Математичка гимназија у Београду
Додатна настава за други разред
13.11.2005.

Неједнакости

Миливоје Лукић

Бернулијева неједнакост: Нека је $\alpha > 1$ и $x > -1$, $x \neq 0$. Тада важи

$$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x. \tag{1}$$

Лема о пермутацијама: Нека је $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ и $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$. За произвољну пермутацију π скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ је

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_{\pi(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{2}$$

Ако је низ $(x_i)_{i=1}^n$ строго растући, у десној неједнакости једнакост важи ако и само ако је $y_{\pi(i)} = y_i$ за све $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, а у левој неједнакости једнакост важи ако и само ако је $y_{\pi(i)} = y_{n+1-i}$ за све $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$

Чебишевљева неједнакост: За све $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ важи

$$n \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1-i} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right) \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{3}$$

при чему једнакости важе ако и само ако је $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ или $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$.

1. Доказати да за свако природно n важи

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < \frac{7}{4}.$$

2. Доказати да за свако реално $\alpha > 1$, и свако природно n важи

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^\alpha} < \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

   Упутство: Доказати да за свако $i \geq 2$ важи $\frac{1}{i^\alpha} < \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{i^{\alpha-1}} - \frac{1}{(i-1)^{\alpha-1}}\right)$.

3. Одредити $[S]$, где је

$$S = \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

4. Нека су a, b, $c > 0$. Доказати да из $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ следи

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+bc} \geq \frac{3}{2}.$$

5. Нека су x_1, x_2, $\ldots$, x_n позитивни бројеви и y_1, $y_2, \ldots$, y_n једна њихова пермутација. Тада је

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

6. (ИМО1991.предлог) Нека је $n \geq 2$ природан број, и нека бројеви p, a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_n задовољавају $1/2 \leq p \leq 1$, $0 \leq a_i$, $0 \leq b_i \leq p$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$. Доказати неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{j=1,2,\ldots,n,j\neq i} a_j \leq \frac{p}{(n-1)^{n-1}}.$$

7. Нека су a, b, c, $d \geq 0$, $a+b+c+d=1$. Доказати да је

$$abc + bcd + abd + acd \leq \frac{1}{27} + \frac{176abcd}{27}.$$

8. Ненегативни реални бројеви p, q, r задовољавају $p+q+r=1$. Доказати да важи

$$7(pq+qr+rp) \leq 2 + 9pqr.$$

9. Нека су x, y, $z > 0$, и $x+y+z=1$. Доказати да је

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

10. Нека су x_1, x_2, …, $x_n \in (a,b)$. Доказати да важи

$$n^2 \leq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \leq n^2 \frac{(a+b)^2}{4ab}.$$

11. (БМО2002.предлог) Нека су x, y, z позитивни реални бројеви такви да је $x+y+z \geq 1$. Доказати

$$\frac{x\sqrt{x}}{y+z} + \frac{y\sqrt{y}}{x+z} + \frac{z\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

12. (Шурова неједнакост) Доказати да за a, b, $c > 0$ важи

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2.$$

13. Нека је x, y, $z \geq 0$, $x+y+z=1$. Доказати да је

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}.$$

14. (ИМО1998.предлог) Нека су x, y, $z > 0$ такви да је $xyz = 1$. Доказати

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

15. (ИМО1998.предлог) Нека су a_1, a_2, …, $a_n > 0$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$. Доказати да је

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n (1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_n)}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}.$$

16. (ИМО1997.предлог) Нека су $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} = 0$ реални бројеви. Доказати

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\left(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}\right).$$