Matematička gimnazija u Beogradu
Dodatna nastava za I razred, šk.g. 2004/05

Zadaci sa takmičenja u Rumuniji

1. Izbor za JBMO

1. Dat je skup od 2005 različitih prirodnih brojeva. Dokazati da se među njima mogu naći dva takva da njihov zbir ne deli zbir preostalih.

2. Neka je E središte stranice CD kvadrata $ABCD$. Neka je M tačka unutar kvadarata takva da je
$$\angle MAB = \angle MBC = \angle BME = x.$$
Naći ugao x.

3. Presek dva jedinična kvadrat paralelnih stranica je pravougaonik površine $1/8$. Naći maksimalno i minimalno rastojanje između centara ovih kvadrata.

4. Pet realnih brojeva apsolutnih vrednosti ne većih od 1 čija je suma jednaka 1 zapisana su na krugu. Dokazati da se među njima mogu naći 3 uzastopna a, b, c (tim redom) takva da je svaki od zbirova $a+b, b+c$ i $a+b+c$ nenegativan.

5. Neka su dati prosti brojevi $p_1 < p_2 < \cdots < p_{31}$. Dokazati da ako 30 deli sumu njihovih četvrtih stepena, tada među njima postoje tri uzastopna prosta broja.

6. Dva kruga k_1 sa centrom u O_1 i k_2 sa centrom u O_2 različitih poluprečnika seku se u tačkama A i B. Tangente u tački A na krug k_1 i u tački B na krug k_2 seku se u tački M. Dokazati da se iz tačke M oba kruga vide pod istim uglom.

7. Naći sve cele brojeve n za koje je broj $\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}}$ racionalan.

8. Neka je A neprazan podskup od $\mathbf{R}$ takav da ako je broj $x+y$ u A, tada je i broj xy takođe u A. Dokazati da je $A = \mathbf{R}$.

9. Neka je $ABCDEF$ šestougao kod koga je $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$ i dijagonale AD, BE, CD su konkurentne. Dokazati da se oko šestougla može opisati krug.

10. Neka je ABC proizvoljan trougao. Krug koji prolazi kroz B i C seče stranice AB i AC u tačkama D i E, redom. Projekcije tačaka B i E na pravu CD su tačke B' i E', redom, a tačaka D i C na pravu BE tačke D' i C', redom. Dokazati da su tačke B', D', C' i E' konciklične.

11. Poslednje četiri cifre kvadrata prirodnog broja su iste. Dokazati da su onda sve one nula.

12. Da li se ravan može obojiti u dve boje tako da svaka prava sadrži tačke obe boje?

13. Neka je n prirodan broj. Dokazati da ne postoje prirodni brojevi x i y takvi da je
$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{4n+2}.$$

14. Neka je $ABCD$ romb, čiji je presek dijagonala tačka O. Tačka P je data u unutrašnjosti romba, ali ne na njegovim dijagonalama. Neka su tačke M, N, Q, R projekcije tačke P na stranice AB, BC, CD, DA, tim redom. Neka se simetrale stranica MN i RQ seku u tački S, a simetrale stranica NQ i MR u tački T. Dokazati da su tačke P, S, T, O temena pravougaonika.

2. Savezna takmičenja za 8. i 9. razred

1. Neka je A skup realnih brojeva koji zadovoljava uslove:

   (a) $1 \in A$;

   (b) $x \in A \Rightarrow x^2 \in A$;

   (c) $x^2 - 4x + 4 \in A \Rightarrow x \in A$.

   Dokazati da je $2000 + \sqrt{2001} \in A$.

2. Odrediti sve trojke (x, y, z) racionalnih brojeva za koje su $x + 1/y$, $y + 1/z$ i $z + 1/x$ celi.

3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje važi $ab + bc + ca = 1$. Dokazati da je

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}.$$

4. Naći sve prirodne brojeve a i b takve da za sve realne $x, y \in [a, b]$ važi $1/x + 1/y \in [a, b]$.

5. Neka je P ravan. Dokazati da ne postoji funkcija $f : P \to P$ takva da je zasvaki konveksan četvorougao $ABCD$ četvorougao $f(A)f(B)f(C)f(D)$ nekonveksan.

6. Dokazati da su središta visina trougla kolinearna akko je trougao pravougli.

7. Neka su m, n prirodni brojevi. Dokazati da se broj $5^n + 5^m$ može prikazati kao suma dva potpuna kvadrata akko je $n - m$ paran.

8. Na konferenciji učestvuje 6 osoba. Među njima ima sedam parova prijatelja i u svakoj grupi od tri osobe postoje bar dva prijatelja. Dokazati da:

   (a) postoji osoba koja ima bar 3 prijatelja;

   (b) postoje 3 osobe tako da su svake dve od njih prijatelji.

9. Neka su p, q prirodni brojevi, $1 \leq q \leq p$ i $a = (\sqrt{p^2 + q} + p)^2$. Dokazati da je a iracionalan i da je $\{a\} > 3/4$.

10. Neka je $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ definisna sa $f(n) =$ *broj kvadrata u intervalu* $[n^2, 2n^2]$. Dokazati da je f rastuća i "na".