Математичка гимназија

Матурски рад
из математике

Шпернерова лема и њене примене

Ученик
Јован Николић, IVд

Ментор
др Соња Чукић

Београд, 27. мај 2024. године

Садржај

Увод **1**

1 Шпернерова лема за троуглове **3**
1.1 Потребни појмови 3
1.2 Тврђење у случају две димензије 4

2 Шпернерова лема у више димензија **7**
2.1 Дефиниције за више димензија 7
2.2 Потребни појмови 8
2.3 Тврђење 9

3 Примене Шпернерове леме **13**
3.1 Брауерова теорема 13
3.2 Равноправне поделе 15
3.2.1 Подела торте 15
3.2.2 Подела заједничког апартмана 20

Закључак **25**

Литература **27**

Увод

У овом матурском раду бавићемо се Шпернеровом лемом и њеним применама. Сагледајући теме из области комбинаторике, Шпернерова лема издвојила се као изазов на два нивоа: на нивоу проучавања и разумевања самог тврђења и на нивоу њених примена у различитим гранама математике, налазећи примену и у стварном животу.

Творац ове леме је немачки математичар Емануел Шпернер, по којем она носи име. Представљала је део докторске тезе под називом „Нови докази инваријантности броја димензија и површине”, објављене 1928. године. Лема је најпре постала популарна међу математичарима који су се бавили топологијом, а своју примену је касније нашла и у проблемима равноправне поделе.

Циљ рада је да прикажемо:

(1) целокупно тврђење леме, заједно са доказима, тако што ћемо прво представити најједноставнији случај, а потом га уопштити;
(2) примене леме као помоћно средство за доказ других теорема, а затим и у решавању практичних проблема.

1

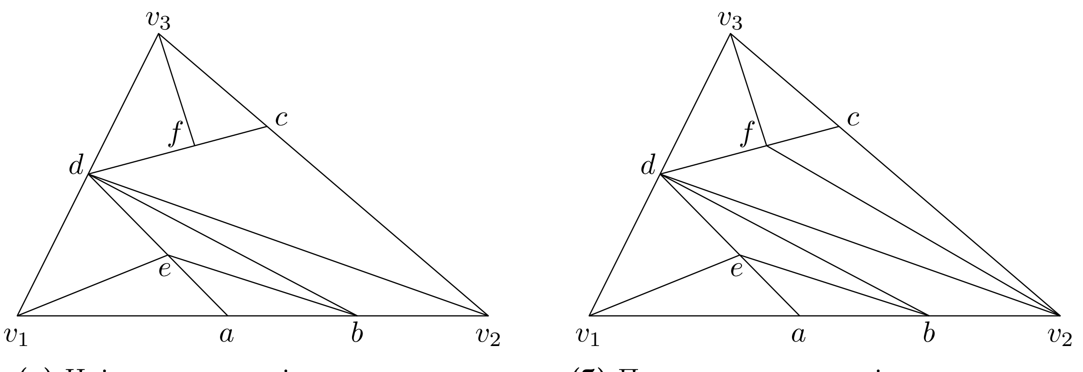
Шпернерова лема за троуглове

1.1 Потребни појмови

Дефиниција 1.1. Триангулација $\mathcal{T}$ је *коначан* скуп троуглова настао поделом почетног троугла за који важи:

- Сваки многоугао у чијој унутрашњости и на чијим страницама, не рачунајући његова темена, нема темена других многоуглова је троугао;
- За свака два таква троугла важи да им је пресек празан скуп, заједничко теме или заједничка страница.

Темена триангулације $\mathcal{T}$ су темена свих троуглова те триангулације.



(а) Није триангулација троугла $v_1v_2v_3$ **(б)** Пример триангулације троугла $v_1v_2v_3$

Слика 1.1. У подели (а), пресек троуглова v_3df и v_2cd је дуж df која је страница троугла v_3df, али не и троугла v_2cd, стога подела (а) није триангулација. Додавши страницу v_2f, добијамо поделу (б), која јесте једна од могућих триангулација троугла $v_1v_2v_3$.

За дефинисање Шпернерове леме неопходно је дати услове за које она важи. Бојење троугла $v_1v_2v_3$ са триангулацијом $\mathcal{T}$ је додељивање једне боје сваком темену, видети следећу дефиницију.

Дефиниција 1.2. Шпернерово бојење троугла $v_1v_2v_3$ са триангулацијом $\mathcal{T}$ је такво да:

(1) користимо три боје за бојење темена;

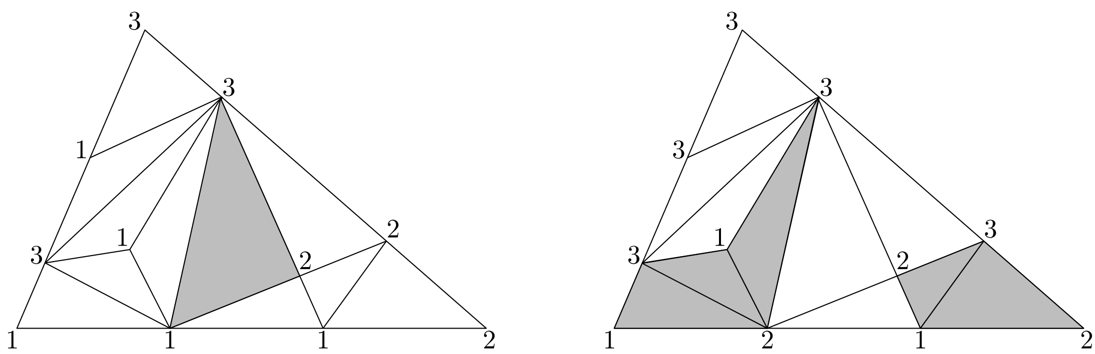
(2) темена v_1, v_2 и v_3 су сва обојена различито;

(3) свако теме које припада страници троугла $v_1v_2v_3$ је обојено у неку од боја крајева те странице.

Ради једноставности, темена v_1, v_2 и v_3 обојићемо редом бојама 1, 2, 3. Приметимо да, независно од триангулације, темена у унутрашњости троугла $v_1v_2v_3$ могу бити обојена произвољно.

1.2 Тврђење у случају две димензије

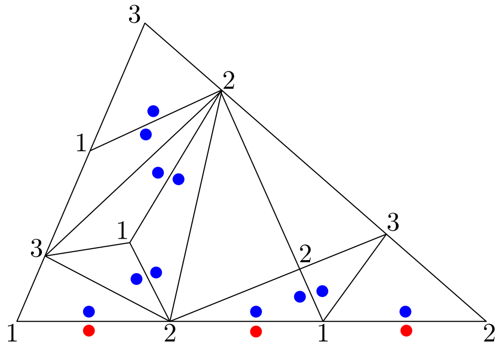
Теорема 1.1 (*Шпернерова лема у две димензије*)**.** Нека је $v_1v_2v_3$ троугао и $\mathcal{T}$ триангулација истог. Нека је над $\mathcal{T}$ примењено Шпернерово бојење. Тада у $\mathcal{T}$ постоји троугао чија су темена обојена у све (три) боје.



Слика 1.2. Два примера бојења, за које важи Шпернерова лема

Постоји више начина доказивања ове леме. Доказ који следи је једноставно разумети јер се заснива на парности, али не пружа проналазак тог разнобојног троугла, већ само доказује његово постојање.

Доказ. Доказаћемо јаче тврђење, да је број таквих троуглова непаран, а самим тим бар један постоји.



Слика 1.3. Нацртане тачке са обе стране свих страница-12; црвене су у спољашњости, а плаве у унутрашњости троугла $v_1v_2v_3$

Посматрајмо троуглове у чијој унутрашњости и на чијим страницама нема темена других троуглова, као у дефиницији 1.1, и назовимо их областима. Посматрајмо само странице свих области чији су крајеви обојени у боје 1 и 2 и назовимо их странице-12. У равни троугла поставимо по једну тачку са обе стране тих страница.

Поделимо тачке на оне које припадају унутрашњости и оне које припадају спољашњости троугла $v_1v_2v_3$. Тачка може припадати спољашњости само ако је њена страница-12 на ободу троугла $v_1v_2v_3$.

Свака област може садржати највише две тачке, јер је немогуће да три странице-12 сачињавају троугао. Области које садрже тачно једну тачку имају тачно једну страницу-12, што значи да је треће теме области обојено бојом 3, па такве области одговарају троугловима са свим теменима различитих боја.

Пребројмо тачке које припадају спољашњости. Због ограничења у бојењу, странице-12 које тражимо могу припадати само страници v_1v_2. Посматрајмо низ темена од v_1 до v_2. Како је теме v_1 обојено бојом 1, а v_2 бојом 2, закључујемо је број парова суседних темена који су разнобојни (број страница-12) непаран.

Како свакој страници-12 одговарају по 2 тачке, укупан број тачака је паран. Број тачака у спољашњости је непаран, па је и број тачака у унутрашњости непаран. Ако са a_i ($i \in \{0, 1, 2\}$) означимо број области у чијој је унутрашњости тачно i тачака, закључујемо да је $a_1 + 2a_2$ непаран, а самим тим и a_1 непаран, што је и требало доказати. □

2

Шпернерова лема у више димензија

Како бисмо формулисали Шпернерову лему у целости, потребно је видети над којим геометријским објектима је смемо применити. Важно је истаћи да у случају две димензије нисмо радили са произвољним многоуглом, већ са троуглом.

2.1 Дефиниције за више димензија

Ознака 1. Ради једноставности, нека је $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Дефиниција 2.1. Скуп тачака $\{v_1, v_2, v_3, \dots,\ v_{n+1}\}$ у простору $\mathbb{R}^{n+1}$ је у општем положају ако су вектори $\{\, v_i - v_1 \mid i \in [n+1] \setminus \{1\} \,\}$ линеарно независни у $\mathbb{R}$.

Дефиниција 2.2. Нека је $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+1}\}$ скуп тачака у простору $\mathbb{R}^{n+1}$ у општем положају. Тада је *n-симӣлекс* скуп тачака

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i v_i \;\middle|\; (\forall i \in [n+1])\ a_i \geqslant 0 \wedge \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1 \right\}.$$

Ознака 2. Са $V(C)$ ћемо означавчти скуп темена n-симплекса C.

Дефиниција 2.3. За дато $D \subseteq V(C)$ кардиналности $d+1$, d-страна од C је d-симплекс са теменима из скупа D.

Специјално, $(n-1)$-страну n-симплекса називамо *лицем*.

Ознака 3. F_D је страна са теменима из скупа D.

Ако за страну није напоменута димензија, подразумева се да је произвољна.

У претходном поглављу појам триангулације је дефинисан је преко поделе. Са дефинисаним новим појмовима, те дефиниције је могуће преобликовати.

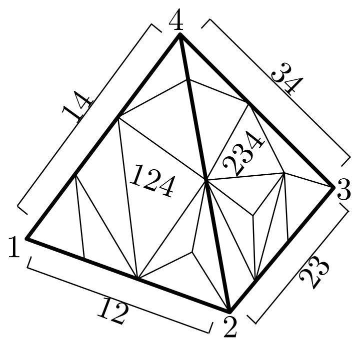
2.2 Потребни појмови

Дефиниција 2.4. Симплицијална подела $\mathcal{T}$ n-симплекса C је *коначан* скуп n-симплекса $\mathcal{T} = \{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_m\}$ за који важи:

- Унија свих S_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ је C;
- За свака два n-симплекса из скупа $\{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_m\}$ важи да им је пресек празан скуп или заједничка страна.

Темена симплицијалне поделе $\mathcal{T}$ су темена свих n-симплекса те поделе.

Када је у питању случај Шпернерове леме у n димензија, за бојење n-симплекса је на располагању $n+1$ боја. Ограничења за примену Шпернерове леме и даље постоје, само су правила сложенија.



Слика 2.1. Пример дозвољених боја на 3-симплексу

Дефиниција 2.5. Шпернерово бојење n-симплекса C са симплицијалном поделом $\mathcal{T}$ је такво да:

(1) користимо $n+1$ боја за бојење темена;

(2) темена $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ су сва различито обојена;

(3) свако теме из $\mathcal{T}$ које припада страни F_D, где је $D \subseteq V(C)$, обојено је у неку од боја темена скупа D.

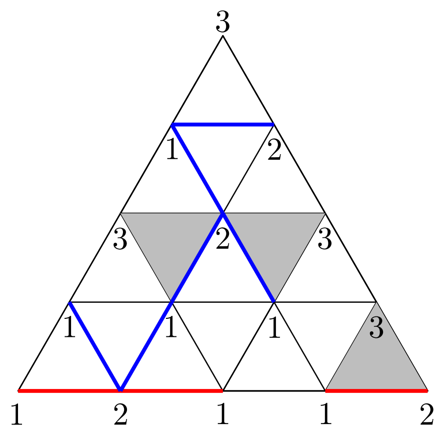
Ради једноставности, теме v_i обојићемо бојом i $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$.

2.3 Тврђење

Теорема 2.1 (*Шӣернерова лема*)**.** Нека је C n-симплекс и $\mathcal{T}$ симплицијална подела истог. Нека је над $\mathcal{T}$ примењено Шпернерово бојење. Тада у $\mathcal{T}$ постоји n-симплекс чија су темена обојена у све боје.

Доказ. Доказаћемо јаче тврђење, да је број таквих n-симплекса непаран, а самим тим бар један постоји. У доказу ћемо користити индукцију по n.
(База индукције) $n = 1$. У питању је дуж v_1v_2, где је v_1 обојен бојом 1, v_2 бојом 2, а темена између произвољно. Закључујемо да је број парова суседних темена која су разнобојни непаран, па је и број тражених 1-симплекса у $\mathcal{T}$ непаран.
(Индуктивна хиӣотеза) Изаберимо произвољно $k \geqslant 1$. Претпоставимо да за $n = k$ важи тврђење.
(Индуктивни корак) Докажимо да тврђење важи за $n = k + 1$.

Назовимо све $(k + 1)$-симплексе из $\mathcal{T}$ осим C собама. Назовимо лице собе вратима ако је скуп боја темена тог лица једнак $[k + 1]$.

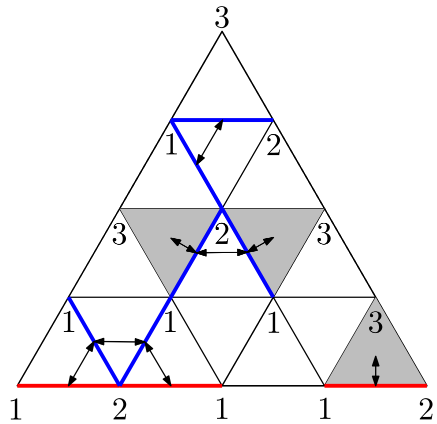


Слика 2.2. Пример $n = 2$, тј. $k = 1$: гранична врата су обојена црвеном, остала плавом; тражене собе су обојене сивом

Назовимо врата на лицима симплекса C *граничним вратима.* Утврдимо парност броја граничних врата. Једино лице које може садржати врата је F_K, $K = \{\, v_i \mid i \in [k + 1] \,\}$, због ограничења Шпернеровог бојења. Међутим, то лице испуњава услове Шпернеровог бојења за k-симплекс, па по индуктивној хипотези на том лицу постоји непаран број k-симплекса чија су темена обојена у свих $k + 1$ боја. Ти симплекси одговарају вратима симплекса C.

Утврдимо максималан број врата које соба може садржати. Претпоставимо да соба има бар једна врата. Боја преосталог темена може бити различита од било које већ искоришћене (тад соба има тачно једна врата) или бити иста као нека већ искоришћена. У том случају, било које лице која садржи та два истобојна темена не може бити названо вратима. Постоје само два лица које не садрже оба истобојна темена, а како су та два лица уједно и врата, максималан број врата једне собе је 2.

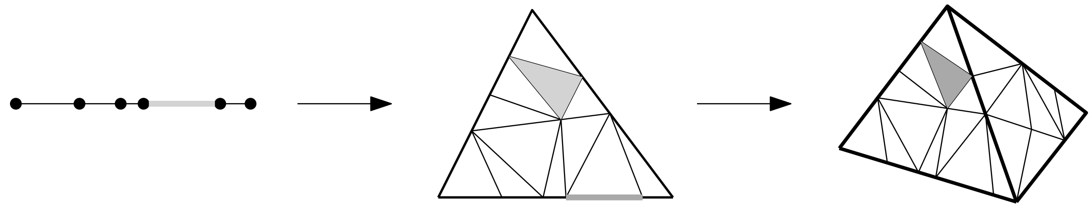
Утврдимо особине пута који се састоји од пролазака кроз врата. Сваки пут започињемо од спољашње стране произвољних врата на F_K чије смо постојање доказали малочас. Прођимо кроз врата и уђимо у собу са друге стране. Или соба има једна врата, па смо пронашли собу са свим теменима различитих боја, или постоје друга врата кроз која можемо проћи. Ако понављамо процедуру, при чему у тренутном кораку не можемо проћи кроз врата којим смо управо ушли, никад нећемо посетити исту собу више од једном, јер је број врата сваке собе максимално 2. Због ограничења броја врата, процедура се одвија на јединствен начин и можемо је завршити или у соби са свим теменима различитих боја, или у спољашњости, пролазећи кроз врата различита од почетних.



Слика 2.3. Путеви, проласци кроз врата

Означимо са A број путева који почињу и завршавају се у спољашности (замена почетка и краја не сматра се новим путем), а са B број путева који почињу у спољашњости, а завршавају се у соби. Свим граничним вратима можемо придружити тачно један пут, при чему пут прве врсте додељујемо двома вратима. Зато укупан број граничних врата можемо написати као $2A + B$. Како је број граничних врата непаран, закључујемо да је B непаран, а самим тим је и број соба са свим теменима различитих боја непаран. □

Овај доказ пружа конструктивни метод проналаска жељених соба. Можемо повезати путеве у странама узастопних димензија, јер соба са свим теменима различитих боја у i-страни одговара граничним вратима у $(i+1)$-страни. Овиме конструишемо „стазе”: почеци су 1-стране чија су темена обојена бојама 1 и 2, а завршеци су n-симплекси чија су сва темена различитих боја. Користећи аргумент из завршног пасуса доказа и знајући да је број 1-страна чија су темена обојена бојама 1 и 2 непаран, закључујемо да постоји бар једна стаза која води до жељеног n-симплекса.



Слика 2.4. Везе између суседних димензија

Са освртом на претходно поглавље, доказ који би потврдио да је број жељених соба непаран изједначио би збир броја граничних и удвостручен број неграничних врата са збиром броја соба са једним вратима и удвострученим бројем соба са двоје врата. Добија се да су број соба са једним вратима (собе са свим теменима различитих боја) и број граничних врата исте парности, а за број граничних врата, по индуктивној хипотези, знамо да је непаран.

3

Примене Шпернерове леме

3.1 Брауерова теорема

У овом делу видећемо примену, наизглед само комбинаторне леме, у алгебарској топологији. Обрадићемо случај теореме који се односи на симплексе, јер њено уопштење излази ван оквира теме овог рада.

Дефиниција 3.1. Нека је $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n+1}\}$ скуп тачака у простору $\mathbb{R}^{n+1}$ и нека за координате сваке тачке из скупа $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{i(n+1)})$ важи

$$v_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{за } i = j; \\ 0, & \text{за } i \neq j. \end{cases}$$

Стандардан n-симплекс је n-симплекс са теменима из гореописаног скупа.

Дефиниција 3.2. *Барицентрична подела 1-симплекса (дужи)* је подела тог симплекса на два мања 1-симплекса једнаке дужине, притом додајући средиште почетног симплекса као ново теме.

Барицентрична подела $\mathcal{T}$ n-симплекса C постиже се у два корака:

(1) Добијамо поделу $\mathcal{T}'$ применивши барицентричну поделу на свим лицима од C.

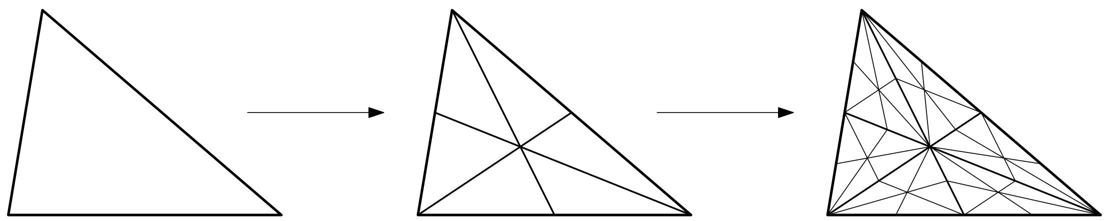
(2) Свако теме сваког $(n-1)$-симплекса добијеног поделом $\mathcal{T}'$ спојимо са барицентром од C, чиме добијамо n-симплексе, а самим тим одређујемо и $\mathcal{T}$.

Оно што је неопходно напоменути је да за барицентричну поделу Δ' n-симплекса Δ важи (видети нпр. лему 6.4 из [1]):

$$\operatorname{diam}(\Delta') \leqslant \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}(\Delta). \tag{3.1}$$

За добијање финијих подела, потребно је рекурентно дефинисати даље кораке барицентричне поделе.

Дефиниција 3.3. Означимо са $\mathcal{T}_1$ барицентричну поделу n-симплекса C из претходне дефиниције. Тада се k-*та барицентрична подела* $\mathcal{T}_k$ ($k \geqslant 2$) добија унијом барицентричних подела свих n-симплекса добијених након примене $\mathcal{T}_{k-1}$ на симплексу C.



Слика 3.1. Барицентричне поделе троугла, кораци $k = 1$ и $k = 2$

Теорема 3.1. Нека је C стандардан n-симплекс. Тада свака непрекидна функција $f : C \to C$ има фиксну тачку.

Доказ. Нека су $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \ldots$ барицентричне поделе од C из дефиниције 3.3. Ако са r_i означимо полупречник најмањег круга који се може описати око сваког симплекса из $\mathcal{T}_i$, због (3.1) важи $r_i \to 0$, када $i \to \infty$.

Нека је $f : C \to C$ произвољна непрекидна функција. Ако постоји теме које је фиксна тачка функције f у свакој подели почев од $\mathcal{T}_i$, доказ је завршен. Претпоставимо сада да ниједно теме ни у једној подели није фиксна тачка.

За $v = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n+1}) \in C$, уведимо ознаку

$$f(v) = f(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n+1}) = (f_1(v), f_2(v), f_3(v), \ldots, f_{n+1}(v)).$$

Важи $v \neq f(v)$, па како из дефиниције стандардног симплекса важи

$$\sum_{i=1}^{n+1} v_i = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(v) = n + 1,$$

то постоји $k \in [n+1]$такво да је $f_k(v) < v_k$.

Сваком темену v додељујемо боју $k^* = \min\{k \mid f_k(v) < v_k\}$. Како свако теме од C има тачно једну координату једнаку 1 и како ниједно није фиксна тачка, важи да је теме v_i обојено бојом i ($\forall i \in [n+1]$), па су сва темена од C обојена различитом бојом.

Посматрајмо поделу $\mathcal{T}_i$. За скуп $A \subseteq [n+1]$ посматрајмо $|A|$-страну од C чији су индекси темена из скупа A. За теме из $\mathcal{T}_i$ које припада тој страни важи да се скуп индекса ненултих координата тог темена поклапа са A. Да би теме v могло да буде обојено у боју k, треба да важи $f_k(v) < v_k$, а како за $v_k = 0$ није могуће испунити тај услов, скуп дозвољених боја темена v се поклапа са A. Према томе, задовољени су услови Шпернеровог бојења за сваку поделу $\mathcal{T}_i$.

По Шпернеровој леми, постоји бар један n-симплекс у C са свим теменима различитих боја. Изаберимо по један такав симплекс у свакој подели $\mathcal{T}_i$ и означимо га са C_i.

Нека је v_k^i теме од C_i обојено бојом k. Посматрајмо низ $(v_1^i)_1^\infty$. Како је овај низ ограничен, он има конвергентан подниз који ћемо означити са (w_1^i). Нека $w_1^i \to w^*$ када $i \to \infty$, где је w^* тачка у C. Тада и одговарајући поднизови низова $(v_2^i), (v_3^i), \ldots, (v_{n+1}^i)$, тј. $(w_2^i), (w_3^i), \ldots, (w_{n+1}^i)$, такође теже w^*, јер растојања између темена теже 0 када $i \to \infty$.

Уведимо ознаку $w^* = (w_1^*, w_2^*, w_3^*, \ldots, w_{n+1}^*)$. Нека w_{km}^i означава m-ту координату од w_k^i. Приметимо да за свако k важи

$$(w_{k1}^i) \to w_1^*, \ \ (w_{k2}^i) \to w_2^*, \ \ (w_{k3}^i) \to w_3^*, \ \ \ldots, \ \ (w_{k(n+1)}^i) \to w_{n+1}^* \tag{1}$$

када $i \to \infty$.
Како је w_k^i обојен бојом k, мора важити

$$f_k(w_k^i) < v_{kk}^i. \tag{2}$$

Зато из (1) и (2) следи $f_k(w^*) \leqslant w_k^*$ $(\forall k \in [n+1])$. Како важи

$$n + 1 = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(w^*) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} w_i^* = n + 1$$

важи и $f_k(w^*) = w_k^*$ а самим тим је и $f(w^*) = w^*$, што је супротно претпоставци, те заиста увек постоји фиксна тачка функције f. □

3.2 Равноправне поделе

У овом делу реч је о поделама где немају сви људи исто вредновање предмета који су пред њима. Обрадићемо случај поделе торте на парчади и поделе соба и станарине. Видећемо да чак и кад више људи фаворизује исту ствар, под не толико строгим условима, увек постоји подела која би све задовољила.

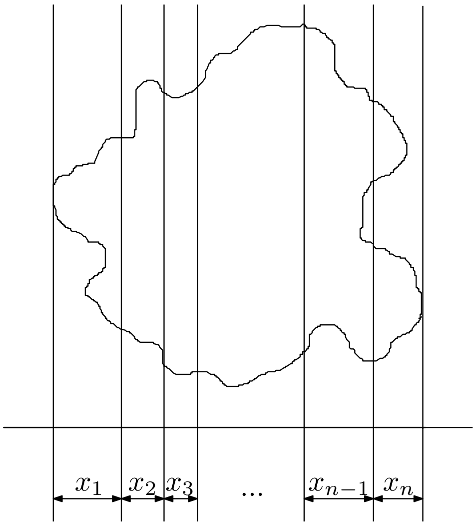
3.2.1 Подела торте

Замислимо да је на столу торта произвољног облика коју треба поделити међу n особа.

Дефиниција 3.4. Када сечемо торту на n парчади, а парчади делимо међу n особа, за поделу кажемо да је *незавидљива* ако свака особа за своје парче мисли да је бар онолико добро колико је добро било чије друго.

Није за свако сечење могуће пронаћи незавидљиву поделу. У нашем случају ћемо поставити ограничења која ће обезбедити да незавидљива подела увек постоји.

Наше сечење торте је врло специфично, где са $n-1$ паралелно постављених ножева сечемо торту на n парчади. Рачунајући да је „ширина” торте једнака 1, свако сечење можемо описати са $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где за свако i важи $x_i \geqslant 0$ и $\sum_i x_i = 1$. Скуп свих сечења торте представља $(n-1)$-симплекс.



Слика 3.2. Пример сечења произвољног облика торте

Дефиниција 3.5. За дато сечење торте, кажемо да особа преферира дато парче ако не мисли да је било чије друго парче строго боље.

У случају да постоје два парчета таква да особа ни за једно од њих не сматра да је строго боље од другог, кажемо да особа преферира оба парчета. Напоменимо да особа увек преферира бар једно парче торте.
Претпоставимо да важе следећи услови:

(1) *(Независност)* За дату особу, њена преференца зависи од ње саме и од поделе торте, али не и од избора других особа.

(2) *(Глад)* Ниједна особа неће преферирати парче чија је ширина 0.

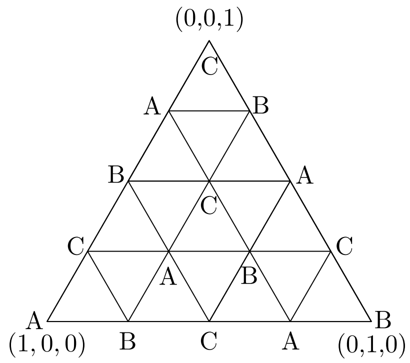
(3) *(Непрекидност одабира)* За конвергирајући низ сечења торте $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \ldots$ који тежи сечењу $\mathcal{X}^*$, ако особа преферира i-то парче у свим $\mathcal{X}_k$, она преферира i-то парче и у $\mathcal{X}^*$.

Теорема 3.2. За особе које су независне, гладне и за чији су одабири непрекидни, увек постоји незавидљива подела.

Прво ћемо обрадити случај $n = 3$, јер је једноставнији од случајева $n \geqslant 4$.

Доказ теореме 3.2 ($n = 3$). Нека је торта ширине 1. Три парчета ширине x_1, x_2 и x_3, за које важи $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$ и $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, деле се међу три особе. По дефиницији, могућа решења представљају $(n-1)$-симплекс, што је троугао у овом случају.

Применимо триангулацију $\mathcal{T}_n$ над тим троуглом. $\mathcal{T}_n$ је триангулација у којој је свако теме описано конфигурацијом $\mathcal{X} = (\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n})$, где су $i, j, k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $3 \nmid n$, $i + j + k = n$. Сваком темену додељујемо A, B или C, у зависности од остатка броја $i + 2j + 3k$ при дељењу са 3, где A одговара остатку 1, B остатку 2, а C остатку 0. Тако обезбеђујемо да је сваки троугао из $\mathcal{T}_n$ означен као ABC.



Над истом триангулацијом примењујемо друго бојење, и то бојама 1, 2, 3. Боју темена одређујемо као одговор на постављено питање:

„*Које од три парчета би изабрао ако би торта била исечена на начин задат конфигурацијом темена?*"

У случају да постоји више од једног преферираног парчета, насумично се бира једно од њих.
Особа којој се питање поставља одређена је ознаком A, B или C коју теме поседује.

У теменима $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$, два парчета су празна, па особа којој се поставља питање по дефиницији бира непразно парче. Како је у сваком темену другачије парче непразно, сва три темена великог троугла су обојена различитом бојом. Слично томе, у теменима облика $(x,\ 1-x,\ 0)$, $0 < x < 1$, никад неће бити одабрано последње парче, према томе, боја додељена том темену може бити или боја темена $(1, 0, 0)$ или боја темена $(0, 1, 0)$. Аналогно закључујемо и за темена облика $(0, x, 1-x)$ и $(1-x, 0, x)$, $0 < x < 1$. Ови услови задовољавају услове Шпернеровог бојења за троугао.

По Шпернеровој леми, у триангулацији $\mathcal{T}_n$ мора постојати троугао са свим теменима различитих боја. Како је сваки троугао из $\mathcal{T}_n$ означен као ABC, овиме смо пронашли три *приближна* сечења где су различите особе изабрале различито парче.

Како бисмо три приближна сечења довели до једног идеалног, потребно је да примењујемо све „финије” триангулације. Посматрајмо троугао који има сва темена различитих боја у фиксној триангулацији $\mathcal{T}_n$. Постоји само 6 пермутација парчади које особе могу изабрати: $\mathrm{A_1B_2C_3}$, $\mathrm{A_1B_3C_2}$, $\mathrm{A_2B_1C_3}$, $\mathrm{A_2B_3C_1}$, $\mathrm{A_3B_1C_2}$ и $\mathrm{A_3B_2C_1}$. Како постоји коначан број пермутација, а бесконачан број триангулација, једна од ових пермутација мора се бесконачно понављати. Нека је то, без умањења општости, $\mathrm{A_1B_2C_3}$.

У триангулацијама $\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_8, \mathcal{T}_{32}, \ldots$ посматрајмо конфигурације темена A троугла са свим теменима различитих боја. Нека је то низ $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \ldots$. Како је низ ограничен, он има конвергентан подниз који конвергира ка, рецимо, $\mathcal{X}^*$. Како дужине страница троуглова сваком следећом триангулацијом постају троструко мање, њихова дужина тежи ка 0 у бесконачности. Самим тим и конфигурације темена B и C теже $\mathcal{X}^*$, па $\mathcal{X}^*$ представља сечење којим су сви задовољни. $\square$

За потребе доказа у случају $n \geqslant 4$, потребан је другачији начин поделе, јер поделу описану у претходном доказу није лако уопштити. Зато ћемо користити појам барицентричне поделе из дефиниција 3.2 и 3.3.

Баш као што је у случају $n = 3$ означавање извршено с намером да сваки троугао из $\mathcal{T}$ буде означен као ABC, тако је и у случају $n \geqslant 4$ неопходно то извршити. Овог пута ћемо темена означавати са $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_n$.

Доказ теореме 3.2 $(n \geqslant 4)$. Претпоставимо да смо извршили k корака барицентричне поделе. Ако торту делимо међу n особа, посматрамо одговарајући $(n-1)$-симплекс. Темена која су постојала и у $\mathcal{T}_{k-1}$ означимо са A_1. Сва темена која постоје у $\mathcal{T}_k$, а нису постојала у $\mathcal{T}_{k-1}$ су барицентри $(n-1)$-симплекса из $\mathcal{T}_{k-1}$. Вратимо се на ставку (3) дефиниције 2.5. Посматрајмо још увек неозначена темена. Ако дато теме означимо са x, а са C' $(n-1)$-симплекс из којег је x настао, нека је $m = \min\limits_{x \in F(D)} |D|$, где $D \in V(C')$. Означимо свако теме одговарајућим A_m. Докажимо да сваки $(n-1)$-симплекс из $\mathcal{T}_k$ има сва темена различитих ознака.

Лема 3.1. Поштујући гореописано означавање, сваки $(n-1)$-симплекс из $\mathcal{T}_k$ има сва темена различитих ознака.

Доказ. Приметимо да се означавања два $(n-1)$-симплекса из $\mathcal{T}_k$ који настају од различитих $(n-1)$-симплекса из $\mathcal{T}_{k-1}$ одвијају независно. Зато ћемо се фокусирати само на један $(n-1)$-симплекс из $\mathcal{T}_{k-1}$ и његову барицентричну поделу. Посматрани симплекс означавамо са C'.

Сва темена од C' су означена са A_1. Због описаног означавања, најбоље је барицентричне поделе извршавати итеративно, најпре над свим 1-симплексима, па над 2-, 3-, $\dots, (n-1)$-симплексима, примењујући само корак (2) из дефиниције 3.2, јер је корак (1) већ обезбеђен итеративно. Другачије речено, након примењене барицентричне поделе над 1-симплексима, итераетивно додајемо барицентре симплекса виших димензија и спајамо одговарајућа темена Приметимо да се овако не могу спојити два темена настала из симплекса истих димензија, што ће бити кључно за завршетак леме.

Пратећи кораке итерације и поштујући означавање, темена настала барицентричном поделом 1-симплекса добијају ознаку A_2, барицентар сваког 2-симплекса добија ознаку A_3, тј. барицентар сваког k-симплекса $(2 \leqslant k \leqslant n-1)$ добија ознаку A_{k+1}. Како је показано да не могу бити спојена темена настала из симплекса истих димензија, закључујемо да не могу бити спојена темена која носе исту ознаку, па коначан $(n-1)$-симплекс заиста има сва темена различитих ознака. □

Сада бојимо $(n-1)$-симплекс бојама из скупа $[n]$. Аналогно случају $n=3$, постављамо исто питање особи i ако је ознака темена A_i. Истим резоновањем добијамо да је бојење $(n-1)$-симплекса Шпернерово.

Применом Шпернерове леме доказујемо постојање $(n-1)$-симплекса са свим теменима различитих боја. Исто тако смо пронашли n *приближних* сечења где свако бира различито парче. Постављањем истог конвергентног низа и користећи се непрекидношћу одабира, гарантујемо да постоји тачка која испуњава услове незавидљиве поделе. □

Процедуром описаном у доказу могуће је обликовати алгоритам који би доводио до приближних сечења којим би сви били задовољни. Наиме, за унапред одабрано ε, могуће је пронаћи сечење где свака особа сматра своје парче најбољим до на ε-толеранцију у ширини парчади. За проналазак адекватног сечења потребно је применити поделу $\mathcal{T}$ где је страница елементарног симплекса мања од ε, а праћење стазе из доказа теореме 2.1 нам обезбеђује проналазак траженог симплекса. С обзиром на ε-толеранцију, одабир било ког темена тог симплекса представља пример незавидљиве поделе.

Приметимо да није неопходно обојити цео симплекс, већ само темена у окружењу стазе коју пратимо. Иако је број корака алгоритма ограничен са бројем симплекса у $\mathcal{T}$, могуће је да ће успешно завршити много раније.

3.2.2 Подела заједничког апартмана

Замислимо да имамо n станара који заједно живе у апартману са n соба са унапред дефинисаном ценом станарине. Сваки од станара би добио једну собу, али станарину не би обавезно делили равноправно. Како су собе (али не и власници) унапред задате и непроменљиве, а подела станарине неодређена, на сличан начин као у подели торте дефинишемо независљиву поделу.

Дефиниција 3.6. Када апартман са n соба делимо међу n станара при чему сваком припада тачно једна соба, за поделу кажемо да је *независљива* ако постоји подела станарине за коју сви станари бирају различите собе.

Није могуће за сваки апартман и сваки скуп људи пронаћи поделу која обезбеђује да сви буду задовољни. Зато је неопходно претпоставити неке услове како бисмо гарантовали проналазак независљиве поделе. Претпоставимо да важе следећи услови:

(1) *(Добар апартман)* При свакој подели станарине, сваком станару је прихватљива бар једна соба.

(2) *(Шкртост)* Сваки станар радије бира бесплатну собу него собу са позитивном станарином.

(3) *(Непрекидност одабира)* Ако станар преферира собу за конвергентан низ њене станарине који тежи c, преферираће исту собу и за цену c.

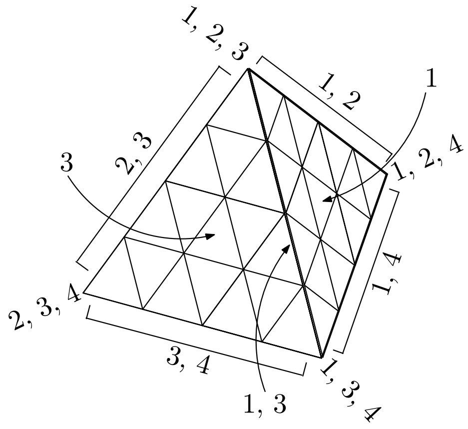
Теорема 3.3. За станаре који живе у добром апартману, који су шкрти и чији су одабири непрекидни, увек постоји независљива подела.

Како смо већ одрадили уопштен случај за торту, није неопходно радити посебно случај $n = 3$ за станаре.

Слично као у случају торте, нека је укупна станарина 1 и нека је x_i цена i-те собе. За свако i важи $x_i \geqslant 0$ и $\sum_i x_i = 1$. Једну поделу обележавамо са $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, па скуп свих подела представља $(n-1)$-симплекс који ћемо назвати C.

Применимо барицентричну поделу $\mathcal{T}_k$ $(k \in \mathbb{N})$ на C. Означимо темена ознакама $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_n$ на исти начин као у доказу теореме 3.2. То што је апартман добар нам обезбеђује да одговор на питање из доказа теореме 3.2 увек постоји.

Међутим, како станари сада преферирају бесплатне собе (упоредити са непреферирањем празних парчади), бојење више не испуњава услове Шпернеровог бојења. Сада, свако теме од C може бити обојено у све, изузев једне боје. Слично, свако теме који припада некој $(n-1-m)$-страни од C $(1 \leqslant m < n-1)$, а не припада ниједној $(n-1-m-1)$-страни од C може бити обојено у неку од тачно m боја.



Слика 3.3. Бојење које важи за станаре ($n = 4$)

Постоје два приступа овом проблему:

(1) Доказати да при овим условима постоји $(n-1)$-симплекс који има сва темена различите боје.

(2) Преобликовати C тако да испуњава услове Шпернеровог бојења, па применити Шпернерову лему.

Доказ ставке (1). Користићемо исте појмове као у доказу теореме 2.1. Означимо са C наш $(n-1)$-симплекс. Доказаћемо да у C постоје тачно једна гранична врата и бар један $(n-1)$-симплекс чији са свим теменима различитих боја. Осим доказивања његовог постојања, конструисаћемо и стазу којој припада.

Означимо боју темена v_n са b_0. Посматрајући скупове дозвољених боја 1-страна које садрже то теме, тачно један од њих не садржи боју b_0. Ниједна друга 1-страна не може бити кандидат за врата, јер би изоставила боју из разлике скупова дозвољених боја темена v_n и дозвољених боја те 1-стране.

Ако је боја одговарајуће 1-стране b_1, аналогно постоји тачно једна 2-страна чији скуп дозвољених боја не садржи b_1. Настављајући процедуру добијамо да без обзира на боју $(m-1)$-стране увек постоји m-страна $(1 \leqslant m \leqslant n-2)$ са скупом дозвољених боја који не садржи ту боју. Тиме смо доказали да постоје јединствена гранична врата.

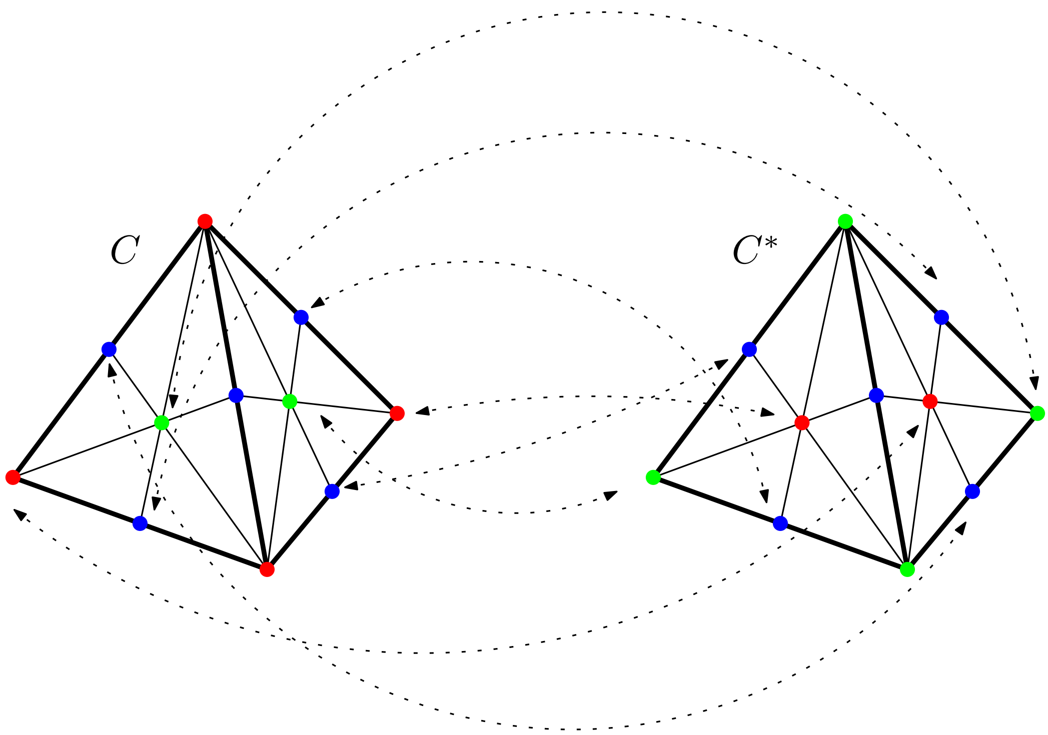
Како постоје само једна гранична врата, поштујући процедуру из теореме 2.1 морамо доћи до $(n-1)$-симплекса са свим теменима различитих боја.

Стазе правимо на исти начин: соба са свим теменима различитих боја у i-страни одговара јединим граничним вратима у $(i+1)$-страни. С обзиром на јединственост граничних врата у свакој страни, овиме смо конструисали једну стазу од 1-стране чија су темена обојена бојама 1 и 2 до траженог $(n-1)$-симплекса. $\square$

Приметимо да у барицентричној подели $\mathcal{T}$ могу постојати и други $(n-1)$-симплекси чија су сва темена различитих боја, међутим, описана процедура не обезбеђује њихов проналазак.

За ставку (2) ћемо дати ћемо представити само идеју доказа.

Ставка (2). Упоредимо Шпернерово бојење и бојење за станаре. Заједничко им је да темена која не припадају ниједној m-страни ($0 \leqslant m < n-1$) симплекса C могу бити обојена произвољно. За Шпернерово бојење важи да свако теме из $\mathcal{T}$ које припада страни F_D ($D \subseteq V(C)$) може бити обојено само у боје темена скупа D, док за бојење за станаре важи да ниједно теме из $\mathcal{T}$ које припада страни F_D не сме бити обојено ни у једну од боја темена скупа D.



Слика 3.4. Бијекција између $\mathcal{T}_1(C)$ и $\mathcal{T}_1(C^*)$
Стрелицама су спојена одговарајућа темена која се виде на обе слике

Конструишимо симплекс C^* који на почетку садржи сва темена као и C, са истим ознакама. Важи и $V(C) = V(C^*)$. Применимо један корак барицентричне поделе на C и C^*. Направимо бијекцију између темена из $\mathcal{T}_1(C)$ и $\mathcal{T}_1(C^*)$, где се барицентар од C слика у барицентар од C^*, а барицентар стране F_D $(D \subseteq V(C), D \neq V(C))$ симплекса C се слика у барицентар стране F_{D^*} симплекс C^*, где је $D^* = V(C) \setminus D$.

Нека се успостављеним пресликавањем преносе ограничења у бојењу, док ознаке остају непромењене.

За страну F_{D^*} важи да је скуп дозвољених боја једнак скупу боја темена скупа $V(C^*) \setminus D^*$, што је скуп боја темена скупа D. Приметимо да сада важе услови Шпернеровог бојења за симплекс C^*.

Ако наставимо путем ставке (1), доказ теореме 3.3 можемо спровести исто као доказ теореме 3.2.

За ставку (2), детаљна прича о појму дуализације симплекса (конструкција C^*) налази се у раду [5]. Даљом барицентричном поделом оба симплекса, уз успостављено пресликавање где се ограничења у бојењу одржавају, може се показати да C^* заиста задовољава услове Шпернеровог бојења. Проналаском $(n-1)$-симплекса са свим теменима различитих боја у C^*, бијекцијом се проналази одговарајући $(n-1)$-симплекс у C, такође са свим теменима различитих боја.

Сада када је успостављено Шпернерово бојење и примењена Шпернерова лема, алгоритам се може применити на исти начин као и при подели торте, бирајући ε као праг толеранције, примењујући довољно ситну поделу $\mathcal{T}$ и пратећи стазу која води до задовољавајуће поделе станарине.

Закључак

У раду смо настојали да прикажемо Шпернерову лему заједно са могућностима примене, анализирајући неколико радова објављених у овој области. Даљи рад у оквиру ове теме могао би се заснивати на идентификовању других подручја у којима би Шпернерова лема могла наћи своју примену.

У избору теме, стручној подршци у току израде овог рада, али пре свега у систематичном и надахнутом приступу математичким проблемима који сам имао прилику да усвајам, захвалност дугујем мојој менторки др Соњи Чукић, професорки анализе са алгебром.

Литература

[1] M. A. Armstrong, *Basic topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag

[2] S. Das, T. Szabó, *Sperner's lemma and its applications*, Extremal Combinatorics, FU Berlin, WiSe 2017–18.

[3] A. Maliwal, *Sperner's Lemma, The Brouwer Fixed Point Theorem, the Kakutani Fixed Point Theorem, and Their Applications in Social Sciences*, The University of Maine 2016.

[4] F. E. Su, *Rental harmony: Sperner's lemma in fair division*, Mathematical Association of America 1999.

[5] J. W. Vick, *Homology Theory.* Springer-Verlag, New York, 1994

[6] M. Xu, *Sperner's lemma*, Berkeley Mathematics Department