10. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

прво круг – 24. децембар 2005.

Први разред – А категорија

1. Одредити колико има десетоцифрених бројева чији је збир цифара 3?

2. Доказати да постоји природан број n тако да број 3^n има 2005 узастопних нула.

3. У свако поље табеле 2005×2005 уписан је један од бројева $+1$ или -1. За сваку врсту и сваку колону срачунат је производ свих бројева у њој. Може ли збир тако добијених 4010 производа бити 0?

4. Ако су x и y природни бројеви већи од 1 такви да

$$x + y - 1 \mid x^2 + y^2 - 1$$

доказати да је $x + y - 1$ сложен.

5. На страницама AC и BC троугла $\triangle ABC$ изабране су тачке M и N, такве да је $AM = BN$. Доказати да је права која пролази кроз средишта дуж и AN и BM нормална на симетралу $\sphericalangle ACB$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Желимо вам пуно успеха.

10. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

први круг – 24. децембар 2005.

Други разред – А категорија

1. Нека је са a_n означен највећи непаран делилац броја n и нека је

$$b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Доказати неједнакост $b_n \geqslant \dfrac{n^2+2}{3}$ и одредити када важи једнакост.

2. У групи од $2n+1$ људи за сваких n људи постоји човек који није међу тих n, а познаје свих тих n људи. Доказати да у тој групи постоји човек који познаје све преостале.

3. Решити једначину:

$$(p+1)^a - p^b = 1,$$

где је p непаран прост број и a и b природни бројеви.

4. Нека су D и E средишта страница BC и AC троугла $\triangle ABC$ и нека су O и S редом центри описаног и уписаног круга тог троугла. Показати да су тачке D, E, O и S коцикличне (припадају истом кругу) ако и само ако је

$$AC + BC = 2AB.$$

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Желимо вам пуно успеха.

10. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

први круг – 24. децембар 2005.

Трећи и четврти разред – А категорија

1. Нека је тачка E подножје нормале конструисане из средишта D странице BC, оштроуглог троугла $\triangle ABC$, на страницу AC. Ако је тачка F средиште дужи ED и ако при томе важи $AF \perp BE$, доказати да је троугао $\triangle ABC$ једнакокрак.

2. Нека је $\sigma(n)$ збир свих делилаца природног броја n, укључујући 1 и n. Ако је $\sigma(n) = 5n$, доказати да n има више од 5 различитих простих делилаца.

3. Нека је $\{x_n\}$ низ дефинисан са

$$x_1 = 603, \quad x_2 = 102, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + 2\sqrt{x_{n+1}x_n - 2} \quad \text{за} \quad n \geqslant 1.$$

Показати да:

а) су сви чланови низа природни бројеви;

б) има бесконачно много чланова низа чија се децимална репрезентација завршава са 2003;

в) не постоји члан низа који се завршава са 2004.

4. Скуп бројева $\{1, 2, \ldots, 3n\}$, разбијен је на произвољан начин на 3 дисјунктна скупа, A, B и C, од по n бројева у сваком. Доказати да је увек могуће одабрати по један број из сваког од скупова A, B и C, тако да је један од њих једнак збиру преостала два.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Желимо вам пуно успеха.