Matematička gimnazija u Beogradu
Dodatna nastava za I razred, šk.g. 2004/05

Pripremni zadaci

predavač: Marko Radovanović

1. Dokazati da broj
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1},$$
nije ceo ni za jedan prirodan broj n.

2. Na krugu je dato 20 jedinica i 30 dvojki tako da nikoje tri iste cifre nisu uzastopne. Naći sumu proizvoda svih uzastopnih trojki.

3. Na kružnici su u proizvoljnom poretku zapisani brojevi od 1 do 100. Za svaka tri uzastopna broja na kružnici izračunava se njihova suma. Dokazati da među svim tim sumama postoje bar dve koje se razlikuju za ne više od 3 i dve koje se razlikuju za ne manje od 3.

4. Sa koliko sa nula može završavati broj
$$1^n+2^n+3^n+4^n \ (n \in \mathbf{N})?$$

5. U kvadrat 10×10 raspoređeni su svi brojevi od 1 do 100. U svakoj koloni izabran je treći najveći broj. Dokazati da je suma svih izabranih brojeva ne manja od sume brojeva bar jedne kolone.

6. Za pozitivne brojeve $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ važi $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n$. Dokazati nejednakost
$$x_0+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}-x_n} \geq x_n+2n.$$

7. Neka je suma nekih pozitvnih brojeva jednaka sumi njihovih kvadrata. Šta je veće suma njihovih trećih ili njihovih četvrtih stepena?

8. Na tabli je napisan broj 1994. U svakom koraku ovom broju možemo dodati njegovog najvećeg prostog delioca. Dokazati da se ovim operacijama može dobiti broj deljiv sa 1995.

9. Ravan je obojena sa dve boje. Dokazati da se u njoj može naći istobojni pravougli trougao čija je hipotenuza jednaka 2 i čiji je jedan oštar ugao jednak 60^o.

10. Naći maksimalan broj troelementnih podskupova skupa od 8 elemenata takvih da presek svaka dva od njih ne sadrži 2 elementa.

11. U cilju pripreme za predstojeće Republičko takmičenje učenik je rešavao zadatke u periodu od 5 nedelja. Tokom on je svakog dana radio bar jedan zadatak, ali ne više od 10 zadataka nedeljno.
(a) Dokazati da je student za nekoliko uzastopnih dana rešio tačno 19 zadataka.
(b) Ako je $1 \leq n \leq 34$ prirodan broj, dokazati da je tokom nekih uzastopnih dana student rešio tačno n zadataka.

12. Neka je $A_0A_1A_2\ldots A_n$ pravilan n-tougao. Naći raspored $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$ njegovih temena tako da je dužina linije $B_0B_1B_2\ldots B_n$ maksimalna.

13. Dat je pravougaonik koji ima 100 redova i 1997 kolona. Pravougaonik je popunjen nulama i jedinicana tako da je bar 75 jedinica u svakoj koloni. Dokazati da je moguće izbaciti 95 redova tako da je u ostatku najviše jednak kolona u kojoj su sve nule.

14. Dokazati da se prost broj ne može na dva različita načina predstaviti kao zbir dva kvadrata.

15. Naći opšte rešenje jednačine $x^2+2y^2=3z^2$ u skupu celih brojeva.

16. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi i neka je

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Dokazati da je

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdot \ldots \cdot (1+x_n) \leq 1 + S + \frac{S^2}{2!} + \ldots \frac{S^n}{n!}.$$

17. Izračunati sumu

$$S = \sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^2}, \text{ gde je } x_i = \frac{i}{101}, \quad \text{za } 0 \leq i \leq 101.$$

18. U kvadratu stranice 1 dato je n^2 tačaka. Dokazati da postoji linija koja sadrži sve tačke i čija je dužina manja od $2n$.

19. Neka su x, y i z stranice nekog trougla. Dokazati da je

$$\left|\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x}\right|$$

manje od 1/8.

20. Ako je $x > 0, y > 0, z > 0$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, odrediti majmanju vrednost izraza

$$S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}.$$

21. Naći najmanju vrednost izraza $(x+y)(y+z)$, ako su x, y, z pozitivni realni brojevi za koje je $xyz(x+y+z) = 1$.

22. Neka su a, b, c pozitivni relani brojevi za koje je $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dokazati da je

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4\sqrt{3}.$$

23. Neka je "debelo L" figura koja se dobija tako što se na kvadrata 2×2 doda jedan jedinični kvadratić. Dokazati da se pri pokrivanju pravougaonika $5 \times n$ figurama "debelo L" koristi paran broj ovih figura (figure se mogu okretati i rotirati).

24. Prirodni brojevi a, b, c, d zadovoljavaju uslov $ab = cd$. Dokazati da je broj

$$a^{1984} + b^{1984} + c^{1984} + d^{1984} \text{ složen.}$$

25. Poznato je da je $a^5 - a^3 + a = 2$. Dokazati da je $3 < a^6 < 4$.

26. Za realne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ veće od 1 važi $|a_{k+1} - a_k| < 1$ za svako $1 \leq k \leq n-1$. Dokazati nejednakost

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} < 2n - 1.$$

27. Neka je X skup koji sadrži n elemenata. Neka je M_n broj uređenih parova (S, f), gde je $S \subseteq X$, a $f : X \to X$ bijekcija za koju je $S \cap f(S) = \emptyset$. Naći M_n.

28. Dokazati identitet

$$\sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j}\binom{n-1}{j-1} = \binom{n+m-1}{n}.$$

29. Dokazati identitet

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} = \binom{4n}{2n}.$$