Dodatna nastava iz matematike u MG-u

PREBROJAVANJA

Predavač: Aleksandar Pejčev

1. Na polici ima 15 knjiga. Na koliko načina je moguće izabrati 6 knjiga tako da da nikoje dva nisu jedna pored druge.

2. Data je jednačina $x_1 + \cdots + x_k = n$. Koliko rešenja ima u skupu prirodnih, a koliko u skupu celih brojeva? (n i k su dati prirodni brojevi.)

3. Na krugu je dato n tačaka. Na koliko najviše delova dele krug sve prave odredjene tim tačkama?

4. Dokazati da n pravih od kojih se nikoje tri ne seku u jednoj tački i nikoje dve nisu paralelne dele ravan na $\frac{n^2+n+2}{2}$ oblasti. Dokazati da n ravni od kojih svake tri imaju samo jednu zajedničku tačku, a bilo koje četiri ravni iz tog skupa nemaju zajedničkih tačaka, dele prostor na $\frac{n^3+5n+6}{6}$ oblasti.

5. U prostoru je dat skup S od 100 tačaka, tako da nikoje 4 od njih ne pripadaju jednoj pravoj. Dokazati da ne postoji više od $4 \cdot 101^2$ tetraedara sa temenima iz S, takvih da svaka dva imaju najviše dva zajednička temena.

6. Dat je skup X od n elemenata Posmatrajmo sve uredjene parove (A, B) podskupova skupa X i označimo sa $k(A, B)$ broj elemenata skupa $A \bigcap B$. Dokazati da je suma svih brojeva $k(A, B)$ jednaka $n4^{n-1}$.

7. Na šahovskom turniru učestvovali su majstori i velemajstori. Svaka dva učesnika turnira odigrala su po jednu zajedničku partiju. Ako je svaki od učesnika tačno polovinu svojih poena osvojio u partijama koje je igrao protiv majstora, dokazati da je broj učesnika na turniru potpun kvadrat.

8. U senatu ima 30 senatora. Svaki je prijatelj sa tačno 6. Na koliko načina možemo izabrati trojicu tako da su svaka dva prijatlji ili neprijatelji?

9. U društvu od n ljudi svako ima tačno m poznanika. Pri tom svaka dva koja se poznaju imaju tačno k, a svaka dva koja se ne poznaju tačno l zajedničkih poznanika. Dokazati jednakost
$$m(m-1-k) = l(n-m-1).$$
Podrazumeva se da je poznanstvo simetrična relacija.

10. Date su sume
$$S_1 = \left[\frac{1^2}{n}\right] + \left[\frac{2^2}{n}\right] + \ldots + \left[\frac{(n-1)^2}{n}\right]$$
$$S_2 = \left[\sqrt{n}\right] + \left[\sqrt{2n}\right] + \ldots + \left[\sqrt{(n-1)n}\right].$$
Dokazati da je $S_1 + S_2 \geq (n-1)^2$, pri čemu jednakost važi akko n nije deljivo kvadratom nijednog prostog broja.

11. Dokazati sledeće identitete za binomne koeficijente:
    (a) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$;
    (b) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$;
    (c) $\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2i} = \sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2i+1} = 2^{n-1}$;
    (d) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.