

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД
ИЗ ФИЗИКЕ

**r - V критично понашање
наелектрисаних црних рупа**

Ученик
Коста Милошевић, IVд

Ментор
др Бранислав
ЦВЕТКОВИЋ

Београд, 27. мај 2024.

Садржај

1	Увод	1
2	Ван дер Валсов флуид	5
3	Фазни прелази у наелектрисаним AdS простор-временима црних рупа	13
3.1	Наелектрисана AdS црна рупа	13
3.2	Једначина стања	14
3.3	Гибсова слободна енергија	18
3.4	Понашање у близини критичне тачке	22
4	Речник појмова	25
5	Закључак	28
	Литература	28

1

Увод

Термодинамичка својства црних рупа су се проучавала годинама. Током тог времена показало се да простор-времену црних рупа не само да могу да се доделе стандардне термодинамичке променљиве, као што су температура и ентропија, него се такође и показало да поседују богате фазне структуре и испољавају критичне феномене, у потпуној аналогiji са познатим негравитационалним термодинамичким системима на другим местима у природи. Од посебног интересовања је термодинамика црних рупа у присуству негативне космолошке константе. *Асимптотичка AdS* простор-времена црних рупа су описана дуалном термалном теоријом поља. Одговарајући претходном, постоји и микроскопски опис основних степена слободе на располагању. Ова дуалност је недавно била употребљена да проучи понашање кварк-флуон плазми и за квалитативан опис разних феномена кондензоване материје.

Историја проучавања термодинамичких својстава AdS црних рупа почела је исконским радом Хокинга и Пејца, који су демонстрирали постојање извесног фазног прелаза у фазном простору (неротирајуће ненаелектрисане) Шварцшилдове-AdS црне рупе. Од тада наше разумевање фазних прелаза и критичких феномена се проширило на разне компликованије позадине. Изузетно је значајно откриће фазног прелаза првог реда у наелектрисаном (неротирајућем) Рајзнер-Нордштрумовом простор-времену црне рупе. Овај прелаз приказује класично критично понашање и наизглед је *аналоган* течност-гас фазном прелазу Ван дер Валса.

Скорије, идеја о укључивању варијације космолошке константе Λ у првом закону термодинамике црних рупа је придобила растућу пажњу. Од опште релативистичке перспективе, таква варијација је мало непријатна, пошто космолошка константа треба да се третира као фиксирани спољашњи параметар теорије. Штавише, промена вредности Λ у првом закону одговара поређењу

ансамбала црне рупе са различитим асимптотикама. Ово је другачије од стандардних термодинамичких разматрања, где су параметри црних рупа мењани у "фиксираној AdS позадини". Међутим, постоје барем три добра разлога зашто би варијација Λ требала да буде укључена у термодинамичка разматрања:

- i) Смеју се разматрати "фундаменталније" теорије, где физичке константе, попут Јукавиних парова, Њутнове константе, или космолошке константе нису фиксиране априори, него искрсну као вакумске очекиване вредности и стога могу да мењају вредност. У таквом случају природно је укључити варијације ових "константи" у првом закону.
- ii) Прагматичније, у присуству космолошке константе први закон термодинамике црних рупа постаје неконзистентан са Смаровом релацијом (аргумент за скалирање је неисправан) осим у случају да је варијација од Λ укључена у првом закону. Долази до сличне ситуације, на пример за Борн-Инфелдове црне рупе, где варијација максималне јачине поља b мора бити укључена у први закон да би била конзистентна са одговарајућом Смаровом релацијом.
- iii) Када варијација Λ буде укључена у први закон, маса црне рупе M је поистовећена са *енџалијом* пре него са унутрашњом енергијом. Природно је и разматрати променљиву која је термодинамички коњугована са Λ . Пошто Λ одговара притиску, њена коњугована променљива има димензије запремине, карактеристичне за дато простор-време неке црне рупе. Прецизније, користећи геометријске јединице $G_N = \hbar = c = k = 1$, у случају асимптотичке AdS црне рупе у четири димензије, притисак се идентификује као

$$P = -\frac{1}{8\pi}\Lambda = \frac{3}{8\pi}\frac{1}{l^2} \quad (1.1)$$

и одговарајућа "термодинамичка запремина" црне рупе као $V = \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{S, Q_i, J_k}$. У најпростијем случају Рајзнер-Нордштрум-AdS (RN-AdS) црне рупе запремина је дата са

$$V = \frac{4}{3}\pi r_+^3, \quad (1.2)$$

при чему је r_+ радијус хоризонта догађаја црне рупе изражен према "Шварцшилдовим радијалним координатама". Испоставља се да ова запремина изгледа поседује нека универзална својства и да је замишљена да задовољи *обрнућу изоџериметричку неједнакост*. У случају да је тачна, таква неједнакост би могла да ограничи неке процесе у простор-временима црних рупа.

Озбиљно посматрајући ова разматрања, када су притисак и запремина црне рупе идентификовани, можемо наставити да рачунамо разне термодинамичке величине примењујући стандардни термодинамички апарат. На пример, могу се проучавати адијабатско сабијање, специфична топлота на константном притиску, или чак "брзина звука" повезана са црном рупом. Штавише,

ово отвара занимљиву могућност поновног разматрања критичног понашања AdS црних рупа у *проширеном фазном простору*, укључујући притисак и запремину као термодинамичке променљиве. Прецизније, Долан је проучавао $P = P(V, T)$ једначину стања за ротирајућу наелектрисану AdS црну рупу, посматрао је аналогију са Ван дер Валсовим $P - V$ дијаграмом, и одредио њену критичну тачку.

У овом раду истражујемо дубље овај проблем и објашњавамо Доланове резултате. Упрошћења ради, концентрисаћемо се на проучавање $P - V$ критичности (сферних) RN-AdS црних рупа. Наш циљ је да употпунимо идентификацију са течност-гас системом у проширеном фазном простору. За ту сврху, проучавамо понашање Гибсове слободне енергије у ансамблу *фиксираној наелектрисања*. Снабдевени са овим добијамо фазни прелаз у (P, T) -равни, који је стандардан за течност-гас прелазе. Резултати које смо добили имају следеће тумачење - они нису *аналогија*, него пак пореде "исте физичке величине". На пример видимо, као код течност-гас система, да се прелаз дешава у (P, T) -равни и не у (β, Q) -равни. Такође проучавамо и критичне експоненте и показујемо да се поклапају са оним из Ван дер Валсовог система.

Овај папир организован је на следећи начин. У следећој секцији сагледавамо неке основне чињенице о Ван дер Валсовом флуиду и његовим критичним експонентима. У секцији 3 демонстрираћемо аналогно понашање RN-AdS система црне рупе са понашањем Ван дер Валсовог флуида. Специфично, $P - V$ критичност, Гибсову слободну енергију, фазне прелазе првог реда, и понашање у близини критичне тачке су идентификовани течност-гас системом. Секција 5 је посвећена закључцима. Укључујемо и речник појмова који објашњава читаоцу изразе коришћене у тексту.

2

Ван дер Валсов флуид

Ван дер Валсова једначина је популарна модификација затворене форме закона идеалног гаса, која апроксимира понашање реалних флуида, узимајући у обзир ненулту величину молекула и привлачење између њих. Често се користи да би описала основне квалитативне особине течност-гас фазног прелаза. Једначина гласи

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = kT. \quad (2.1)$$

Овде, $v = V/N$ је специфична запремина флуида, P његов притисак, T његова температура, и k је Болцманова константа. Константа $b > 0$ узима у обзир ненулту величину молекула у датом флуиду, док је константа $a > 0$ мера привлачења између њих. Еквивалентно, можемо проширити једначину да бисмо је записали као кубну једначину по v ,

$$Pv^3 - (kT + bP)v^2 + av - ab = 0. \quad (2.2)$$

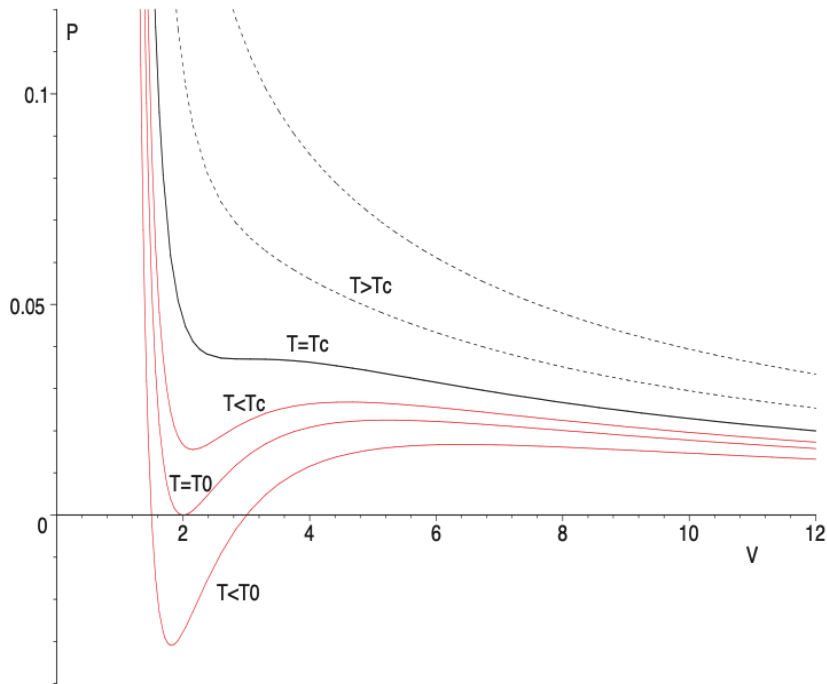
Овакво квалитативно понашање изотерми у $P - V$ дијаграму је приказано на слици 2.1. До *критичке тачке* долази када $P = P(v)$ има тачку превоја, тј.

$$\frac{\partial P}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = 0, \quad (2.3)$$

на критичкој изотерми $T = T_c$.¹ Пишући (2.2) у форми $P_c(v - v_c)^3 = 0$, и упоређујући коефицијенте закључујемо да је

$$kT_c = \frac{8a}{27b}, \quad v_c = 3b, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}. \quad (2.4)$$

¹Опазимо да за $T < T_0 = \frac{1}{4k} \frac{a}{b} = \frac{27}{32} T_c$, део изотерме одговара негативном притиску. Слично случају црне рупе о којем ћемо дискутовати у следећој секцији, ово нема физичког смисла и једном када применимо Максвелов закон једнаких површина, (2.8), ово је замењено одговарајућом изобаром позитивног притиска.



Слика 2.1. $p - V$ дијаграм Ван дер Валсовог флуида. Температура изотерми опада одозго надоле. Две горње испрекидане линије одговарају фази "идеалног гаса" за $T > T_c$, критична изотерма $T = T_c$ је назначена дебелом пуном линијом, доње пуне линије одговарају температурама мањим од критичне температуре; $T = T_0$ изотерма је такође приказана. Константе a и b у (2.1) су намештене да буду једнаке један.

Такође примећујемо да је

$$\frac{P_c v_c}{kT_c} = \frac{3}{8} \quad (2.5)$$

универзални број предвиђен за све флуиде (независно од константи a и b).
Дефинишући

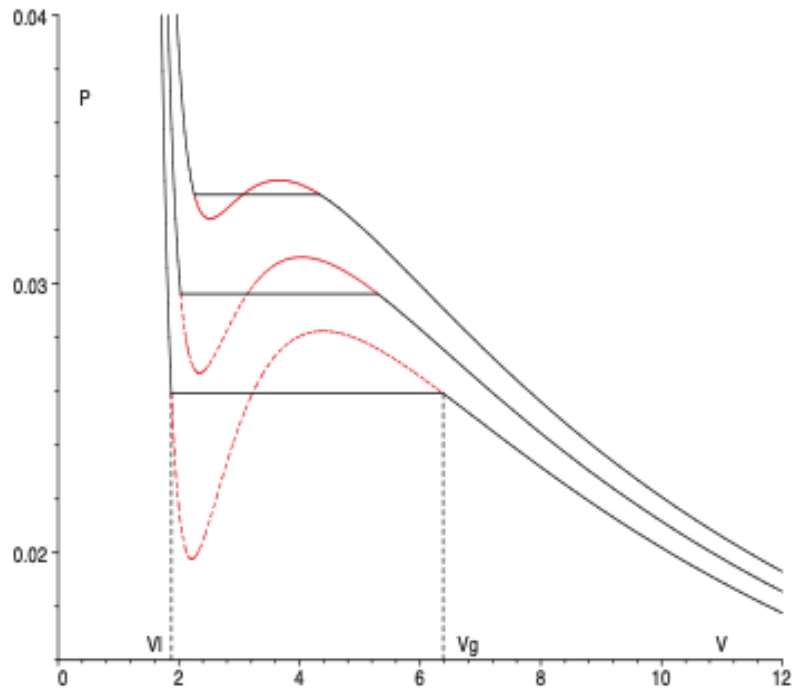
$$p = \frac{P}{P_c}, \quad \nu = \frac{v}{v_c}, \quad \tau = \frac{T}{T_c}, \quad (2.6)$$

добивамо такозвани *закон одговарајућих стања*

$$8\tau = (3\nu - 1) \left(p + \frac{3}{\nu^2} \right). \quad (2.7)$$

Овај закон је универзалан и исправан и под општијим претпоставкама од оригиналног извођења Ван дер Валсове једнакости.

За $T < T_c$ имамо *шесточислених фазних прелаза* у систему. Да бисмо описали



Слика 2.2. Максвелов закон једнаких површина. Део који "осцилује" (тј. непрекидани део) изотерме $T < T_c$ је замењен изобаром, таква да површине изнад и испод изобаре буду једнаке међусобно.

овај фазни прелаз морамо да заменимо "део који осцилује" изотерме изобаром, у складу са *Максвеловим законом једнаких површина*

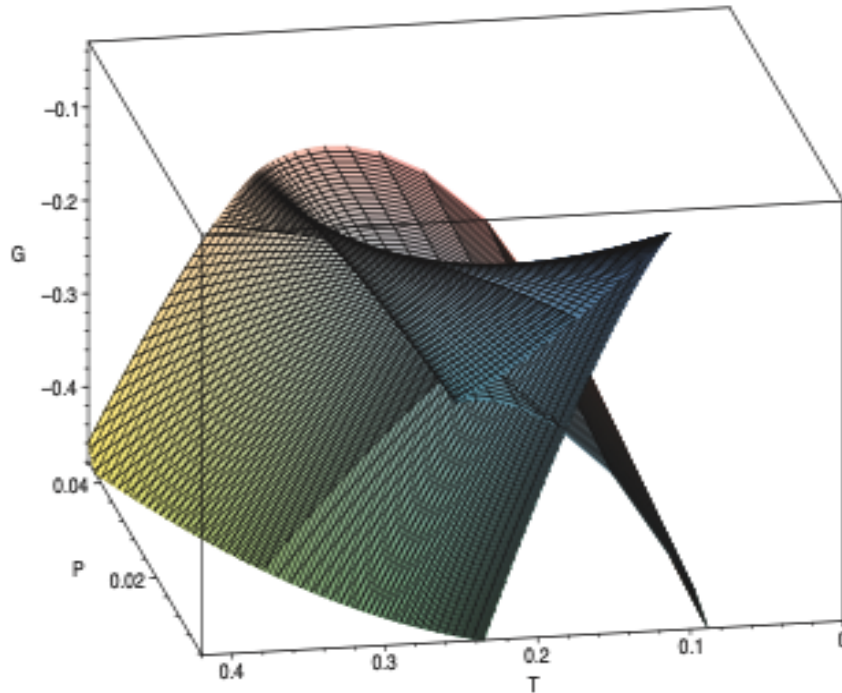
$$\oint v dP = 0, \quad (2.8)$$

као што је приказано на слици 2.2. Ова мера сагледава чињеницу да прелаз обе фазе има једнаку Гибсову слободну енергију, видети (2.9). Једнакост (2.8) је ефикасно оруђе за проналазак притиска на ком долази до фазног прелаза, или да би се израчунала промена запремине и латентна топлота.

Да бисмо добили више информација о фазном прелазу, проучавамо (специфичну) Гибсову слободну енергију, $G = G(P, T)$. За фиксиран број честица, ово можемо да добијемо интегралећи њен диференцијал,

$$dG = -SdT + v dP, \quad (2.9)$$

користећи Ван дер Валсову једнакост. Ова неназначена функција интеграције може да се одреди поређењем са (статистичким) G идеалног гаса. Ова



Слика 2.3. Гибсова слободна енергија Ван дер Валсовог флуида. Ова слика показује карактеристично понашање налик једрилца (енг. *swallowtail*) Гибсове слободне енергије као функције притиска и температуре. Ово одговара течност-гас фазном прелазу првог реда који се дешава на пресеку G површина. Одговарајућа крива назива се линија коегзистенције. Постављено је да је $\Phi = 1$.

назначена Гибсова слободна енергија чита се као

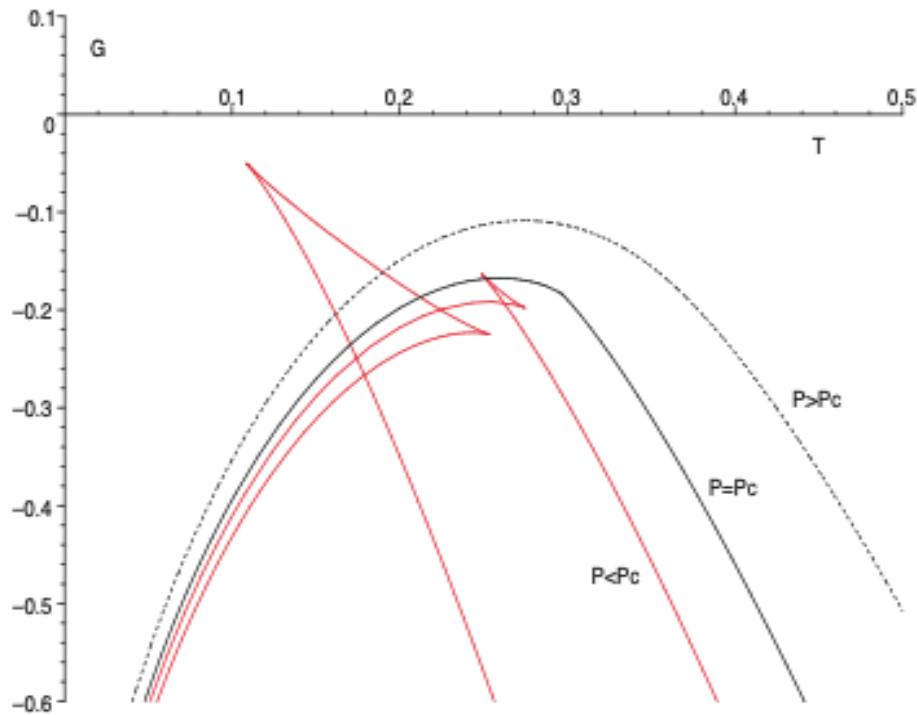
$$G = G(T, P) = -kT \left(1 + \ln \left[\frac{(v - b)T^{3/2}}{\Phi} \right] \right) - \frac{a}{v} + Pv. \quad (2.10)$$

Овде v схватамо као функцију од P и T , кроз Ван дер Валсову једначину (2.1), и Φ је (димензионална) константа која описује гас. Гибсова слободна енергија је приказана на сликама 2.3 и 2.4.

Линија коегзистенције две фазе, на којој су те две фазе у равнотежи, јавља се када се две површине од G секу. Ова линија је приказана на слици 2.5. Њу одређује Клаузијус-Клапејронова једначина

$$\left. \frac{dP}{dT} \right|_{\text{коегзистенција}} = \frac{S_g - S_l}{v_g - v_l}, \quad (2.11)$$

где S_g , S_l и v_g , v_l представљају специфичну ентропију и специфичну запремину гасне и течне фазе, редоследно. Другачије, ова линија може бити конструисана користећи Максвелов закон (2.8), или налажењем криве у (P, T) -равни за



Слика 2.4. Гибсова слободна енергија Ван дер Валсовог флуида. Ова фигура описује квалитативно понашање Гибсове слободне енергије као функције од температуре за разне притиске. Притисак опада здесна налево. Испрекидана линија одговара $P = 2P_c$, дебела пуна линија за $P = P_c$, и преостале пуне линије приказују $P = 0.6P_c$ и $P = 0.09P_c$, редоследно. За $P < P_c$ ту је прелаз првог реда у систему.

коју се Гибсова слободна енергија и Ван дер Валсова температура поклапају за две различите запремине v_l и v_g .

Критични експоненти описују понашање физичких величина у близини критичне тачке. Сматра се да су *универзални*, тј. да не зависе од детаља физичког система.² Израчунајмо неке од тих експонената као што је предвиђено једначином одговарајућих стања. Пишемо

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} = \tau - 1, \quad \phi = \frac{v - v_c}{v_c} = \nu - 1. \quad (2.12)$$

Коефицијенте $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ дефинишемо на следећи начин:

- Експонент α диригује понашање специфичне топлоте на константној

²Могу, међутим, да зависе од димензија система или опсега интеракција. У $D \geq 4$ димензија могу да се израчунају користећи теорију средњег поља (Ландоову теорију).

запремини,

$$C_v = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_v \propto |t|^{-\alpha}. \quad (2.13)$$

- Експонент β описује понашање *параметра реда* $\eta = v_g - v_l$ (разлика у запремини гасне фазе v_g и запремине течне фазе v_l) на датој изотерми

$$\eta = v_g - v_l \propto |t|^\beta. \quad (2.14)$$

- Експонент γ одлучује понашање *изотермне компресибилности* κ_T ,

$$\kappa_T = -\frac{1}{v} \left. \frac{\partial v}{\partial P} \right|_T \propto |t|^{-\gamma}. \quad (2.15)$$

- Експонент δ диригује следеће понашање на критичној изотерми $T = T_c$:

$$|P - P_c| \propto |v - v_c|^\delta. \quad (2.16)$$

Сада ћемо израчунати дате експоненте за наш систем. Да бисмо израчунали C_v посматрамо специфичну слободну енергију

$$F(T, v) = G - Pv = -kT \left(1 + \ln \left[\frac{(v-b)T^{3/2}}{\Phi} \right] \right) - \frac{a}{v}. \quad (2.17)$$

Одавде рачунамо специфичну ентропију

$$S(T, v) = -\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_v = k \left(\frac{5}{2} + \ln \left[\frac{(v-b)T^{3/2}}{\Phi} \right] \right), \quad (2.18)$$

и стога

$$C_v = T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_v = \frac{3k}{2}. \quad (2.19)$$

Пошто је овај израс независан од t закључујемо да је експонент $\alpha = 0$.

Развијајући једначину одговарајућих стања, (2.7), у околини критичне тачке имамо

$$p = 1 + 4t - 6t\phi - \frac{3}{2}\phi^3 + O(t\phi^2, \phi^4). \quad (2.20)$$

(То што можемо да занемаримо сабирак $O(t\phi^2, \phi^4)$ у овом развоју је оправдано једначином (2.23) испод.) Диференцирањем за фиксирано $t > 0$ добијамо

$$dP = -P_c \left(6t + \frac{9}{2}\phi^2 \right) d\phi. \quad (2.21)$$

Увешћемо $\phi_g = (v_g - v_c)/v_c$ као ”запремину” гаса и слично ϕ_l као запремину течности. Користећи Максвелов закон једнаких површина (2.8), и чињеницу да током фазног прелаза притисак остаје константан, имамо наредне две једначине:

$$\begin{aligned} p &= 1 + 4t - 6t\phi_l - \frac{3}{2}\phi_l^3 = 1 + 4t - 6t\phi_g - \frac{3}{2}\phi_g^3, \\ 0 &= \int_{\phi_l}^{\phi_g} \phi(6t + \frac{9}{2}\phi^2) d\phi. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ове једначине имају јединствено нетривијално решење, одређено са $\phi_g = -\phi_l = 2\sqrt{-t}$. Стога имамо

$$\eta = v_c(\phi_g - \phi_l) = 2v_c\phi_g = 4v_c\sqrt{-t} \implies \beta = \frac{1}{2}. \quad (2.23)$$

Да бисмо израчунали експонент γ , диференцираћемо једначину (2.20) да бисмо добили

$$\left. \frac{\partial v}{\partial P} \right|_T = -\frac{v_c}{6P_c} \frac{1}{t} + O(\phi). \quad (2.24)$$

Стога имамо

$$\kappa_T = -\frac{1}{v} \left. \frac{\partial v}{\partial P} \right|_T \propto \frac{1}{6P_c} \frac{1}{t} \implies \gamma = 1. \quad (2.25)$$

Такође се долази до овог резултата формулом

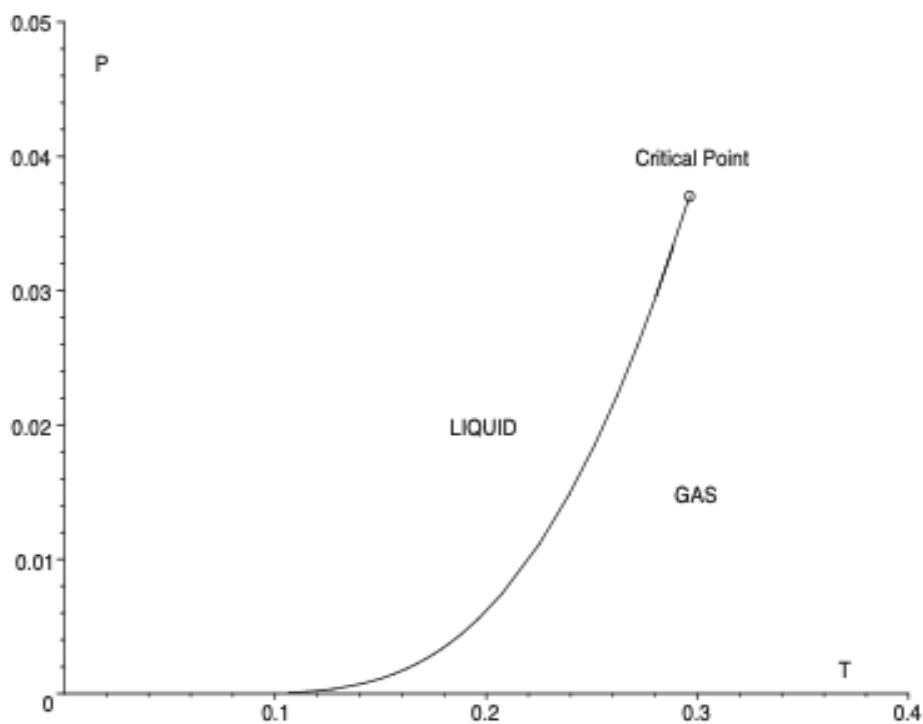
$$C_p - C_v = -T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v^2 \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \propto \frac{k}{t}. \quad (2.26)$$

Исто је и да кажемо да C_p дивергира ка критичној тачки са истим критичним експонентом γ као κ_T .

”Облик” критичке изотерме $t = 0$ је коначно дат са (2.20), тј,

$$p - 1 = -\frac{3}{2}\phi^3 \implies \delta = 3. \quad (2.27)$$

Ово употпуњује одређивање основних критичних експонената Ван дер Валсовог флуида.



Слика 2.5. Линија коегзистенције течност-гас фазе. Фигура приказује линију коегзистенције течне и гасне фазе Ван дер Валсовог флуида у (P, T) -равни. Критична тачка је наглашена малим кружићем на крају линије коегзистенције.

3

Фазни прелази у наелектрисаним AdS простор-временима црних рупа

3.1 Наелектрисана AdS црна рупа

За почетак сагледавамо нека основна термодинамичка својства сферне RN-AdS црне рупе. У Шварцшилдовским координатама метрика и $U(1)$ поље читају

$$ds^2 = -V dt^2 + \frac{dr^2}{V} + r^2 d\Omega_2^2, \quad (3.1)$$

$$F = dA, \quad A = -\frac{Q}{r} dt. \quad (3.2)$$

Овде, $d\Omega_2^2$ означава стандардни елемент у S^2 и функција V одређена са

$$V = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}. \quad (3.3)$$

Са овим избором имамо решење Ајнштајн-Максвеловог система једначина који следи из следеће једначине

$$I_{EM} = -\frac{1}{16\pi} \int_M \sqrt{-g} \left(R - F^2 + \frac{6}{l^2} \right). \quad (3.4)$$

Позиција хоризонта догађаја црне рупе је одређен као већи корен $V(r_+) = 0$. Параметар M представља ADM масу црне рупе и у нашој поставци је повезана са енталпијом система. Q представља укупно наелектрисање. Користећи ”Еуклидски трик”, можемо да израчунамо температуру црне рупе

$$T = \frac{1}{\beta} = \frac{V'(r_+)}{4\pi} = \frac{1}{4\pi r_+} \left(1 + \frac{3r_+^2}{l^2} - \frac{Q^2}{r_+^2} \right), \quad (3.5)$$

и одговарајућу ентропију

$$S = \frac{A}{4}, \quad A = 4\pi r_+^2. \quad (3.6)$$

Електрични потенцијал Φ , мерен у бесконачности у односу на хоризонт, је

$$\Phi = \frac{Q}{r_+}. \quad (3.7)$$

Термодинамичка запремина црне рупе V је дата једначином (1.2) и одговарајући притисак P једначином (1.1). Са овим релацијама, решење поштује први закон термодинамике црних рупа у *проширеном* (укључујући променљиве P и V) *фазном простору*

$$dM = TdS + \Phi dQ + VdP. \quad (3.8)$$

Одговарајућа Смарова релација

$$M = 2(TS - VP) + \Phi Q \quad (3.9)$$

може бити изведена од ње скалирањем (димензионалног) аргумента.

Када P третирамо као константу (тј. кад космолошкој константи није дозвољено да варира), (3.8) се своди на стандардни први закон у "непроширеном" фазном простору. У овом случају, међутим, Смарова релација остаје непромењена и не следи из првог закона преко аргумента за скалирање.

Претходна истраживања критичног понашања RN-AdS црне рупе у непроширеном фазном простору су показала да у канонском ансамблу (фиксираним наелектрисања), за $Q < Q_c$ и $\beta_Z < \beta < \beta_c$, постоји фазни прелаз првог реда у систему. Ово се дешава у (β, Q) -равни и фазни прелаз је прилично аналоган течност-гас фазном прелазу који се одвија у (P, T) равни за $T < T_c$.

У ономе шта следи ћемо се сконцентрисати на анализирање фазног прелаз за система наелектрисане AdS црне рупе у проширеном фазном простору док третирамо наелектрисање црне рупе Q као фиксирани спољашњи параметар, не као термодинамичку променљиву. Показаћемо да је још упечатљивије поклапање са Ван дер Валсовим флуидом остварено у овом случају.

3.2 Једначина стања

За фиксирано наелектрисање Q , једначина (3.5) преводи се у *једначину стања* за наелектрисану AdS црну рупу, $P = P(V, T)$,

$$P = \frac{T}{2r_+} - \frac{1}{8\pi r_+^2} + \frac{Q^2}{8\pi r_+^4}, \quad r_+ = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}. \quad (3.10)$$

Овде V представља термодинамичку запремину, дату у зависности од радијуса хоризонта догађаја r_+ , T је температура црне рупе, и Q је њено наелектрисање.

Пре него што наставимо даље, користимо димензионалну анализу, преводећи "геометријску" једначину стања (3.10) у физичку једначину. Физички притисак и температура су дати са

$$\text{Press} = \frac{\hbar c}{l_P^2} P, \quad \text{Temp} = \frac{\hbar c}{k} T, \quad (3.11)$$

док Планкова дужина чита $l_P^2 = \frac{\hbar G_N}{c^3}$. Множењем (3.10) са $\frac{\hbar c}{l_P^2}$ добијамо

$$\text{Press} = \frac{\hbar c}{l_P^2} P = \frac{\hbar c}{l_P^2} \frac{T}{2r_+} + \dots = \frac{k \text{Temp}}{2l_P^2 r_+} + \dots \quad (3.12)$$

Упоређујући ову са Ван дер Валсовом једначином, (2.1), закључујемо да треба да идентификујемо специфичну запремину v са

$$v = 2l_P^2 r_+. \quad (3.13)$$

Речено другачије, пре је радијус хоризонта r_+ , него термодинамичка запремина V , величина коју треба да повежемо са запремином флуида.

Трагајући даље за идентификацијом и враћајући се на геометријске јединице, једначина стања (3.10) може да се напише као ¹

$$P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} + \frac{2Q^2}{\pi v^4}, \quad (3.15)$$

Одговарајући " $P - V$ дијаграм" је приказан на слици 3.1. Очигледно, за $Q \neq 0$ и за $T < T_c$ имамо тачку превоја и понашање наликује Ван дер Валсовом гасу. *Критичну тачку* добијамо из

$$\frac{\partial P}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = 0, \quad (3.16)$$

што води до

$$T_c = \frac{\sqrt{6}}{18\pi Q}, \quad v_c = 2\sqrt{6}Q, \quad P_c = 196\pi Q^2. \quad (3.17)$$

¹Очигледно је да критичност не може да се догоди у "великом канонском" ансамблу (фиксираног Φ). Заиста, у том случају једначина стања се редукује на квадратну једначину

$$Pv^2 - 8\pi T v + 4(1 - \Phi^2) = 0, \quad (3.14)$$

што не испољава критично понашање.

Критични радијус одговара критичној термодинамичкој запремини

$$V_c = \frac{3}{4}\pi r_c^3 = 8\sqrt{6}\pi Q^3, \quad (3.18)$$

што ће бити коришћено касније за налажење критичних експонената.

Испитујући критичне вредности (3.17) налазимо занимљиву релацију

$$\frac{P_c v_c}{T_c} = \frac{3}{8}, \quad (3.19)$$

што је исто као за Ван дер Валсов флуид и универзалан је број предвиђен за било коју RN-AdS црну рупу са произвољним наелектрисањем. Штавише критичне вредности (3.17) могу да се напишу и у форми (2.4), са

$$a = \frac{3}{4\pi}, \quad b = \frac{2\sqrt{6}Q}{3}. \quad (3.20)$$

Присуство наелектрисања Q чини ефективну запремину мањом, $b \propto Q$. Даље дефинишемо

$$p = \frac{P}{P_c}, \quad \nu = \frac{v}{v_c}, \quad \tau = \frac{T}{T_c}, \quad (3.21)$$

једначина стања (3.10) се преводи у "закон одговарајућих стања", дат једначином (упоредити са (2.7))

$$8\tau = 3\nu \left(p + \frac{2}{\nu^2} \right) - \frac{1}{\nu^3}. \quad (3.22)$$

Слично Ван дер Валсовој једначини (видети фусноту 1 у другом поглављу), постоји температура T_0 , дата са

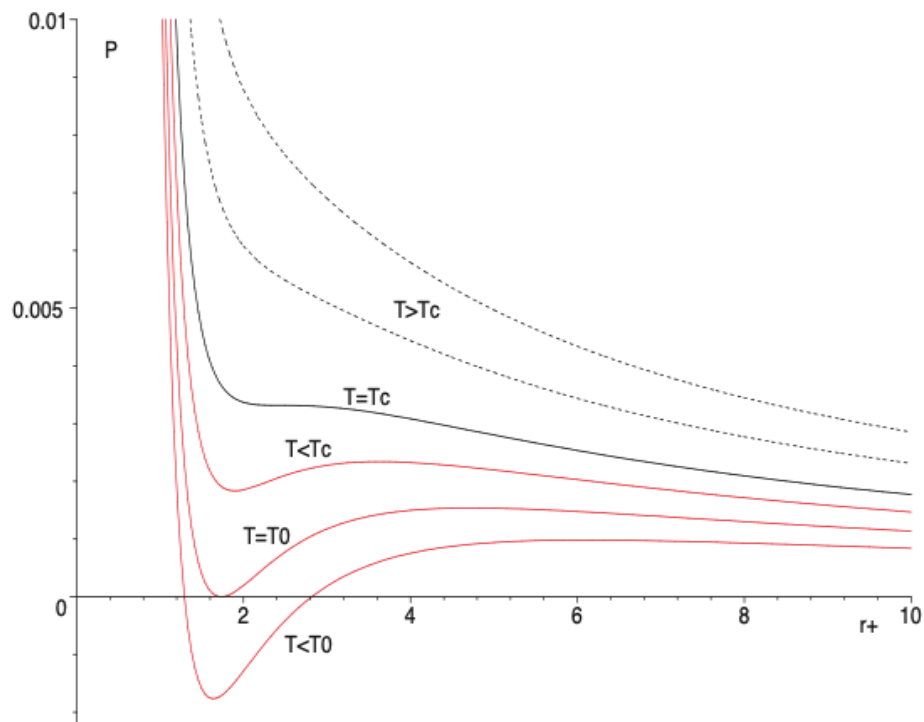
$$T_0 = \frac{\sqrt{3}}{18\pi Q}, \quad (3.23)$$

испод које притисак P постаје негативан за неке r_+ . У случају флуида овакво понашање није физичко, пошто је потребно заменити осцилујући део изотерме изобаром, по Максвеловом закону једнаких површина (2.8). Ово је подржано проучавајући Гибсову слободну енергију система у следећем одељку.

Коначно, поменимо да је критично понашање присутно само за црну рупу са хоризонтом сферне топологије. За различите топологије једначина стања постаје

$$P = \frac{P}{2r_+} - \frac{\hat{k}}{8\pi r_+^2} + \frac{Q^2}{8\pi r_+^4}, \quad (3.24)$$

где је $\hat{k} = 0$ тороидни (планарни) случај и $\hat{k} = -1$ хиперболички случај. Очигледно, пошто су сви сабирци на десној страни једначине ненегативни, не може да дође до критичног понашања. Последнично не постоји температура T_0 .



Слика 3.1. $P - V$ дијаграм наелектрисане AdS црне рупе. Температура изо-терми опада одозго надоле. Две горње испрекидане линије одговарају једнофазном понашању "идеалног гаса" за $T > T_c$, критичка изотерма $T = T_c$ је задата дебелом пуном линијом, доње пуне линије одговарају температурама мањим од критичне, и изотерма $T = T_0$ је такође приказана. Постављено је да је $Q = 1$.

3.3 Гибсова слободна енергија

Да бисмо пронашли партициону функцију система израчунајмо њену Еуклидску акцију. За фиксирано наелектрисање Q , разматрамо површински интеграл

$$I_s = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial M} d^3x \sqrt{h} K - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial M} d^3x \sqrt{h} n_a F^{ab} A_b. \quad (3.25)$$

Први сабирак представља стандардни Гибсов-Хокингов сабирак док је други сабирак потребан да би се успоставило фиксирано Q као гранични услов на бесконачности. Укупна акција је онда дата са

$$I = I_{EM} + I_s + I_c, \quad (3.26)$$

где је I_{EM} дато из (3.4), и I_c представља инваријантни противсабирак потребан да се излече инфрацрвене дивергенције. Тотална акција гласи

$$I = \frac{\beta}{4l^2} \left(l^2 r_+ - r_+^3 + \frac{3l^2 Q^2}{r_+} \right). \quad (3.27)$$

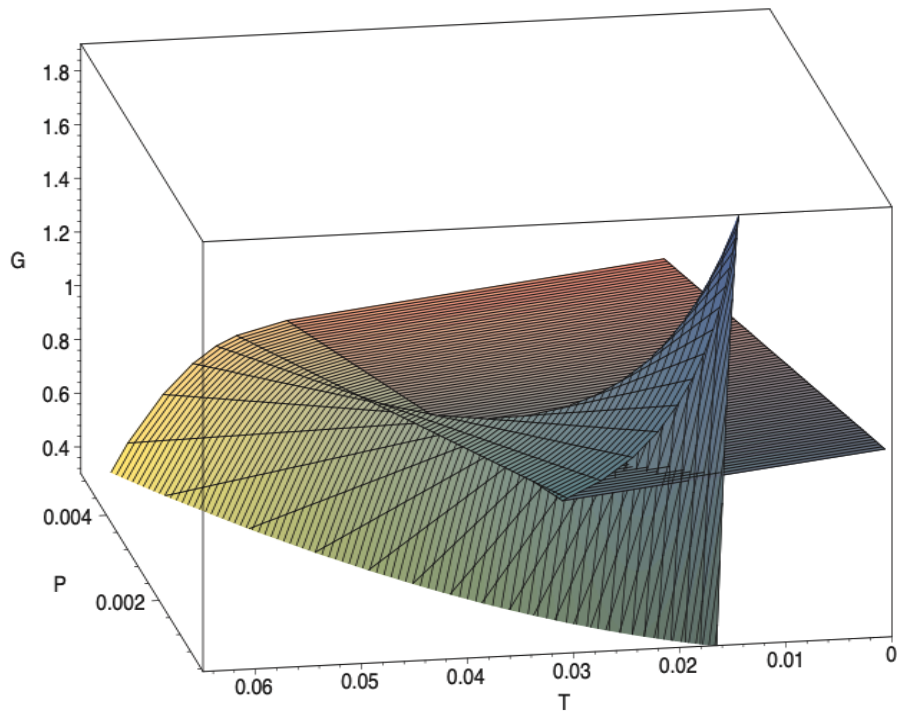
У стандардном приступу ова акција је повезана са слободном енергијом, исказујући своју зависност од прилично велике величине Q . Међутим, пошто разматрамо проширени фазни простор, и акција је била израчуната за фиксирано Λ , везујемо га за *Гибсову слободну енергију* за фиксирано наелектрисање,

$$G = G(T, P) = \frac{1}{4} \left(r_+ - \frac{8\pi}{3} P r_+^3 + \frac{3Q^2}{r_+} \right). \quad (3.28)$$

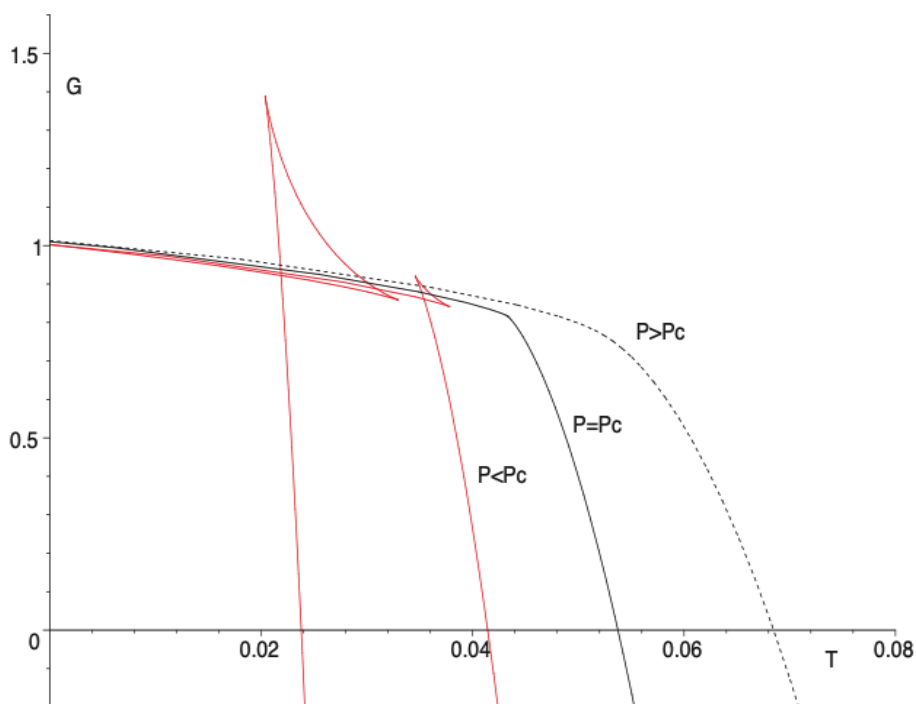
Овде r_+ схватамо као функцију притиска и температуре, $r_+ = r_+(P, T)$, преко наведене једначине стања (3.10).

Понашање G је приказано на сликама 3.2 и 3.3. Пошто G површина показује карактеристично "једрилчево" понашање, имамо фазни прелаз првог реда у систему. Линија коегзистенције у (P, T) -равни може да се придобије из Максвелове једначине једнаких површина, Клаузијус-Клапејронове једначине (2.11), или просто налазећи криву у (P, T) -равни за коју се Гибсова слободна енергија и температура поклапају за мале ($r_+ = r_s$) и велике ($r_+ = r_l$) црне рупе. Ово је приказано на слици 3.4.

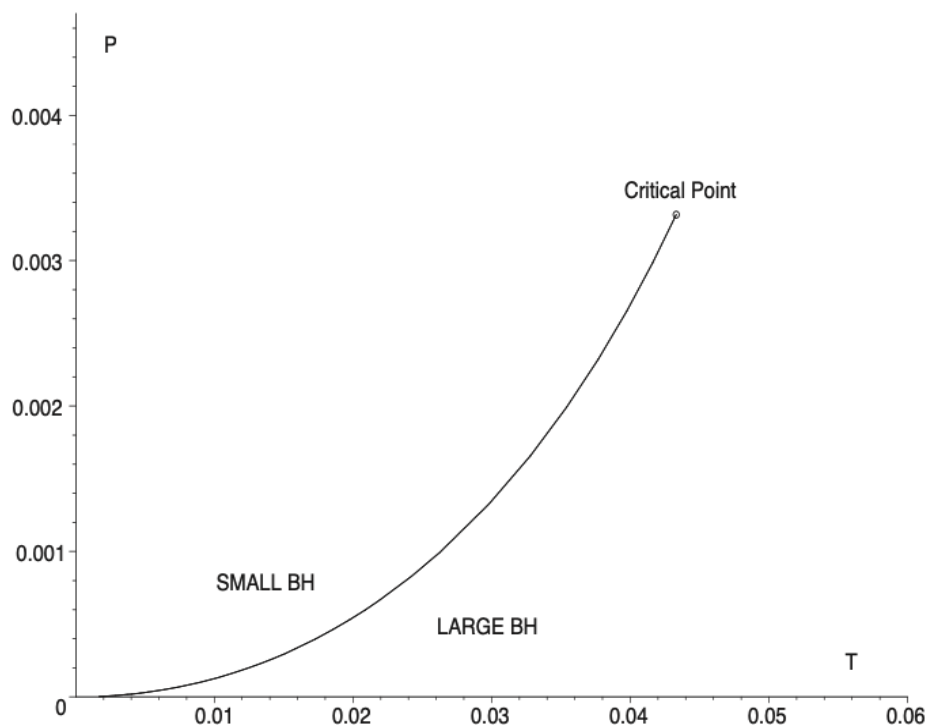
Запажамо да је линија коегзистенције у (P, T) равни и линија коегзистенције у Ван дер Валсовом флуиду у претходном делу изгледају врло слично. Мала-велика црна рупа фазни прелаз се дешава за $T < T_c$, за било коју нетривијалну вредност наелектрисања Q .



Слика 3.2. Гибсова слободна енергија наелектрисаних AdS црних рупа. Ова слика показује карактеристично понашање налик једрилца Гибсове слободне енергије као функције од притиска и температуре, за фиксирано $Q = 1$. Мала-велика црна рупа фазни прелаз првог реда се дешава на кривој која је пресек G површина.



Слика 3.3. Гибсова слободна енергија наелектрисане AdS црне рупе. Слика приказује G као функцију температуре за фиксирано $Q = 1$, и растућег притиска $P/P_c = 0.1$ (црна линија) нагоре до $P/P_c = 1.6$ (црвена линија). Зелена линија одговара критичном притиску $P = P_c \approx 0.0033$. Очигледно, за $T < T_c \approx 0.043$ имамо (мала црна рупа)-(велика црна рупа) фазни прелаз првог реда.



Слика 3.4. Линија коегзистенције наелектрисане AdS црне рупе. Слика приказује линију коегзистенције мала-велика црна рупа фазног прелаза система наелектрисане AdS црне рупе у (P, T) -равни. Критична тачка је наглашена малим кругом на крају линије коегзистенције.

3.4 Понашање у близини критичне тачке

Сада ћемо да нађемо критичне експоненте $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ за систем црне рупе, пратећи дискусију из претходног одељка. Почињемо са понашањем специфичне топлоте на константној термодинамичкој запремини C_V . За ово разматрамо слободну енергију

$$F(T, V) = G - PV = \frac{1}{2} \left(r_+ - 2\pi T r_+^2 + \frac{Q^2}{r_+} \right). \quad (3.29)$$

Од ове једначине рачунамо ентропију

$$S(T, V) = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = \pi r_+^2, \quad (3.30)$$

што се поклапа са једначином (3.6). Пошто је ово независно од T добијамо да је $C_V = 0$ и стога експонент $\alpha = 0$.

Развијајући у околини критичне тачке ²

$$t = \frac{T}{T_c} - 1, \quad \omega = \frac{V}{V_c} - 1, \quad (3.31)$$

апроксимирамо закон одговарајућих стања (једначина 3.22) као

$$p = 1 + \frac{8}{3}t - \frac{8}{9}t\omega - \frac{4}{81}\omega^3 + O(t\omega^2, \omega^4). \quad (3.32)$$

[Скраћивање реда је оправдано формулом (3.35) испод]. Дифренцирањем овог реда за фиксирано $t < 0$ добићемо

$$dP = -\frac{4}{27}P_c(6t + \omega^2) d\omega. \quad (3.33)$$

Стога, примењујући Максвелов закон једнаких површина (2.8), док уводимо ω_s и ω_l као "запремине" мале и велике црне рупе, добијамо следеће једначине:

$$\begin{aligned} p &= 1 + \frac{8}{3}t - \frac{8}{9}t\omega_l - \frac{4}{81}\omega_l^3 = 1 + \frac{8}{3}t - \frac{8}{9}t\omega_s - \frac{4}{81}\omega_s^3, \\ 0 &= \int_{\omega_l}^{\omega_s} \omega(6t + \omega^2) d\omega. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ове једначине имају јединствено нетривијално решење дато са $\omega_s = -\omega_l = 3\sqrt{-2t}$. Стога налазимо да је

$$\eta = V_c(\omega_l - \omega_s) = 2V_c\omega_l = 6V_c\sqrt{-2t} \implies \beta = \frac{1}{2}. \quad (3.35)$$

²Приметимо да такође можемо да пишемо $\omega' = \frac{v}{v_c} - 1$ и добили би се исти резултати за критичне експоненте.

Да бисмо израчунали експонент γ , диференцирајмо једначину (3.32) да бисмо добили

$$\left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T = -\frac{9}{8} \frac{V_c}{P_c} \frac{1}{t} + O(\omega). \quad (3.36)$$

Стога имамо

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T \propto \frac{9}{8} \frac{1}{P_c} \frac{1}{t} \implies \gamma = 1. \quad (3.37)$$

Критична тачка одговара дивергенцији специфичне топлоте на константној температури

$$C_p - C_v = -T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2 \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \propto \frac{12\pi Q^2}{t}. \quad (3.38)$$

Такође се може директно видети из дефиниције да C_P дивергира, али не и C_V , ка нашој критичној тачки

$$C_P = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_P, \quad C_V = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V, \quad (3.39)$$

и израза

$$T = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\pi S}} \left(1 - \frac{\pi Q^2}{S} + 8PS \right). \quad (3.40)$$

Добијамо да је $C_V = 0$, и

$$C_P = 2S \frac{8PS^2 + S - \pi Q^2}{8PS^2 - S + 3\pi Q^2}, \quad (3.41)$$

где стабилност захтева $C_P > 0$. Специфична топлота C_P постаје сингуларна на $8PS^2 - S + 3\pi Q^2 = 0$, и пошто $S = \pi r_+^2$ ово се дешава када

$$8P\pi^2 r_+^4 - \pi r_+^2 + 3\pi Q^2 = 0, \quad (3.42)$$

односно тачно код критичне тачке.

Коначно, ”облик критичне изотерме” $t = 0$ је дат преко (3.32)

$$p - 1 = -\frac{4}{81} \omega^3 \implies \delta = 3. \quad (3.43)$$

Ово употпуњује одређивање основних критичних експонената. Упоредивши са претходним делом, где су се експоненти рачунали за Ван дер Валсов флуид, налазимо да се сви поклапају. Ови коефицијенти са такође могу поредити са експонентима у непроширеном фазном простору. Пошто критични експоненти могу да зависе од димензионалности система, било би интересантно да поновимо наш рачун за наелектрисану BTZ црну рупу или вишедимензионалне RN-AdS црне рупе.

4

Речник појмова

У овом поглављу ћемо приближити читаоцима важне појмове које смо користили у раду.

А

Ајнштајн-Максвелов систем једначина - систем једначина, који се састоји од Максвелових једначина, које можемо записати у прикладнијем облику у оквиру опште теорије релативности. Прву и другу Максвелову једначину можемо записати у облику

$$F^{\mu\nu,\nu} = F^{\mu\nu,\nu} S^\mu, \quad (4.1)$$

за $\mu = 0, 1, 2, 3$. Овде симбол $,\nu$ обележава коваријантну тензорну диференцијацију, а $,\nu$ обележава уобичајну парцијалну диференцијацију.

Конечно трећа и четврта Максвелова једначина су у облику:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (4.2)$$

Грубо речено, σ представља димензиону вредност од 0 до 3 (и остала мала грчка слова), $F^{\mu\nu}$ контраваријантни тензор који можемо схватити као матрицу сачињену од вредности јачина електричних поља по x, y, z оси и јачина магнетних поља по истим осама, и $S^\mu = (\rho, J/c)$ као контраваријантни вектор.

Ајнштајнове једначине описују ограничења закривљености простор времена, а облика су

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

Ове једначине су инваријантне под свим континуалним и диференцијабилним трансформацијама координатног система.

В

Ван дер Валсов флуид - Први, најједноставнији и најшире познат пример интерагујућег система честица које манифестују фазни прелаз. Сва термодинамичка својства су формулисана у појмовима редукованих параметара од којих ничу многи закони одговарајућих стања, који су по дефиницији исти за сваки флуид који задовољава претпоставке Ван дер Валсове теорије.

Г

Гибсова слободна енергија - Названа по Џозаји Виларду Гибсу, који је ову енергију оригинално назвао "доступном енергијом система". Ова величина је енергија повезана се хемијском реакцијом која се може користити за вршење рада, и разлика је енталпије (H) и производа температуре и ентропије система. Количина је дефинисана као:

$$G = H - TS = U + PV - TS. \quad (4.4)$$

К

Критична тачка - горња граница течност-гас криве. Уколико бисмо покушали да кондензујемо гас у течност само повећавањем притиска, притом имајући температуру изнад критичне, не бисмо остварили жељени резултат. Немогуће је то остварити, само ћемо добити изузетно сабијен гас.

Критични експоненти - скуп експонентата који користимо да бисмо одредили квалитативну природу критичног понашања датог система.

О

Општа теорија релативности - Алберт Ајнштајн је објавио ову теорију 1916. године, 11 година након објављивања специјалне теорије релативности. Општа теорија релативности проширује опсеге релативистичке механике укључивши у себе неинерцијалне референтне системе и обједињену теорију гравитације. Она обухвата и специјалну теорију релативитета као и Њутнов закон универзалне гравитације. Пружа обједињену теорију гравитације, при чему је гравитација геометријско својство простора и времена.

П

Партициона функција - статистичка термодинамичка функција помоћу

које директно можемо израчунати све термодинамичке величине. Партициона функција је приказ начина да се преброје честице система када су честице распоређене по доступним енергетским нивоима у складу са Болцмановом дистрибуцијом - $e^{-\frac{\epsilon_1}{k_B T}}$, где је ϵ_1 енергија првог побуђеног стања, k_B Болцманова константа, и T је апсолутна температура.

Ф

Фазни прелаз - промена особине која одликује систем. Примери фазних прелазу су промене од течног ка чврстом стању, течности ка гасу, и обрнутим променама. Други примери укључују прелаз парамагнета у феромагнет, и прелазу нормалног проводника у суперпроводник. Фазне прелазе можемо класификовати по њиховом реду. Ако имамо ненулту латентну топлоту при прелазу, закључујемо да је у питању прелаз првог реда. Ако је латентна топлота једнака нули закључујемо да је у питању прелаз другог реда.

Х

Хоризонт догађаја - површина црне рупе. Унутар хоризонта догађаја друга космичка брзина (тј. брзина која је потребна материји да напусти гравитационо поље космичког објекта) прелази брзину светлости, тако да ни зраци светлости не могу побећи у свемир.

Ц

Црна рупа - космичко тело екстремно јаке гравитације од које ништа, чак ни светлост, не може побећи. Црна рупа може да настане смрћу масивне звезде. Када таква звезда исцрпи своја унутрашња термонуклеарна горива у свом језгру на крају свог живота, језгро постане нестабилно и гравитационо колабира над собом ка унутрашњости, и звездини спољашњи слојеви су растерани. Тежина "дробљене" гравитационе материје која се увлачи ка унутрашњости са свих страна сабија умирућу звезду до тачке нулте запремине и бесконачне густине коју називамо сингуларитет.

5

Закључак

У овом раду смо проучавали термодинамичко понашање наелектрисане AdS црне рупе у продуженом фазном простору - третирајући космолошку константу и њену коњуговану вредност као термодинамичке променљиве повезане са притиском и запремином, редоследно. За фиксирано наелектрисање црне рупе, ова идентификација нам је допустила да напишемо једначину стања као $P = P(V, T)$ и проучимо њено понашање користећи стандардне термодинамичке технике. Показали смо да систем испољава мала-велика црна рупа фазни прелаз првог реда која у много апсеката наликује течност-гас промени фазе која се дешава у флуиду. Наиме, за сваку нетривијалну вредност наелектрисања, постоји критична температура T_c испод које се овај фазни прелаз дешава. Слично флуидима, можемо критичној температури да доделимо линију коегзистенције у (P, T) -равни које се завршава у критичној тачки иза које више није могуће направити разлику између две фазе. Даље смо проучили понашање одрђених физичких величина у близини критичне тачке и израчунали одговарајуће критичне експоненте. Показано је да се поклапају са експонентима Ван дер Валсовог флуида.

Литература

- [1] D. Kubizňák, R. B. Mann, *P-V criticality of charged AdS black holes*, arXiv, (2012)
- [2] [https://encyclopediaofmath.org/wiki/Einstein – Maxwell _ equations](https://encyclopediaofmath.org/wiki/Einstein%20%E2%80%93%20Maxwell_equations)
- [3] D. C. Johnston, *Thermodynamic Properties of the van der Waals Fluid*, arXiv, (2014)
- [4] [https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textbook_Maps/Supplemental_Modules_\(Physical_and_Theoretical_Chemistry\)/Thermodynamics/Energies_and_Potentials/Free_Energy/Gibbs_\(Free\)_Energy](https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textbook_Maps/Supplemental_Modules_(Physical_and_Theoretical_Chemistry)/Thermodynamics/Energies_and_Potentials/Free_Energy/Gibbs_(Free)_Energy)
- [5] [https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textbook_Maps/Supplemental_Modules_\(Physical_and_Theoretical_Chemistry\)/Physical_Properties_of_Matter/States_of_Matter/Supercritical_Fluids/Critical_Point](https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textbook_Maps/Supplemental_Modules_(Physical_and_Theoretical_Chemistry)/Physical_Properties_of_Matter/States_of_Matter/Supercritical_Fluids/Critical_Point)
- [6] https://www.lkouniv.ac.in/site/writereaddata/siteContent/202004021910158446bhupesh_Critical_Exponents.pdf
- [7] [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Variational_Principles_in_Classical_Mechanics_\(Cline\)/17](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Variational_Principles_in_Classical_Mechanics_(Cline)/17)
- [8] <https://www2.chem.umd.edu/groups/alexander/chem481/PartitionFunction.pdf>
- [9] <https://www.oxfordreference.com/display/10.1093/oi/authority.20110803100321802>
- [10] [https://www.britannica.com/science/black – hole](https://www.britannica.com/science/black-hole)