Разни задаци

Додатна настава за III разред Математичке гимназије, април 2004.

Предавач: Владимир Балтић

1. Нека су $p, q \in \mathbb{R}^+$ за које важи $p + q = 1$. Доказати да је $(1-p^n)^m + (1-q^m)^n \geqslant 1$ за $m, n \in \mathbb{N}$.

2. Доказати да су следећи бројеви сложени:
а) $15^4 + 4^{15}$; **б)** $972^2 + 235^2 = 1000009$; **в)** $989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320$.

3. Доказати да за свако природно $n > 2$ постоји n различитих природних бројева, таквих да је сума њихових кубова једнака кубу природног броја.

4. Приметимо да је $8^3 - 7^3 = (2^2+3^2)^2$ и $105^3 - 104^3 = (9^2+10^2)^2$. Показати да ако је разлика два узастопна куба квадрат, онда је то квадрат суме два узастопна квадрата.

5. Доказати једнакост $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j}\binom{n}{j} \cdot 2^j$.

6. **а)** Наћи све природне бројеве $x \neq y$ који испуњавају једнакост $x^y = y^x$.
б) Наћи све позитивне рационалне бројеве $x \neq y$ за које важи $x^y = y^x$.

7. **а)** Дата су четири произвољна цела броја a, b, c и d. Од њих образујемо четири нова броја $a_1 = |a-b|, b_1 = |b-c|, c_1 = |c-d|$ и $d_1 = |d-a|$. Затим од њих на исти начин образујемо нова четири броја a_1, b_1, c_1 и d_1. Доказати да ћемо после неколико корака, понављајући горњи поступак формирања нова четири броја, доћи до четворке $0, 0, 0, 0$.
б) Да ли тврђење важи ако су бројеви рационални или ирационални?
Пример: $(32, 1, 110, 7) \to (31, 109, 103, 25) \to (78, 6, 78, 6) \to (72, 72, 72, 72) \to (0, 0, 0, 0)$.

8. Полином $P_n(x)$ је n–тог степена и за њега важи $P_n(x) = 2^x$ за $x = 1, 2, \ldots, n+1$. Наћи $P_n(n+2)$.

9. У равни је дато $n \geqslant 2$ правих, од којих никоје три не пролазе кроз исту тачку и никоје две нису паралелне. Доказати да је могуће у сваком делу, на које те праве деле раван, уписати цео број, различит од 0 и не већи по апсолутној вредности од n, тако да је са сваке стране сваке од тих права збир бројева једнак 0.

10. Познато је да функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дата са $f(n) = n^2 - n + 41$ узима као вредности просте бројеве за $n = 1, 2, \ldots, 40$. Доказати:
а) $f(n)$ није никада дељиво простим бројем мањим од 41;
б) $f(n)$ није никада потпун квадрат, изузев за $n = 41$;
в) за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји број m такав да је испуњена једнакост $f(m) = f(n) \cdot f(n+1)$;
г) $f(1722)$ је најмања вредност функције f са четири фактора који су прости бројеви и који не морају бити различити.

11. Дат је низ $\{a_n\}$: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n$ је најмањи цео број већи од a_{n-1} са особином да ниједна тројка (a_i, a_j, a_k), $0 \leqslant i < j < k \leqslant n$ не чини аритметички низ. Доказати да су чланови низа $\{a_n\}$ они и само они бројеви који у тринарном запису немају цифру 2.

12. Нека је a природан број и нека је низ $\{x_n\}$ дефинисан на следећи начин:
$$x_1 = a,\ x_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{x_n}{2}, & \text{ako je } x_n \text{ paran broj} \\ \dfrac{3x_n+1}{2}, & \text{ako je } x_n \text{ neparan broj} \end{cases} \quad \text{за сваки природан број } n.$$
Доказати да је бар један члан низа $\{x_n\}$ паран број.

13. Показати једнакост $[\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] + \cdots + [\sqrt[n]{n}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \ldots [\log_n n]$.

14. Дат је скуп $S = \{1, 2, \ldots, 1991\}$. Наћи највећи подскуп $A \subseteq S$ тако да од свака три елемента из A могу да се изаберу два која нису узајамно прости.

15. Дати су узајамно прости природни бројеви m и n. У сваком пољу бесконачне шаховске табле записан је по један реалан број, тако да важи: збир бројева у сваком правоугаонику $m \times n$ једнак је нули. Доказати да су бар два од записаних бројева међусобно једнаки.

Порекло задатака

2. а) 1.9. (ЧССР, 1979.) - "Зарубежние математические олимпиади", И.Н.Сергејев
2. б) 44.147. - "Сборник задач по специаљному курсу елементарној математики ", Л.С.Моденов
2. ц) М.1414. - Квант
3. М.1102. - Квант
4. 8. Miscellaneous Problems 49. - Problem Books in Mathematics "Polynomials", E.J.Barbeau
190. - American Mathematical Monthly 57(1950)
М.960. - Квант
5. 1.43. a) - "Combinatorial Problems and Exercises", Laszlo Lovasz
6. 168.35. - "Изабрание задачи и теореми елементарној математики", Д.О.Шкљарски, Н.Н.Ченцов, И.М.Јаглом
7. 132.29. - "Изабрание задачи и теореми елементарној математики", Д.О.Шкљарски, Н.Н.Ченцов, И.М.Јаглом
8. 29. ИМО, Аустралија 1988.
9. М.1189. - Квант, Д.В.Фомин
10. 9 (стр. 251.) - "Задаци из математике са пријемних испита на техничким факултетима ", Р.Јанић, Д.Тошић
11. IV 4. - Републичко БиХ 1991, З.Фарук
12. IV 1. - Савезно Југ 1991. у Ваљеву
13. М.1414. - Квант
14. IV 2. - Републичко БиХ 1991, В.Кешељ
15. II 4. - Савезно Југ 1988. у Скопљу