64(n-4)(n-1)^2 n^2}.$$

Да бисмо завршили доказ потребно нам је да важи $(n-2)^3 \geqslant (n-1)^2(n-4)$, што је еквивалентно са $3n \geqslant 4$, а то је тачно. $\square$

Доказ 2. Посматрамо цртање графа G са $cr(G)$ пресецања. Бирамо индукован подграф H графа G тако што бирамо чворове који ће припадати скупу $V(H)$ са вероватноћом p независно један од другог, где је p фиксиран број из $(0, 1]$ који ћемо касније одредити. Израчунаћемо очекивани број чворова, грана и пресецања у H. Нека H има N чворова и M грана и нека је C број пресецања грана графа H у цртању графа G које посматрамо ($C \geqslant cr(H)$). Произвољна грана графа G припада графу H ако смо изабрали оба крајња чвора и тачка пресецања графа G постоји и у графу H ако смо изабрали оба крајња чвора обе гране које одређују пресецање. Одавде следи да је $EN = pn, EM = p^2m$ и $EC = p^4cr(G)$. По последици 1 важи $C \geqslant cr(H) \geqslant M - 3N$. Узимајући очекивање обе стране и користећи линеарност очекивања, добијамо $EC \geqslant EM - 3EN$, одакле $p^4cr(G) \geqslant p^2m - 3pn$, тј. $cr(G) \geqslant \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3}$. Да бисмо добили што боље доње ограничење хоћемо да нађемо максимум функције $f(p) = \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3}$ на $(0,1]$. Извод функције f на $(0,1)$ је $f'(p) = -\frac{2m}{p^3} + \frac{9n}{p^4}$ и има нулу у $\frac{9}{2} \cdot \frac{n}{m}$. Међутим ово није увек мање од 1. Ако узмемо $p = 4\frac{n}{m} \leqslant 1$, добијамо

$$cr(G) \geqslant \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3} = \frac{m^3}{16n^2} - \frac{3nm^3}{64n^3} = \frac{1}{64} \cdot \frac{m^3}{n^2}.$$

(За графове за које важи $m \geqslant \frac{9}{2}n$, добија се $cr(G) \geqslant \frac{4}{243} \cdot \frac{m^3}{n^2}$.) □

3.1 Примена у дискретној геометрији

Теорема 3.3 (*Szemerédi–Trotter*)**.** Нека је дато n тачака и m правих у равни. Тада је број инциденција, тј. парова облика (A, ℓ) где је A тачка, а ℓ права и $A \in \ell$, највише $2^{5/3}n^{2/3}m^{2/3} + 4n + m$.

Доказ. Без умањења општости, претпоставимо да свака права садржи барем једну тачку, иначе је можемо обрисати јер не доприноси броју инциденција. Нека је P скуп n тачака, L скуп m правих у равни и нека је број инциденција I. Уводимо граф G са скупом чворова $V(G) = P$, где су $a, b \in P$ суседни ако припадају некој истој правој $\ell \in L$ и ниједна друга тачка из P се не налази на ℓ и између a и b. Распоред тачака и правих одређује цртање графа G у равни, са највише $\binom{m}{2}$ пресецања, јер сваке две праве одређују највише једно пресецање. Права из L која садржи k тачака из P даје $k-1$ грана. Одавде закључујемо да је $|E(G)| = I - m$, јер кад сумирамо број тачака на правој, где је сума по свим правама из L, добијамо баш I. Знамо да је $|V(G)| = n$. Ако је $|E(G)| < 4n$, онда је $I < 4n + m$, па смо добили горње ограничење мање од $2^{5/3}n^{2/3}m^{2/3} + 4n + m$. Ако је $|E(G)| \geqslant 4n$, примењујемо претходну теорему:

$$\frac{m^2}{2} \geqslant \binom{m}{2} \geqslant cr(G) \geqslant \frac{(I-m)^3}{64n^2}.$$

Множећи са $64n^2$ и затим узимајући трећи корен обе стране добијамо да је $I \leqslant 2^{5/3}n^{2/3}m^{2/3} + m < 2^{5/3}n^{2/3}m^{2/3} + 4n + m$. □

Теорема 3.4 (*Spencer–Szemerédi–Trotter*)**.** Нека је дато n тачака у равни. Тада је број јединичних растојања између њих највише $4n^{4/3}$.

Доказ. Можемо претпоставити да је свака тачка на растојању 1 од бар једне друге тачке, иначе ту тачку можемо обрисати. Ако постоје две тачке a и b које су на растојању 1 само једна од друге, онда их можемо померити тако да заједно са још једном тачком буду темена једнакостраничног троугла,тј. да и a и b буду на растојању 1 од бар две тачке. Ако постоји тачка a која је на растојању 1 само од тачке b, а за b постоји још једна тачка c на растојању 1 од b, онда можемо ротирати a око b док не буде на растојању 1 од c. Оваквим померањем парова тачака или само тачака не смањујемо број јединичних растојања, па ако успоставимо горње ограничење које важи за овакав распоред тачака, онда ће оно важити и за почетни.

Нека нам је након свих брисања и померања тачака остао скуп P од n тачака. Нека је C скуп n кругова са центрима у тачкама из P полупречника 1. На сваком кругу имамо барем 2 тачке из P. Нека је број инциденција између C и P једнак I. Тада је I једнак двоструком броју јединичних растојања између тачака из P. Уводимо граф G (који не мора бити прост) са скупом чворова $V(G) = P$ где су $p, q \in P$ суседни ако припадају неком истом кругу из C и ако се на бар једном луку pq тог круга не налази ниједна друга тачка из P. Ако се на неком кругу налазе тачно две тачке онда између њих имамо две гране. Између свих осталих тачака имамо највише једну грану. У графу G онда имамо I грана. За сваки пар тачака између којих су две гране, обришемо једну од њих и тако добијамо прост граф G'. Овако смо обрисали највише половину свих грана из G, па важи $|E(G')| \geqslant |E(G)|/2 = I/2$. Ако је $I/2 < 4n$, онда је $I/2 < 4n^{4/3}$. Ако је $I/2 \geqslant 4n$, онда рачунамо број пресецања. Свака два круга из C се секу у највише две тачке, па је $cr(G') \leqslant 2\binom{n}{2}$. По теореми 3.2

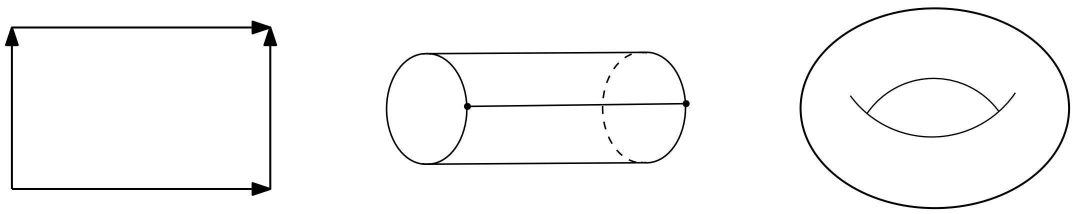
$$n^2 \geqslant 2\binom{n}{2} \geqslant cr(G') \geqslant \frac{(I/2)^3}{64n^2} = \frac{I^3}{2^9 n^2}.$$

Одавде следи да је $I \leqslant 8n^{4/3}$, а пошто је број јединичних растојања једнак $I/2$, он је највише $4n^{4/3}$. □

4

Површи

Шта је торус? Торус можемо добити тако што ротирамо круг који се налази цео изнад $x-$осе око $x-$осе. Другачији начин на који можемо добити торус је лепљењем наспрамних страница правоугаоника са слике 4.1, тако да се стрелице поклапају. Лепљењем „горње” и „доње” странице правоугаоника добијамо цилиндар без база. „Десна” и „лева” страница правоугаоника су сада кружне линије на „десном” и „левом” крају цилиндра, па њиховим лепљењем добијамо торус. Показаћемо како сличним поступком можемо добити цртање графа на торусу.



Слика 4.1

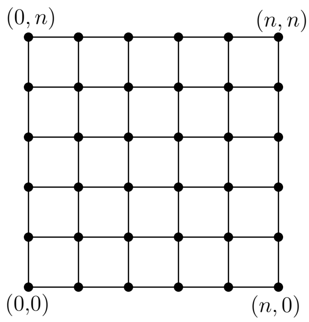
Нека је $G(V, E)$ граф. Дефинишемо G^2 као граф са скупом чворова $V^2 = \{(x, y) \mid x, y \in V\}$ где је $(x, y)(u, v)$ грана ако важи неки од следећих услова: $x = u$ и y и v су суседни или $y = v$ и x и u су суседни.

Узмимо прво да је граф G пут дужине n, означаваћемо $G = P_n$. Нека су чворови тог графа редом обележени са $0, 1, \ldots, n$. Чворови графа P_n^2 ће бити тачке (x, y) где $x, y \in \{0, 1, \ldots, n\}$, при чему је (x_1, y_1) суседно са (x_2, y_2) ако је $x_1 = x_2$ и $|y_1 - y_2| = 1$ или $y_1 = y_2$ и $|x_1 - x_2| = 1$. Граф P_n^2 ће изгледати као $n \times n$ табла са n^2 јединичних квадрата.

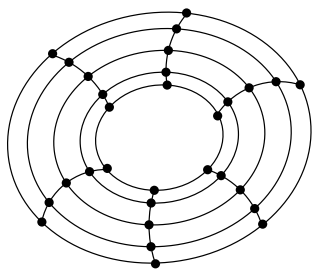
Нека је сада граф G циклус дужине n, $G = C_n$. Обележимо чворове графа C_n редом $0, 1, \ldots, n-1$. Чвор (x_1, y_1) је сада суседан са (x_2, y_2) ако је $x_1 = x_2$ и $|y_1 - y_2| = 1$ или $y_1 = y_2$ и $|x_1 - x_2| = 1$, где разлику посматрамо mod n. Посматрајмо опет P_n^2. Да бисмо добили C_n^2, вишак су нам тачке облика (n, i)

и (i, n) за $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ јер C_n нема чвор n. Исто тако, тачке $(n-1, i)$ и $(i, n-1)$ треба да буду спојене са тачкама $(0, i)$ и $(i, 0)$, редом. Приметимо да су тачке $(n-1, i)$ и $(i, n-1)$ повезане са (n, i) и (i, n) у P_n^2 онако како бисмо желели да буду повезане са $(0, i)$ и $(i, 0)$ у C_n^2. Како бисмо решили ова два проблема идентификоваћемо „горњу” и „доњу”, „леву” и „десну” ивицу табле, тј. тачке (n, i) и (i, n) ћемо идентификовати са тачкама $(0, i)$ и $(i, 0)$, редом за свако $i \in \{1, \ldots n-1\}$. Тачке $(0, 0), (0, n), (n, 0), (n, n)$ постају иста тачка. Као резултат добијамо граф C_n^2 на торусу.

Приметимо још да је C_n^2 нацртан на торусу тако да му се гране међусобно не секу (осим суседних грана у крајњим чворовима). Ако бисмо посматрали C_n^2 у равни, имали бисмо пресецања. Граф C_n^2 има n^2 чворова и $2n^2$ грана и не садржи циклус дужине 3, за $n > 3$. По теореми 2.4, $2n^2 \leqslant \frac{4}{4-2}(n^2-2) = 2n^2-4$, што није тачно, па граф није планаран. Примећујемо да уместо да графове цртамо у равни са што мање пресецања, можемо их цртати на неким другим површима.



Слика 4.2. P_n^2



Слика 4.3. C_n^2 на торусу

Позната нам је Ојлерова формула за планарне графове. Израчунајмо сада колико је $V(C_n^2) - E(C_n^2) + F(C_n^2)$, где је $F(C_n^2)$ број страна графа C_n^2 нацртаног на торусу. Пронађимо прво $F(C_n^2)$. Пошто наспрамне странице правоугаоника лепимо, граф C_n^2 има једну мање страну од графа P_n^2, јер на торусу немамо неограничену страну. Дакле, C_n^2 има n^2 страна. Вредност траженог израза је $n^2 - 2n^2 + n^2$, што је 0.

5

Бојење

Теорема о четири боје је један од првих проблема који је довео до проучавања планарних графова. Зарад њеног доказа, који и даље користи компјутере као помоћ, откривено је не само много особина планарних графова, већ је и целокупна теорија графова развијана.

5.1 Бојење чворова

Дефиниција 5.1. *Бојење* графа G је функција која сваком чвору из $V(G)$ додељује боју тако да су суседни чворови различитих боја.

Дефиниција 5.2. Функција $c\colon V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$, где је $k \in \mathbf{N}$, таква да је $c(u) \neq c(v)$ за све суседне u и v, назива се k*-бојење* графа G. Ако таква функција постоји, кажемо да је G k*-обојив*.

Ако је Δ највећи степен чвора неког графа G, онда нам је довољно $\Delta + 1$ боја да обојимо G. Ово можемо лако доказати индукцијом по реду графа G. Ако G има само један чвор, онда нам је потребна само једна боја. Нека је сада $|G| > 1$ и нека тврђење важи за графове реда $|G| - 1$. Ако је чвор x степена Δ, онда је по индуктивној хипотези граф $G - x$ $(\Delta + 1)$-обојив. За суседе чвора x смо искористили највише Δ различитих боја, па преостаје једна од $\Delta + 1$ боја у коју можемо обојити x.

Број боја у које бојимо граф желимо да буде што је могуће мањи, зато уводимо хроматски број.

Дефиниција 5.3. *Хроматски број* графа G, $\chi(G)$, је најмање k за које је G k-обојив. Кажемо да је G k*-хроматски*.

Желимо да одредимо хроматски број планарног графа. Прво ћемо доказати да је хроматски број планарног графа највише 6, а затим побољшати на највише 5. За доказивање тих теорема потребно нам је да знамо минимални степен чворова у графу.

Лема 5.1. Сваки планаран граф садржи чвор степена највише 5.

Доказ. Претпоставимо супротно, нека је $d(v) \geqslant 6$, за сваки чвор $v \in V(G)$. Ако граф G има n чворова и m грана, онда важи $m = \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d(v) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} 6 = 3n > 3n-6$, што је немогуће по теореми 2.4. □

Теорема 5.1 (О шест боја)**.** Сваки планаран граф је 6-обојив.

Доказ. Користићемо индукцију по реду планарног графа G. Ако је $|G| \leqslant 6$, граф G је 6-обојив јер сваки чвор можемо обојити у различиту боју. Претпоставимо сада да је $|G| > 6$ и да су сви графови реда $|G|-1$ 6-обојиви. Знамо да G садржи чвор x степена највише 5. По индуктивној хипотези, граф $G-x$ је 6-обојив, а пошто је $d(x) \leqslant 5$, постоји једна од 6 боја коју нисмо искористили за бојење суседа чвора x, па x можемо обојити у ту боју. Тако добијамо 6-бојење графа G. □

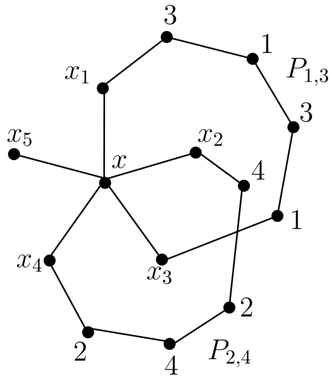
Теорема 5.2 (О пет боја)**.** Сваки планаран граф је 5-обојив.

Доказ. Претпоставимо да тврђење није тачно и нека је граф G минимални 6-хроматски планаран граф. (Под минималним графом сматрамо граф минималног реда.) Знамо да G садржи чвор x степена највише 5. Нека је $H = G-x$. Онда је граф H 5-обојив, рецимо бојама 1, 2, 3, 4, 5. Свака од ових боја мора бити искоришћена за бојење бар једног суседа чвора x, иначе би x могли да обојимо оном бојом која није искоришћена, па би G био 5-обојив. Пошто је $d(x) \leqslant 5$, чвор x има тачно једног суседа у свакој од пет боја. Нека су то чворови $x_1, \ldots, x_5$ који су поређани у том редоследу око чвора x и нека је чвор x_i боје i, за $i \in \{1,\ldots,5\}$. Нека је за $i,j \in \{1,\ldots,5\}, i \neq j$, $H(i,j)$ граф индукован свим чворовима боја i и j.

Претпоставимо прво да чворови x_1 и x_3 припадају различитим компонентама графа $H(1,3)$. Ако заменимо боје 1 и 3 у компоненти која садржи x_1, добијамо ново 5-бојење графа H. У оваквом бојењу x_1 и x_3 су боје 3, па боја 1 није искоришћена за бојење ниједног суседа чвора x. Онда x можемо да обојимо у боју 1 и тиме добијамо 5-бојење графа G, што је немогуће.

Пошто чворови x_1 и x_3 припадају истој компоненти графа $H(1,3)$, постоји пут $P_{1,3}$ у H од x_1 до x_3 чији су чворови наизменично боје 1 и 3. Аналогно, постоји пут $P_{2,4}$ у H од x_2 до x_4 чији су чворови наизменично боје 2 и 4. Пошто циклус у графу G, кога чине $xx_1, P_{1,3}, x_3x$, раздваја чворове x_2 и x_4, а путеви $P_{1,3}$ и $P_{2,4}$ не могу имати заједнички чвор, ово је немогуће, јер је G планаран граф.

□



Слика 5.1. Слика уз теорему 5.2

Као што смо на почетку рекли, важи и теорема о четири боје, тј. хроматски број сваког планарног графа је највише 4. Јасно је да се ово не може побољшати јер је $\chi(K_4) = 4$. Овде ћемо се кратко осврнути на идеју доказа. Вратимо се за тренутак на теорему о пет боја. Њу смо доказали на основу следеће две чињенице: минимални 6-хроматски планарни граф не може садржати чвор степена највише 5 и сваки планарни граф садржи такав чвор. Одавде смо закључили да 6-хроматски планарни граф не може да постоји.

Доказ теореме о четири боје има сличну идеју. *Конфигурација* је повезан граф заједно са степенима чворова. Конфигурација је *редуцибилна* ако је ниједан минимални 5-хроматски планаран граф не може садржати. Скуп конфигурација је *незаобилазан* ако сваки планаран граф садржи бар једну конфигурацију из тог скупа. Циљ је пронаћи незаобилазан скуп конфигурација које су редуцибилне. Тако добијамо конфигурације које минимални 5-хроматски планарни граф мора и не сме садржати у исто време. Одавде бисмо закључили да 5-хроматски планарни граф не постоји.

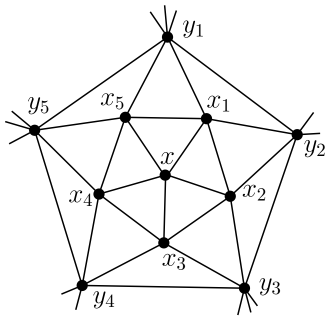
Пример 9. Конфигурација коју чини чвор степена највише 4 је редуцибилна.

Доказ. Ако неки минимални 5-хроматски планарни граф садржи чвор степена мањег од 4, онда обришемо тај чвор, обојимо остатак графа у 4 боје и онда обојимо избачени чвор у једну од преосталих боја. Према томе, конфигурација коју чини чвор степена мањег од 4 јесте редуцибилна.

Претпоставимо да је G минимални 5-хроматски планарни граф и да G садржи чвор x степена 4. Нека су његови суседи чворови x_1, x_2, x_3, x_4, који су поређани у том редоследу око њега. За њих морају бити искоришћене све 4 боје. Нека је чвор x_i обојен у боју i за $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. На исти начин као у доказу теореме о пет боја, добијамо да постоји пут од x_1 до x_3 наизменично боја 1 и 3, као и пут од x_2 до x_4 наизменично боја 2 и 4. Ови путеви се морају сећи, а то није могуће јер је G планаран. $\triangle$

Пример 10. Конфигурација са слике 5.2 је редуцибилна.

Доказ. Претпоставимо да је G минимални 5-хроматски планарни граф који садржи дату конфигурацију. Ако обришемо чворове $x, x_1, \ldots, x_5$, остатак графа је 4-обојив бојама 1, 2, 3, 4. Нека два од чворова $y_1, \ldots, y_5$ морају бити исте боје. То морају бити несуседни чворови. Нека су без умањења општости то y_2 и y_5 и нека су они боје 2. За y_1, y_3, y_4 нам требају још барем две боје. Радимо случај у ком је чвор y_i боје i, $i \in \{1, 3, 4\}$. Ако су нека два од та три чвора исте боје, ради се слично. Обојимо избачене чворове на следећи начин: x_1 у 3, x_2 у 4, x_3 у 1, x_4 у 3, x_5 у 4. Овакво бојење нам оставља слободну боју 2 за чвор x, па граф G није 5-хроматски. △



Слика 5.2. Слика уз пример 10, чворови $y_1, \ldots, y_5$ су произвољног степена већег од 3, а чворови $x, x_1, \ldots x_5$ су степена 5.

Да је неки скуп конфигурација незаобилазан доказујемо тако што сваком чвору доделимо неку *тежину*. За почетак можемо сваком чвору v доделити тежину $6 - d(v)$. Тако је укупна тежина графа са n чворова и m грана $\sum_{v \in V(G)}(6 - d(v)) = 6n - 2m$. Ако посматрамо триангулације, ово даје укупну тежину $6n - 2 \cdot (3n - 6)$, што је 12. Даље „премештамо" тежину по чворовима док не добијемо да граф садржи неку конфигурацију из датог скупа. Овај поступак је познат као „*discharging method*".

Довољно је посматрати триангулације, јер ако за триангулације важи да су 4-обојиве, онда то важи и за све остале планарне графове.

Пример 11. Свака триангулација са минималним степеном 5 садржи чвор степена 5 који је суседан чвору степена 5 или 6.

Доказ. Претпоставимо супротно, нека су суседи сваког чвора степена 5 степена бар 7. Сваком чвору v доделимо тежину $6 - d(v)$. Тако су једини чворови са позитивном тежином они степена 5. Сада сваки чвор степена 5 „даје" по $\frac{1}{5}$ сваком свом суседу. Чворови степена 5 сада имају тежину 0. Посматрамо сада чворове степена бар 7. Пошто у графу немамо два суседна чвора степена 5, сваки чвор v степена бар 7, има највише $\frac{d(v)}{2}$ суседа степена 5. Његова тежина је онда највише

$$6 - d(v) + \frac{d(v)}{2} \cdot \frac{1}{5} = 6 - \frac{9}{10} \cdot d(v) \leqslant 6 - \frac{9}{10} \cdot 7 < 0.$$

Чворови степена 6 немају суседе степена 5, па је њихова тежина остала 0. Укупна тежина је и даље 12, а сваки чвор има тежину највише 0, па је ово контрадикција. △

Оригиналан доказ теореме о четири боје садржао је више од 1900 редуцибилних конфигурација и више од 300 правила за додељивање тежине и спроведен је уз помоћ компјутера. Доказали су је *Kenneth Appel* и *Wolfgang Haken* 1976. године.

5.2 Још један доказ теореме о пет боја

Уместо да сваки чвор буде произвољне боје из скупа $\{1, 2, \ldots, k\}$, можемо да посматрамо бојење у ком боја чвора x мора да припада некој листи боја $L(x)$.

Дефиниција 5.4. Нека је L функција која сваком чвору x графа G додељује скуп $L(x)$ који представља могуће боје за тај чвор. Бојење c графа G такво да $c(x) \in L(x)$, за сваки чвор $x \in V(G)$, назива се L-*бојење* графа G. Ако такво бојење постоји, кажемо да је граф G $L-$*обојив*.

Дефиниција 5.5. *Хроматски број за бојење листом* графа G, $\chi_l(G)$, је најмање $k \in \mathbf{N}$ такво да је, за сваку функцију L за коју је $|L(x)| \geqslant k$, за сваки чвор $x \in V(G)$, граф G $L-$обојив.

Ако је $\chi(G) = k$, онда је k најмањи природан број за који постоји $L-$бојење, када је $L(x) = [k]$, за сваки чвор $x \in V(G)$. Зато је $\chi_l(G) \geqslant k$, тј. $\chi_l(G) \geqslant \chi(G)$.

Сада желимо да видимо шта од резултата за бојење и даље важи за бојење листом. Доказаћемо да је $\chi_l(G) \leqslant 5$ за све планарне графове G. Посматраћемо планарни граф коме је спољашња страна циклус, а све унутрашње троуглови. Такав граф зовемо *скоро-триангулација*. Такође ћемо дозволити да неки чворови имају листе са мање од 5 елемената. Овим претпоставкама заправо доказујемо јаче тврђење од тврђења да је $\chi_l(G) \leqslant 5$ за све планарне графове G.

Теорема 5.3 (*Thomassen*)**.** Нека је G скоро-триангулација са спољашњим циклусом $C = x_1 x_2 \ldots x_k$ и нека је за сваки чвор $x \in V(G)$ $L(x)$ листа боја чвора x, тако да је $L(x_1) = \{1\}$, $L(x_2) = \{2\}$, $|L(x_i)| \geqslant 3$, за свако $3 \leqslant i \leqslant k$ и $|L(x)| \geqslant 5$, за свако $x \in V(G \setminus C)$. Тада је G $L-$обојив.

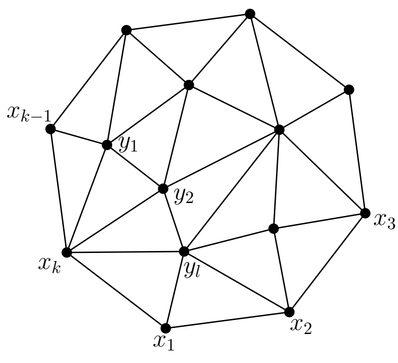
Доказ. Доказ спроводимо индукцијом по реду графа G. Ако је $|G| = 3$, онда је граф G троугао и њега можемо обојити на тражени начин.

Претпоставимо сада да је $|G| > 3$ и нека тврђење важи за све скоро-триангулације реда мањег од $|G|$. Разликујемо два случаја: када G садржи „дијагоналу” из x_k и када је не садржи.

Претпоставимо прво да граф G садржи грану $x_k x_j$, за неко $2 \leqslant j \leqslant k-2$. Онда можемо да применимо индуктивну хипотезу на граф формиран циклусом $x_k x_1 x_2 \dots x_j$ и његовом унутрашњошћу. Након што смо фиксирали боје за x_k и x_j, можемо да применимо индуктивну хипотезу на граф формиран циклусом $x_k x_j x_{j+1} \dots x_{k-1}$ и његовом унутрашњошћу. Овако добијамо бојење графа G листом L.

Претпоставимо сада да G не садржи ниједну грану облика $x_k x_j$, за $2 \leqslant j \leqslant k-2$. Нека су $x_{k-1}, y_1, y_2, \dots, y_l, x_1$ суседни чвору x_k, у овом редоследу. Стране одређене циклусима $x_k x_{k-1} y_1$, $x_k y_1 y_2$, $\dots$, $x_k y_l x_1$ су унутрашње стране графа G. Нека су a и b боје у листи $L(x_k)$ различите од 1. Циљ нам је да искористимо једну од боја a и b за бојење чвора x_k, након што обојимо остатак графа. Због тога желимо да чворови y_i, за свако $1 \leqslant i \leqslant l$, буду боје различите од a и b. Нека је $L'(y_i) = L(y_i) \setminus \{a, b\}$, за свако $1 \leqslant i \leqslant l$ и $L'(x) = L(x)$, за свако $x \notin \{y_1, y_2, \dots, y_l\}$. Онда граф $G' = G - x_k$, са спољашњим циклусом $x_1 x_2 \dots x_{k-1} y_1 y_2 \dots y_l$ задовољава услове индуктивне хипотезе јер је $|L'(y_i)| \geqslant 5 - 2 = 3$, за свако $1 \leqslant i \leqslant l$. Дакле G' можемо обојити листом L'. Сада бојење листом L добијамо тако што бојењу листом L' додамо да чвор x_k има боју a или b тако да чворови x_k и x_{k-1} буду различите боје.

□



Слика 5.3. Други случај у доказу теореме 5.3

Као последицу ове теореме имамо да је $\chi(G) \leqslant 5$, за сваки планаран граф G. За разлику од стандардног бојења, постоји планаран граф H за који је $\chi_l(H) = 5$.

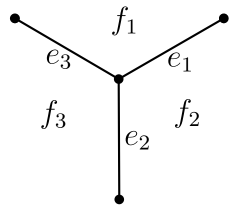
5.3 Еквивалентан облик теореме о четири боје

Бојење грана и страна планарног графа се дефинише на исти начин као бојење чворова. Суседне гране, односно стране, не смеју бити исте боје. Бојење страна можемо да посматрамо као бојење чворова дуалног графа. Због тога нам не одговарају графови који имају мост, јер њихов дуал има петљу. Чвор петље је суседан самом себи, па га не можемо обојити тако да буде испуњен услов да су суседни чворови различитих боја. Ограничићемо се на бојење страна планарних графова без мостова.

Као што смо малопре посматрали графове који су скоро-триангулације, сада ћемо посматрати триангулације. Уместо бојења чворова триангулације можемо да бојимо стране графа који је дуалан триангулацији. Лема 2.2 нам говори да је то кубни граф без мостова. Следећа теорема показује везу између бојења грана и страна таквог графа.

Теорема 5.4 (*Tait*)**.** Гране кубног планарног графа без мостова су 3-обојиве ако и само ако су његове стране 4-обојиве.

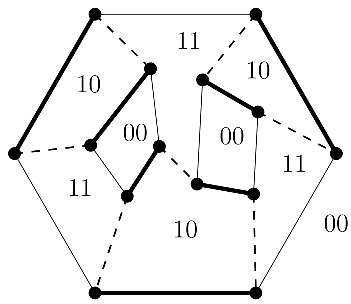
Доказ. Нека је G кубни планарни граф без мостова и претпоставимо да су његове стране 4-обојиве. Обојимо стране графа у боје 00, 01, 10, 11. Гране бојимо на следећи начин: грану која је на граници страна боја b_1 и b_2 обојимо у боју $b_1 + b_2$, где је сабирање по „координатама" и mod 2. Докажимо сада да је ово правилно бојење. Пошто граф G не садржи мост, свака грана је на граници две различите стране, па боја 00 никада није коришћена. Нека гране e_1, e_2, e_3 које су инциденте истом чвору припадају границама страна f_1, f_2, f_3 које су обојене у боје b_1, b_2, b_3 (слика 5.4). Те три боје су међусобно различите јер су сваке две од страна f_1, f_2, f_3 међусобно суседне. Ако су неке две од грана e_1, e_2, e_3 добиле исту боју, онда је $b_i + b_j = b_k + b_i$, где је $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Одавде је $b_j = b_k$, што није могуће.



Слика 5.4

Претпоставимо сада да су гране графа G 3-обојиве користећи боје a, b, c. Нека су E_a, E_b, E_c скупови грана боја a, b, c, редом. Конструисаћемо 4-бојење страна графа G бојама 00, 01, 10, 11. Пошто је G кубни граф, свака боја се појављује код сваког чвора и то тачно једном. Унијом било која два од скупова E_a, E_b, E_c добијамо 2-регуларан граф, па је он, по леми 1.4, унија циклуса са дисјунктним скуповима грана. Нека су H_1 и H_2 подграфови графа G са скуповима грана $E_a \cup E_b$ и $E_b \cup E_c$ редом. Свака страна графова H_1 и H_2 је унија страна графа G. Бојимо на следећи начин: свакој страни графа G додељујемо боју чија прва координата представља парност броја страна графа H_1 које је садрже, а друга координата парност броја страна графа H_2 које је садрже (0 за паран, 1 за непаран).

Сада још треба да утврдимо зашто је ово правилно бојење. Посматрамо две суседне стране графа G, F и F'. По леми 1.5, границе страна F и F' су циклуси, а пошто је граф G кубни, ти циклуси имају тачно једну заједничку грану. Нека је e заједничка грана та два циклуса. Грана e припада циклусу C у барем једном од графова H_1 и H_2 (у оба ако је e боје b). По Жордановој теореми, једна од страна F и F' је унутар C, а друга је ван C. Не могу постојати два циклуса из H_1 или два циклуса из H_2 која раздвајају стране F и F' јер су сви циклуси графова H_1 и H_2 дисјунктни по гранама, а такав циклус мора да садржи грану e. Значи да ће за сваки од осталих циклуса из H_1 и H_2, стране F и F' обе бити или споља или унутра. Онда ће, ако је грана e боје a, c или b, парност броја страна које садрже страну F бити различита од парности броја страна које садрже страну F', у H_1, H_2 или у оба, редом. Одавде су стране F и F' различите боје. $\square$



Слика 5.5. Пример бојења страна, боја a - подебљане линије, боја b - танке линије, боја c - испрекидане линије

Дакле, теорема о четири боје је еквивалентна томе да у сваком кубном планарном графу без мостова, гране можемо обојити користећи 3 боје. Ова теорема је подстакла даље проучавање бојења грана графова.

Литература

[Бол] B. Bollobás, *Modern Graph Theory*, Springer, Њујорк, 1998.

[Вес] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, 2nd ed, Pearson, 2001.

[Так] A. Tucker, *Applied Combinatorics*, 6th ed, Wiley, 2012.

[Кв1] В. Болтянский, *Плоские графы*, Часопис „Квант”, 07/1981.

[Кв2] А. Футер, *Сигналы, графы и короли на торе*, Часопис „Квант”, 07/1977.

[Гео] Материјали са курса: *Geometry: Combinatorics and Algorithms*, https://ti.inf.ethz.ch/ew/courses/Geo20/lecture/gca20-3.pdf