

СВЕТЛОСНА ЛОКАЛИЗАЦИЈА

Милица Јовичић



Математичка гимназија
школа од посебног националног значаја и интереса

Математичка гимназија
Београд, Србија

Јун 2024.

Ментор: Јовица Милисављевић,
Математичка гимназија

Садржај

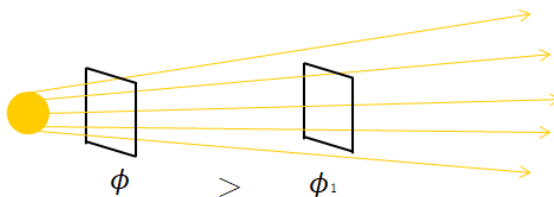
1	Увод	1
1.1	Локализација у простору	1
1.2	Формулација проблема	2
2	Апаратура	3
2.1	Опис апаратуре	3
2.2	Карактеристике фотоотпорника	4
3	Хипотеза	8
4	Методе	9
4.1	Основни апроксимативни метод локализације	9
4.2	Побољшани метод локализације	12
5	Резултати	15
6	Закључак	16

Увод

1.1 Локализација у простору

Светлосна локализација је процес који подразумева одређивање положаја светлосног извора. У великој мери се користи у домену астрономије за проучавање и утврђивање положаја небеских тела која емитују светлост (нпр. звезде), као и у аналитичке сврхе у циљу одређивања састава узорка спектроскопским методама. Овај процес темељи се, превасходно, на природи светлости и светлосног извора, као и на својствима сензора за детекцију исте.

Када посматрамо различите изворе светлости, очигледно је да се сваки од извора карактерише јачином (интензитетом) светлости коју емитује. Уколико претпоставимо да светлосни извор емитује светлост у свима правцима (сферно), приметимо да ће се с повећањем растојања од извора зраци светлости ширити, смањујући флуks (Φ) светлосне енергије (Слика 1.1).



Слика 1.1: Приказ флуksа светлосне енергије

Флукс светлосне енергије представљен је следећом релацијом:

$$\Phi = \frac{P}{4\pi r^2}$$

где су:

- P - снага светлосног извора
- r - растојање од светлосног извора

Осим растојања, на флукс утиче и угао упадне светлости. Сходно томе флукс ће бити највећи када је угао упадне светлости прав, у супротном, вредност флука ће се смањити.

За детекцију светлости користе се фотоелементи, који светлосну енергију претварају у електричну. Светлост при судару са честицом преда део енергије електрону на површини метала, те га на тај начин избаци из првобитног стања. Алберт Ајнштајн је помоћу Планкове једначине одредио да је за избацивање електрона потребна тачно одређена енергија светлости и ту количину назвао квант (порција енергије). Сама појава избијања електрона из материје под утицајем упадне светлости, назива се фотоелектрични ефекат.

У овом пројекту су се за детекцију светлости користили фотоотпорници, чији се рад заснива на способности полупроводника да мењају своју електропроводљивост у зависности од флука светлосне енергије. Суштина процеса је садржана у преласку електрона из валентне у проводну зону под утицајем абсорбоване енергије.

Зависност промене електропроводности фотоотпорника од флука транзитивно иницира преношење зависности флука од растојања и угла на вредности мерења фотоотпорника. Самим тим се из вредности добијених са фотоотпорника могу донети одређени закључци о положају светлосног извора.

1.2 Формулација проблема

У овом раду одређују се координате сијалице у зависности од напона очитаних са 4 фотоотпорника, постављених у теменима правоугаоне мреже (координатног система) на нивелисаном столу. Дакле, на основу зависност електропроводности фотоотпорника од споменутих фактора, требало је увидети правилности између напона калибрисаних на сваком од фотоотпорника, растојања, и угла под којим се светлост простире на површину фотоотпорника, те апроксимативним методама одредити координате сијалице.

Апаратура

2.1 Опис апаратуре

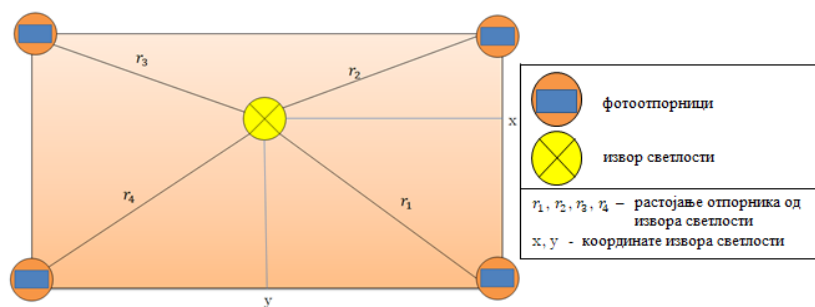
Систем се састоји из 2 главне компоненте:

- 4 фотоотпорника (Слика 2.1: Б) повезаних на ардуино микроконтролер и
- извора светлости, гј. сијалице (Слика 2.1: А).



Слика 2.1: Компоненте система

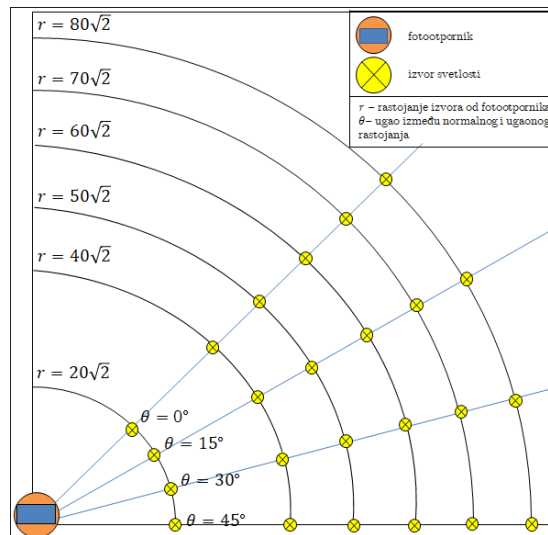
Фотоотпорници се постављени у теменима правоугаоне мреже димензија $(112 \times 145)cm$, а сијалица се налази у равни фотоотпорника и помера по мрежи. Шема система приказана је на Слици 2.2.



Слика 2.2: Шема система

2.2 Карактеристике фотоотпорника

Вредности мерења фотоотпорника могу варирати од једног до другог, у зависности од произвођача и опсега грешке, тј. његове тачности. Стога су у циљу анализе карактеристика фотоотпорника који чине овај систем, извршене калибрације напона у тачкама приказаним на Слици 2.3.



Слика 2.3: Шема мерења

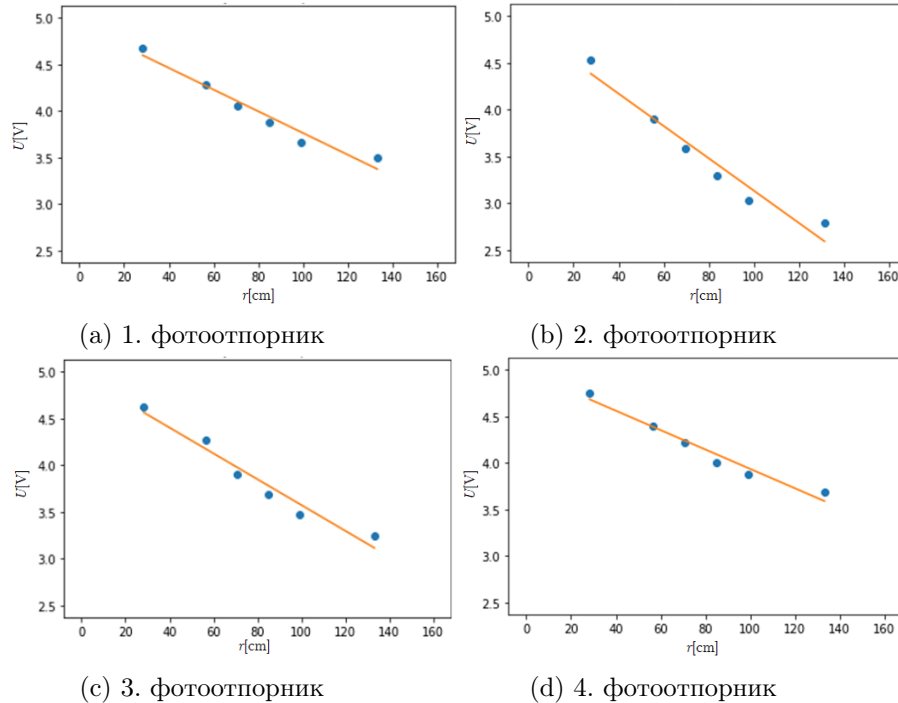
У првом кораку извршене су 4 калибрације. За сваку од њих очитаване су вредности напона на фотоотпорницима, тако да се светлост на површину истих простире под правим углом, у случајевима растојања r [cm] сијалице од фотоотпорника из скула $\{20\sqrt{2}, 40\sqrt{2}, 50\sqrt{2}, 60\sqrt{2}, 70\sqrt{2}, 80\sqrt{2}\}$.

Резултати мерења приказани су у Табели 2.1:

r [cm]	V_1 [V]	V_2 [V]	V_3 [V]	V_4 [V]
$20\sqrt{2}$	4.68	4.54	4.62	4.75
$40\sqrt{2}$	4.28	3.90	4.17	4.40
$50\sqrt{2}$	4.06	3.59	3.90	4.22
$60\sqrt{2}$	3.88	3.29	3.69	4.00
$70\sqrt{2}$	3.66	3.03	3.47	3.88
$80\sqrt{2}$	3.5	2.79	3.25	3.69

Табела 2.1: Вредности напона на фотоотпорницима

Користећи резултате мерења формиране су функције зависности напона од растојања за сваки фотоотпорник, које показују да је наведена зависност линеарна.



Слика 2.4: Линеарна зависност напона од растојања

Линеарна функција се математички може записати у облику $r_i = k_i * u_i + n_i$ за $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, где је k_i коефицијент правца а n_i слободан члан. Одатле је изражена вредност растојања r као:

$$r_i = \frac{U_i - n_i}{k_i} \quad (2.1)$$

Вредности коефицијента правца и слободног члана за сваки фотоотпорник приказане су у Табели 2.2.

	$k[\frac{cm}{V}]$	$n[cm]$
r_1	5.07057	-0.014535
r_2	5.08829	-0.020737
r_3	5.05841	-0.014535
r_4	5.02957	-0.012357

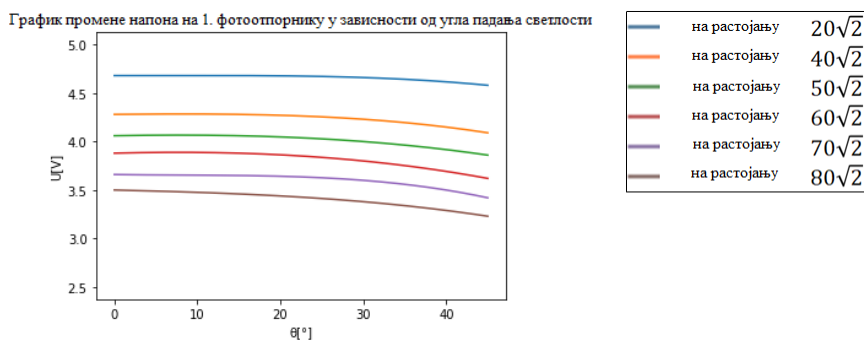
Табела 2.2: Коефицијенти линеарних функција

Помоћу ових вредности можемо одредити приближну вредност растојања извора светлости од фотоотпорника ако се зраци простиру под правим углом на основу вредности очитаног напона.

Мерењем вредности напона у тачкама на константном реалном растојању од фотоотпорника ($r_1 = 20\sqrt{2}\text{cm}$, $r_2 = 40\sqrt{2}\text{cm}$, $r_3 = 50\sqrt{2}\text{cm}$, $r_4 = 60\sqrt{2}\text{cm}$, $r_5 = 70\sqrt{2}\text{cm}$, $r_6 = 80\sqrt{2}\text{cm}$), за различите вредности угла простирања светлости, добијају се вредности приказане у следећим табелама

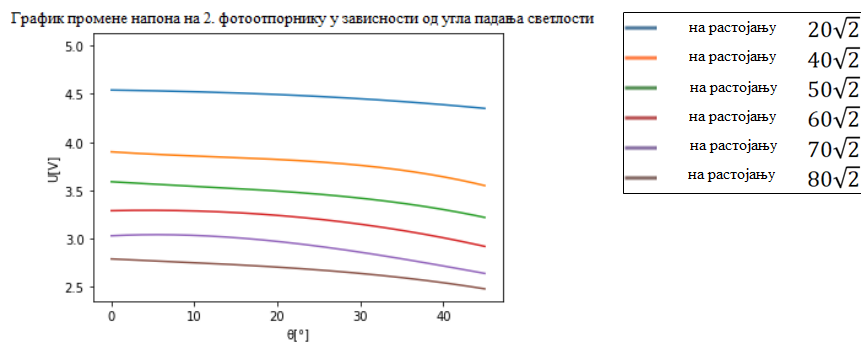
U [V]	r_1 [cm]	r_2 [cm]	r_3 [cm]	r_4 [cm]	r_5 [cm]	r_6 [cm]
$\theta_1 = 0$ [°]	4.68	4.28	4.06	3.88	3.66	3.50
$\theta_2 = 15$ [°]	4.68	4.28	4.06	4.88	3.66	3.46
$\theta_3 = 30$ [°]	4.66	4.23	4.00	3.88	3.60	3.38
$\theta_4 = 45$ [°]	4.58	4.09	3.86	3.62	3.42	3.23

Табела 2.3: Вредности напона на фотоотпорнику 1



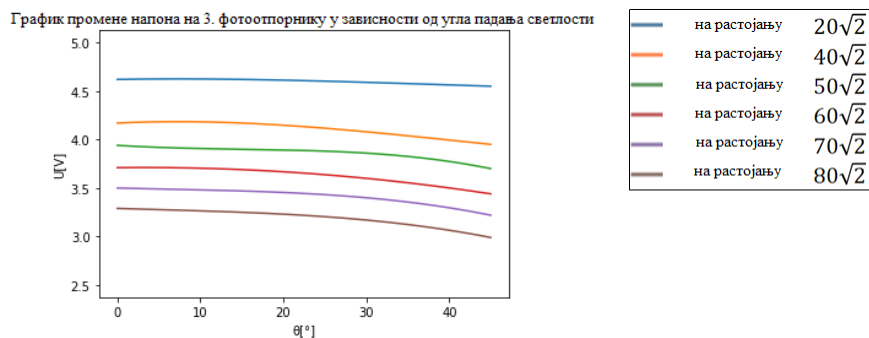
U [V]	r_1 [cm]	r_2 [cm]	r_3 [cm]	r_4 [cm]	r_5 [cm]	r_6 [cm]
$\theta_1 = 0$ [°]	4.54	3.90	3.59	3.29	3.03	2.79
$\theta_2 = 15$ [°]	4.51	3.84	3.52	3.27	3.01	2.73
$\theta_3 = 30$ [°]	4.45	3.76	3.42	3.15	2.86	2.64
$\theta_4 = 45$ [°]	4.35	3.55	3.22	2.92	2.64	2.48

Табела 2.4: Вредности напона на фотоотпорнику 2



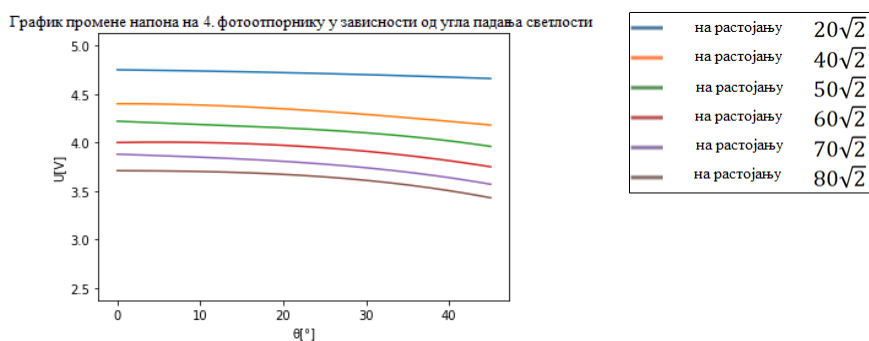
U [V]	r_1 [cm]	r_2 [cm]	r_3 [cm]	r_4 [cm]	r_5 [cm]	r_6 [cm]
$\theta_1 = 0$ [°]	4.62	4.17	3.94	3.71	3.5	3.29
$\theta_2 = 15$ [°]	4.62	4.17	3.90	3.69	3.47	3.25
$\theta_3 = 30$ [°]	4.59	4.08	3.86	3.60	3.40	3.17
$\theta_4 = 45$ [°]	4.55	3.95	3.70	3.44	3.22	2.99

Табела 2.5: Вредности напона на фотоотпорнику 3



U [V]	r_1 [cm]	r_2 [cm]	r_3 [cm]	r_4 [cm]	r_5 [cm]	r_6 [cm]
$\theta_1 = 0$ [°]	4.75	4.40	4.22	4.00	3.88	3.71
$\theta_2 = 15$ [°]	4.73	4.37	4.17	3.99	3.83	3.69
$\theta_3 = 30$ [°]	4.70	4.29	4.10	3.91	3.74	3.61
$\theta_4 = 45$ [°]	4.66	4.18	3.96	3.75	3.57	3.43

Табела 2.6: Вредности напона на фотоотпорнику 4



Из добијених мерења сазнали смо о карактеристикама фотоотпорника и експериментално доказали зависности елетропроводности фотоотпорника од растојања и угла простирања светлости, чије је теоријско објашњење садржано у уводу (Слика 2.4).

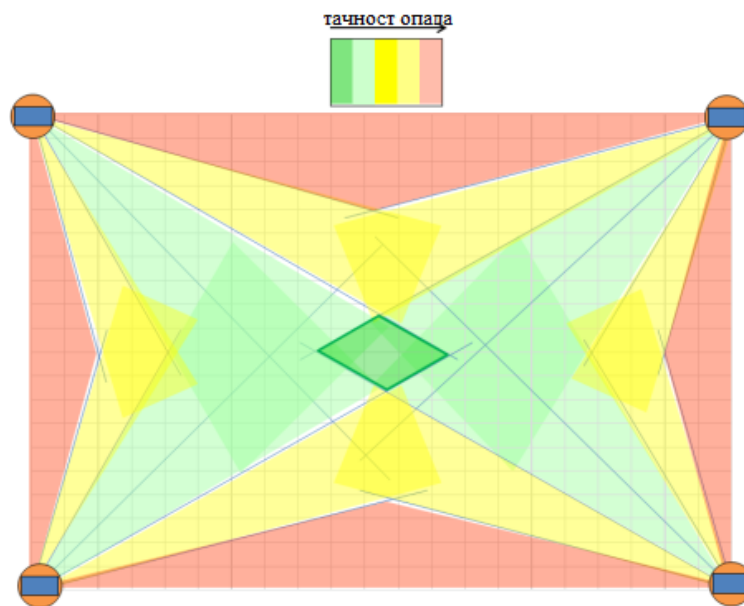
Хипотеза

Анализом мерења напона с променом угла, увидели смо да за:

1. $\theta \in (0, 15)$ вредност напона варира у веома малом опсегу - грешке $(0, 0.05)V$
2. $\theta \in (15, 30)$ вредност напона варира толерантном опсегу - грешке $(0.03, 0.14)V$
3. $\theta \in (30, 45)$ вредност напона варира у великом опсегу - грешке $(0.07, 0.37)V$

Сходно томе, претпостављамо да ћемо за вредност угла отклона $\theta \in (0, 15)$ добити минималне квадратне разлике између реалних и калибрисаних растојања, самим тим и најпрецизније одређен положај тачке, а највеће грешке за $\theta \in (30, 45)$.

Хипреза о расподели грешке:



Методе

4.1 Основни апроксимативни метод локализације

У овом методу локализације коришћене су релације растојања и напона добијене из одговарајућих функција зависности напона од растојања, уз занемаривање утицаја угла простирања светлости на калибрацију.

Алгоритам добијања тражених координата заснива се на систематској претрази тачке чија су растојања од фотоотпорника позната и чије су вредности растојања најприближније калибрисаним.

За потребе спровођења систематске претраге, одабране су 132 тачке на мрежи, познатих координата (x, y) где $x \in \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 112\}$ и $y \in \{0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 145\}$, које су узете за положај светлосног извора при новом сету калибрација. Наиме, мерени су напони на фотоотпорницима за сваку одабрану тачку положаја сијалице. Тако да, у бази података садржане су тачне координате и вредности напона на свим фотоотпорницима за сваку тачку. Алгоритам добијања тражених грешака:

1. Саставља се матрица грешака добијених у једначини растојања.
Створене су 2 петље за пролаз кроз мрежу. Корак итерације је 0,5 cm.
Бројачи у петљама означавају координате у мрежи.
2. За сваку тачку мреже кроз коју се пролази утврђујемо њено Еуклидско растојање од свих фотоотпорника.
Координате фотоотпорника су: $(0,0)$, $(112,0)$, $(112,145)$, $(0,145)$.

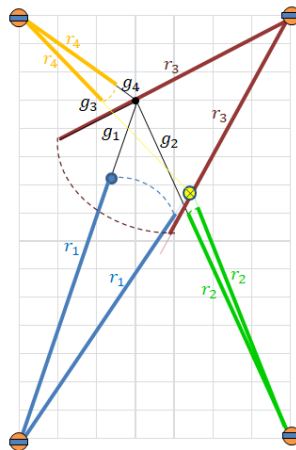
3. Затим се одређује квадратна грешка растојања добијених у функцији од напона:

$$g_i = (r_i - d_i)^2$$

$$g = \sum_{i=1}^4 g_i$$

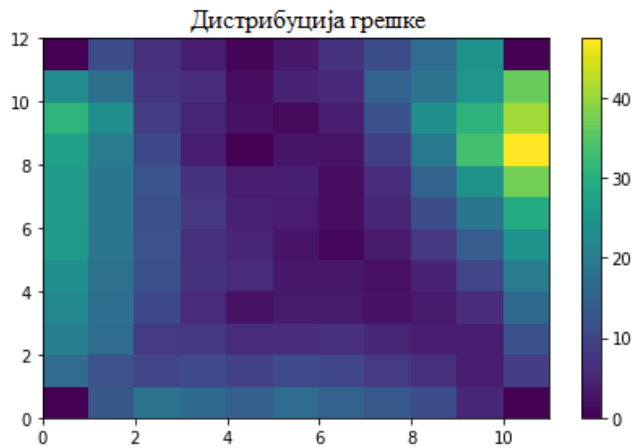
где су:

- d_i - растојања испитиване тачке од сензора
- r_i - калибрисана растојања положаја извора светлости у зависности од очитаних напона
- g - збир квадратних грешака растојања



Слика 4.1: Израчунавање грешке

4. Избором тачке са најмањом збирном грешком g из овако генерисане мреже добијемо калибрисане координате.
5. Рачуном Еуклидског растојања између калибрисане и реалне тачке, добија се низ од 132 грешке, чијим је обликовањем створена матрица димензија 11x12.
Матрица је послужила за приказ расподеле грешака (Слика 4.2).



Слика 4.2: Распоредла грешке

Са графика расподеле грешака уочава се да је прецизност мерења највећа у центру ($g \in (0.5, 10)cm$) средини мреже ($g \in (10, 24)cm$), а најмања у близини ивица мреже ($g \in (24, 58)cm$), чиме је хипотеза оправдана.

Грешка предвиђене тачке креће се у опсегу $(0, 58.5)cm$, а средња вредност грешке износи $11.6cm$.

4.2 Побољшани метод локализације

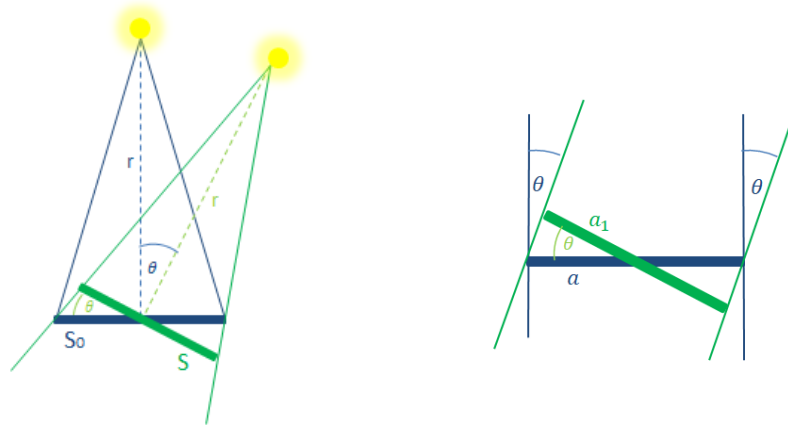
Мерењем је закључено да напон на фотоотпорницима зависи и од угла простирања светлости на површину отпорника. У Табелама 3,4,5 и 6 приказане су вредности напона на сваком од фотоотпорника с променом угла.

У овом одељку ћемо извести зависност промене растојања у зависности од угла простирања светлости.

Означимо са S_0 површину фотоотпорника. Када зраци падају на фотоотпорник под правим углом, фотоотпорник их читава на целој својој површини.

Означимо са n удео површине на коју се простире светлост у сфери када зраци светлости падају нормално на њу, а са r нормално растојање. Тада је:

$$n = \frac{S_0}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{S_0}{r^2}$$



(a) Померање сијалице за угао

(b) Увећани приказ

Слика 4.3: Приказ угла простирања светлости

Нека је n' удео површине на коју се простире светлост у сфери када се извор светлости отклони за угао θ у односу на нормално растојање r (Слика а).

$$n' = \frac{S_0 \cos \theta}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{S_0}{\left(\frac{r}{\sqrt{\cos \theta}}\right)^2}$$

Означимо са r_{ef} ефективну вредност растојања коју добијамо на основу линеарне калибрације напона очитаног на фотоотпорнику уколико се извор светлост налази под углом θ у односу на нормалу.

Како је удео површине на коју се простира светлост у сфери константна вредност, из $n = n'$ и претходних једначина следи:

$$r_{ef} = \frac{r}{\sqrt{\cos \theta}}$$

Израчунавање угла за тачку из мреже потенцијалних, испитиваних тачака:

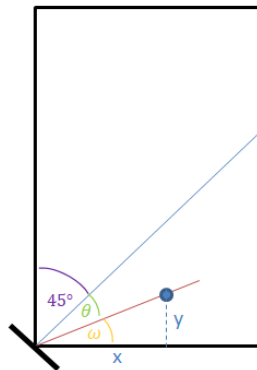
$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) = \cos \theta$$

$$\cos \theta = \cos \frac{\pi}{4} \cos \omega + \sin \frac{\pi}{4} \sin \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega$$

Где се $\cos \omega$ и $\sin \omega$ могу израчунати из вредности реалних координата x и y изабране тачке у којој се налази извор светлости на растојању r под углом θ у односу на координатни почетак $(0,0)$.(Слика 4.4):

$$\cos \omega = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

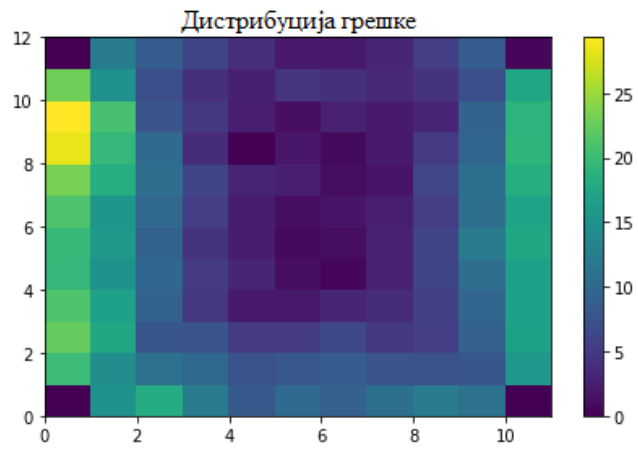
$$\sin \omega = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



Слика 4.4: Приказ углова

Једина разлика у алгоритму одређивања расподеле грешке наведеном у одељку 2.3 је да при генерисању мреже потенцијалних тачака уместо Еуклидског растојања од фоторецептора, за сваку тачку мреже $112 \times 145 \text{ cm}$ рачунамо одговарајуће ефективно растојање које би одговарало напону на фотоотпорнику када би се извор налазио у тој тачки.

Расподела добијених грешака приказана је на Слици 4.5:

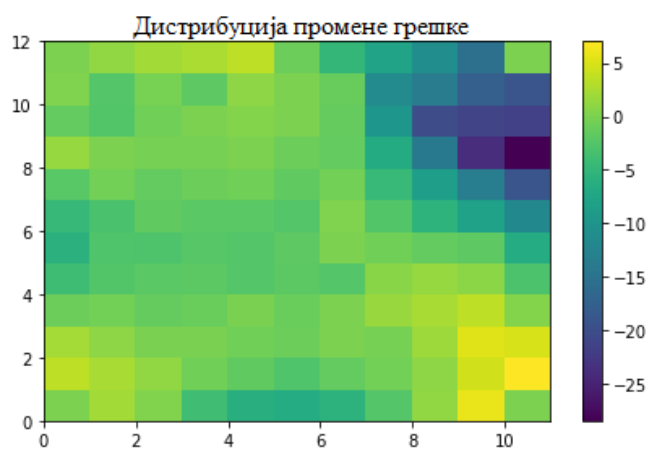


Слика 4.5: Нова расподела грешака

Грешка предвиђене тачке креће се у опсегу $(0, 29.33)cm$, а средња вредност грешке износи $8.68cm$.

Резултати

Упоредивањем вредности грешака добијених калибрисањем без и са узимањем у обзир зависност напона од угла добија се за 3σ мања вредност средње грешке.



Слика 5.1: Расподела смањења грешке

Закључак

Закључујемо да узимање у обзир зависност напона од угла простирања светлости доводи до оптимизације модела и генерисања тачака са већом прецизношћу.

Анализом расподеле грешака увиђамо да је на хоризонталним рубовима грешка оптимална и у интервалу $(0, 6)cm$, док на вертикалним рубовима грешка достиже вредност од $28.39cm$. Разлог томе је недовољан број тачака (вредности) на основу којих је вршена калибрација. Најдаља измерена тачка је на растојању $80\sqrt{2}cm = 113.2cm$, а највеће растојање на табли је дијагонала дужине $183.2cm$. Како са порастом растојања вредност очитаног напона брже опада, за велика растојања калибрација даје вредности веће од реалних, а наша тачна физичка зависност од угла очекује мању вредност од реалне, те су грешке процене веће од оптималних. Овај проблем се лако решава додавањем вредности мерења за растојања $90\sqrt{2}cm$, $100\sqrt{2}cm$, $110\sqrt{2}cm$ и $120\sqrt{2}cm$. Очекивана вредност грешке је у интервалу $(0, 10)cm$ са максималним грешкама на вертикалним рубовима.