Комбинаторни задаци са бројевима

Предавач: Владимир Балтић

1. Миљан воли шестоцифрене бројеве код којих је збир прве три цифре једнак збиру последње три, а Младен оне код којих је збир цифара на непарним местима једнак збиру цифара на парним местима. Колико има шестоцифрених бројева које воле и Миљан и Младен?
2. Колико има троцифрених бројева у чијим записима се појављују три различите цифре?
3. Нека је $n \geq 2$. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ у којима су елементи 1 и 2 суседни?
4. Нека је $n \geq 2$. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ у којима 2 стоји иза 1 (не обавезно непосредно)?
5. Нека је $n \geq k+2$. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ у којима између 1 и 2 стоји тачно k елемената?
6. Колико има n–тоцифрених бројева $\overline{c_1c_2\ldots c_n}$ за које важи $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n \leq 9$?
7. Колико има варијација са понављањем од n елемената бројева 0 и 1 у којима никоје две јединице нису суседне?
8. Колико има варијација са понављањем од n елемената бројева $0, 1, \ldots, k$ у којима се појављује паран број нула?
9. Колико има тројки (a, b, c) природних бројева за које важи $abc = 2000$?
10. Колико има тројки (a, b, c) природних бројева за које важи $abc = 2000$ и $a \leq b \leq c$?
11. Колико има природних бројева не већих од 10^6 који нису дељиви ниједним од бројева 2,3,5?
12. Колико има природних бројева не већих од 10^6 који нису дељиви ниједним од бројева 2,3,5,7?
13. Колико има шестоцифрених бројева у чијем запису учествују три различите цифре? Колико има n–тоцифрених бројева у чијем запису учествује k различитих цифара, где је $1 \leq k \leq 9$?
14. Колико има пермутација $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$, таквих да за сваки број $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ важи $a_j \neq j$?
15. Нека је $1 \leq k \leq n$. Колико има пермутација $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$, таквих да за тачно k елемената $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ важи $a_j = j$?
16. Колико има n–тоцифрених бројева чији је збир цифара једнак 11?

Решења

1. $\overline{abcdef}$. $a+b+c = d+e+f$, $a+c+e = b+d+f \ \Rightarrow\ b = e$, $a+c = d+f (= k)$. Цифра $b = e$ може се изабрати на 10 начина. Ако је $1 \leq k \leq 9$, онда пар (d, f) можемо изабрати на $k+1$ начин, а пар (a, c) на k начина (јер је $a \neq 0$). За $10 \leq k \leq 18$, оба пара можемо изабрати на по $19-k$ начина. Тражених бројева има:
$10 \cdot (1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + 9\cdot 10 + 9\cdot 9 + 8\cdot 8 + \cdots + 1\cdot 1) = 6150.$
2. $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648.$
3. $2(n-1)!$
4. $\frac{1}{2}n!$
5. $2(n-k-1)(n-2)!$
6. $\binom{n+8}{8}$
7. $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{n+1-j}{j}$, где је $k = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{ako je } n \text{ paran broj} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{ako je } n \text{ neparan broj} \end{cases}$ (j је број 1 у датој варијацији).
Помоћу рекурентних једначина: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, тј. добијамо $a_n = F_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$ (F_n је n–ти Фибоначијев број).
8. Нека је S_n скуп варијација са понављањем елемената $0, 1, 2, \ldots, k$ у којима се појављује паран број нула и $a_n = |S_n|$ и нека су $A_n^{(j)}$ скупови варијација из S_n који почињу елементом j $(j = 0, 1, \ldots, k)$. Тада је $|A_n^{(1)}| = |A_n^{(2)}| = \cdots = |A_n^{(k)}| = a_{n-1}$, $|A_n^{(0)}| = (k+1)^{n-1} - a_{n-1}$, те добијамо рекурентну формулу $a_n = (k-1)\cdot a_{n-1} + (k+1)^{n-1}$, која кад се реши добијамо $a_n = \frac{1}{2}[(k+1)^n + (k-1)^n]$.
9. $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, па се проблем своди на то на колико начина можемо 6, тј. 5, куглица распоредити у три кутије: $\binom{6}{2}\cdot\binom{5}{2} = 150$.
10. Како је $\sqrt[3]{2000} < 13$ потребно је (за x_1) размотрити следеће случајеве: $\underline{x_1 = 1}$ има 10 решења:
$(1,1,2000), (1,2,1000), (1,4,500), (1,5,400), (1,8,250), (1,10,200), (1,16,125), (1,20,100), (1,25,80), (1,40,50)$;
$\underline{x_1 = 2}$ има 7 решења: $(2,2,500), (2,4,250), (2,5,200), (2,8,125), (2,10,100), (2,20,50), (2,25,40)$;
$\underline{x_1 = 4}$ има 4 решења: $(4,4,125), (4,5,100), (4,10,50), (4,20,25)$;
$\underline{x_1 = 5}$ има 5 решења: $(5,5,80), (5,8,50), (5,10,40), (5,16,25), (5,20,20)$;
$\underline{x_1 = 8}$ има 1 решење: $(8,10,25)$;
$\underline{x_1 = 10}$ има 1 решење: $(10,10,20)$. То нам даје укупно 28 решења.

11. Број бројева не већих од n који су дељиви са k једнак је $\left[\frac{n}{k}\right]$, где је [ ] цео део. Сада применимо формулу укључења и искључења и добијамо да је број природних бројева не већих од 10^6 који нису дељиви ниједним од бројева 2, 3 и 5 једнак: $10^6 - \left[\frac{10^6}{2}\right] - \left[\frac{10^6}{3}\right] - \left[\frac{10^6}{5}\right] + \left[\frac{10^6}{6}\right] + \left[\frac{10^6}{10}\right] + \left[\frac{10^6}{15}\right] - \left[\frac{10^6}{30}\right] = 1\,000\,000 - 500\,000 - 333\,333 - 200\,000 + 166\,666 + 100\,000 + 66\,666 - 33\,333 = 266\,666$.
12. Аналогно као у претходном примеру добија се $1\,000\,000 - 500\,000 - 333\,333 - 200\,000 - 142\,857 + 166\,666 + 100\,000 + 71\,428 + 66\,666 + 47\,619 + 28\,571 - 33\,333 - 23\,809 - 14\,285 - 9\,523 + 4\,761 = 228\,571$.
13. Нека су $c_1, c_2, c_3 \neq 0$ међусобно различите цифре. На основу формуле укључења и искључења добијамо да је број шестоцифрених бројева у чијем запису учествује свака од цифара c_1, c_2 и c_3 и ниједна друга цифра, једнак $3^6 - \binom{3}{2}2^6 + \binom{3}{1}1^6 = 540$. Из скупа $\{1, 2, \ldots, 9\}$ можемо изабрати три различите цифре на $\binom{9}{3} = 84$ начина. Према томе број шестоцифрених бројева у чијем запису учествују три различите цифре, од којих ниједна није нула, једнак је $84 \cdot 540 = 45\,360$.
Нека су $c_1 \neq 0, c_2, c_3$ међусобно различите цифре и нека је једна од цифара c_2, c_3 једнака нули. На основу формуле укључења и искључења добијамо да је број шестоцифрених бројева (који почињу цифром c_1) у чијем запису учествује свака од цифара c_1, c_2 и c_3 и ниједна друга цифра, једнак $3^5 - \binom{2}{1}2^5 + 1^5 = 180$. Нула може бити или цифра c_2 или цифра c_3, а преостале две цифре можемо изабрати на $\binom{9}{2}$ начина. Стога ове три различите цифре можемо изабрати на $2 \cdot \binom{9}{2} = 72$ начина. Према томе број шестоцифрених бројева у чијем запису учествују три различите цифре, од којих је једна нула, једнак је $72 \cdot 180 = 12\,960$.
Тражени број је једнак $45\,360 + 12\,960 = 58\,320$.
У општем случају, број n–тоцифрених бројева у чијем запису учествује тачно k различитих цифара, једнак је $\displaystyle\binom{9}{k}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n + (k-1)\binom{9}{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}(k-j)^{n-1}$.
14. За свако $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ означимо са A_j скуп пермутација скупа $\mathbb{N}_n$ за које важи $a_j = j$. За $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ важи $|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_k}| = (n-k)!$ (елементи $j_1, \ldots j_k$ су на својим местима, а осталих $n-k$ елемената могу бити у било ком редоследу на преосталих $n-k$ места). На основу формуле укључења и искључења добијамо да је тражени број $x_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}0! = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right)$.
Означимо са S_n скуп свих пермутација скупа $\mathbb{N}_n$ у којима ниједан елемент није на свом месту ($|S_n| = x_n$). За свако $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ означимо са $A_{n,k}$ скуп свих пермутација из S_n код којих је $a_k = 1$, са $B_{n,k}$ скуп свих пермутација из S_n код којих је $a_k = 1$, $a_1 = k$, са $C_{n,k}$ скуп свих пермутација из S_n ко д којих је $a_k = 1$, $a_1 \neq k$. Тада важи $B_{n,k} \cap C_{n,k} = \emptyset$ и $A_{n,k} = B_{n,k} \cup C_{n,k}$. Скупови $A_{n,2}, A_{n,3}, \ldots, A_{n,n}$ такође су међусобно дисјунктни и важи $S_n = A_{n,2} \cup A_{n,3} \cup \cdots \cup A_{n,n}$. Како је $x_1 = 0, x_2 = 1$ и $|B_{n,k}| = x_{n-2}$ (овде је $a_k = 1$ и $a_1 = k$, а остали елементи не смеју бити на свом месту), $|C_{n,k}| = x_{n-1}$ (овде је $a_k = 1$ и $a_1 \neq k$, што је иста ситуација као да смо избацили k–ту позицију и елемент k, а на првом месту забранили 1 и остали елементи не смеју бити на свом месту – њих има x_{n-1}), $|A_{n,k}| = x_{n-1} + x_{n-2}$, добијамо $x_n = |S_n| = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}|A_{n,k}| = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2})$.
Тј. добили смо да је тражени низ одређен почетним члановима $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и рекурентном формулом $x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2}),\ n > 2$.
15. k елемената скупа $\mathbb{N}_n$ који ће бити на својим местима могу се одабрати на $\binom{n}{k}$ начина. Осталих $n-k$ елемената могу се распоредити на преосталих $n-k$ места, тако да ниједан од тих елемената не стоји на свом месту на x_{n-k} начина (број из претходног задатка). Стога је тражени број једнак $\binom{n}{k}x_{n,k} = \frac{n!}{k!}\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right)$.
16. Нека је S скуп решења једначине $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 11$ у скупу $\mathbb{N}_0$, а A, B и C скупови оних решења за која важе услови: $x_1 = 0$ (A); један од бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$ једнак је 11 (B); један од бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$ једнак је 10 (C). Тада је $|S| = \binom{n+10}{11}$, $|A| = \binom{n+9}{11}$, $|B| = n$, $|C| = n(n-1)$, $|A \cap B| = n-1$, $|A \cap C| = (n-1)(n-2)$, $|B \cap C| = 0$ и $|A \cap B \cap C| = 0$. На основу принципа укључења и искључења добијамо да је тражени број једнак $\binom{n+9}{10} - 2n + 1$.