ПРВО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ

Време за рад 180 *минута.*
Сваки задатак вреди 20 *поена.*

Први разред
недеља, 7. децембар 2003.

1. Да ли постоје цели бројеви a, b, c, d такви да је

$$\begin{aligned} abcd - a &= 1235 \\ abcd - b &= 235 \\ abcd - c &= 35 \\ abcd - d &= 5 \quad ? \end{aligned}$$

2. Одредити $f(x)$ ако је

$$f\left(\frac{x-1}{x+3}\right) + 2f\left(\frac{x+3}{x-1}\right) = x, \qquad \text{за } x \neq 1,\ x \neq -3.$$

3. У троуглу $\triangle ABC$ повучена је симетрала AM угла $\alpha = \sphericalangle CAB$ $(M \in BC)$. У сваки од троуглова $\triangle ABM$ и $\triangle AMC$ уписани су кругови полупречника r_1 и r_2, респективно. Показати да је $r_1 = r_2$ ако и само ако је $\triangle ABC$ једнакокрак са крацима $AB = AC$.

4. Нека су K и L тачке ивице AD, односно дијагонале AC паралелограма $ABCD$, такве да је $\overrightarrow{AK} : \overrightarrow{KD} = 1 : 3$ и $\overrightarrow{AL} : \overrightarrow{LC} = 1 : 4$. Доказати да су тачке K, L и B колинеарне.

5. На кружници је распоређено 40 фигура, што белих, што црвених. Два играча играју следећу игру: први узима све црвене фигуре које имају белог суседа, након тога други узима све беле фигуре које имају црвеног суседа, онда опет први узима све црвене фигуре које имају белог суседа итд. Игра се завршава када на кружници остану само фигуре исте боје. Да ли је могуће да на крају остане само једна црвена фигура? Да ли је могуће да на крају остану две беле фигуре?

Други разред
понедељак, 1. децембар 2003.

6. Дат је троугао $\triangle ABC$. На полуправој AC изабрана је тачка K и на полуправој BC изабрана је тачка L тако да важи $AB = AK = BL$. На полуправој AB изабрана је тачка M и на полуправој CB изабрана је тачка N тако да важи $AC = AM = CN$. На полуправој BA изабрана је тачка P и на полуправој CA изабрана је тачка Q тако да важи $BC = BP = CQ$. Показати да су праве KL, MN и PQ паралелне.

7. На дужи AC изабрана је произвољна тачка B и на дужима AB, BC и AC као пречницима, конструисани су кругови k_1, k_2 и k. Кроз тачку B је конструисана произвољна права, која сече k у тачкама P и Q, а кругове k_1 и k_2 поред тачке B у тачкама R и S, редом. Доказати да је $PR = QS$.

8. Нека је дат природан број n. Посматрајмо уређене парове (u, v) природних бројева, таквих да им је НЗС једнак n (значи за $u \neq v$ пар (u, v) сматрамо различитим од (v, u)). Доказати да је број таквих парова једнак броју позитивних делилаца броја n^2.

9. Наћи најмањи природан број m за који је

$$\overbrace{100^{100^{100^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{100}}}}}}}^{m} > \overbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}^{100}.$$

10. Бубамара шета ивицама полиедра, полазећи из врха A. Она је прошла свим ивицама полиедра тачно двапут. Доказати да тачка у којој је бубамара завршила пут не зависи од пута.

Трећи разред
понедељак, 1. децембар 2003.

11. Нека су AK, BL и CM висине троугла $\triangle ABC$, а P било која тачка у тој равни која не припада правама које садрже те висине. Доказати да кругови описани око $\triangle AKP$, $\triangle BLP$ и $\triangle CMP$, осим P имају још једну заједничку тачку.

12. Круг l додирује изнутра круг k, и пречник PQ круга k у тачки C. Нека је A тачка на k, а B тачка на дужи CQ таква да је AB тангента круга l која је нормална на PQ. Доказати да AC полови угао $\sphericalangle PAB$.

13. Постоји ли природан број n такав да важи:
1° број n није потпун степен природног броја;
2° бројеви $n+1, n+2, \ldots, n+2003$ су дељиви квадратом броја већег од 1;
3° број $n + 2004$ није потпун степен природног броја?

14. Свака тачка равни је обојена у плаво или црвено. Доказати да постоје две плаве тачке на растојању 1, или четири колинеарне црвене тачке A_1, A_2, A_3, A_4 такве да је $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = 1$.

15. Нека су m и n различити природни бројеви, a природан број и $p < a - 1$ прост. Доказати да је полином

$$P(x) = x^m(x - a)^n + p$$

нерастављив над $\mathbb{Z}$.

Четврти разред
понедељак, 1. децембар 2003.

16. Дат је троугао $\triangle ABC$ и око њега је описан круг k. Нека је AD симетрала угла $\sphericalangle BAC$ ($D \in BC$) и нека је l круг који изнутра додирује круг k и дужи AD и BD. Означимо са E тачку додира круга l и симетрале AD. Доказати да је E центар уписаног круга у троугао $\triangle ABC$.

17. Доказати да постоји бесконачно много сложених природних бројева n са својством:

$$n \mid 3^{n-1} - 2^{n-1} \ .$$

18. Постоји ли природан број n такав да важи:
1° број n није дељив квадратом природног броја (већим од 1);
2° бројеви $n+1, n+2, \ldots, n+2003$ су дељиви квадратом (већим од 1);
3° број $n+2004$ није потпун степен природног броја?

19. Нека је $n \geqslant 4$ и нека су x_1,x_2,...,x_n позитивни реални бројеви.
а) Доказати неједнакост:

$$\frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} \geqslant 2$$

при чему је једнакост могуће постићи само у случају $n = 4$.
б) Показати да је за свако $n > 4$ ово најбоља процена (тј. ни за које n број 2 са десне стране неједнакости не можемо заменити неким већим).

20. Нека је S конвексан скуп тачака који садржи бар три неколинеарне тачке.
Нека су тачке скупа S обојене са p различитих боја (свака тачка је обојена тачно једном од p боја). Доказати да за свако $n \geqslant 3$ постоји бесконачно много подударних n-тоуглова таквих да су сва темена тих n-тоуглова обојена истом бојом.

ДРУГО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ
петак, 30. јануар 2004.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

1. Око округлог стола седи 2005 витезова, а један од њих држи код себе $z \leqslant 2005$ златника, са задатком да их подели тако да ником не припадне више од једног. Његова замисао је да, у сваком кораку, један од витезова који држе више од једног златника (ако таквих још има) да по један сваком од своја два суседа.
а) Доказати да се оваква расподела мора завршити ако је $z < 2005$;
б) Да ли се расподела може завршити ако је $z = 2005$?

2. Нека је ABC троугао и P тачка у његовој унутрашњости. Означимо са D, E, F подножја нормала из P на праве BC, CA и AB, редом. Претпоставимо да је при том

$$AP^2 + PD^2 = BP^2 + PE^2 = CP^2 + PF^2.$$

Доказати да је тада P центар круга описаног око $\triangle S_aS_bS_c$, где су S_a, S_b, S_c центри приписаних кругова троугла ABC.

3. За дати природан број n, нека је S скуп свих непарних природних бројева мањих од n и узајамно простих са n. За $x \in S$ дефинишемо $f(x)$ као највећи непаран делилац броја $n-x$. Доказати:
а) за свако $x \in S$ постоји $m \leq [\frac{n+1}{4}]$ такво да је $f(f(\dots f(x)\dots)) = x$;
б) ако је n прост и не дели $2^k - 1$ ни за које $k = 1, 2, \dots, n-2$, онда је најмање m из дела под а) управо једнако $[\frac{n+1}{4}]$.

4. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција таква да је, за свако x, $|f(x)| \leq 1$ и

$$f(x + 15/56) + f(x) = f(x + 1/7) + f(x + 1/8).$$

Доказати да је f периодична.

ТРЕЋЕ ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

Први и други разред
недеља, 21. март 2004

1. Нека су BD и CE симетрале унутрашњих углова троугла $\triangle ABC$, при чему су $D \in AC$ и $E \in AB$. Ако је познато да је $\sphericalangle BDE = 24^\circ$ и $\sphericalangle CED = 18^\circ$, одредити углове троугла ABC.

2. Дат је једнакокрак троугао $\triangle ABC$. На основици BC је одабрана произвољна тачка P. Кроз P су конструисане две праве паралелне крацима троугла. Означимо са Q и R пресечне тачке ових правих са крацима троугла. Нека је S тачка симетрична тачки P у односу на праву QR. Доказати да тачка S лежи на описаном кругу око троугла ABC.

3. Доказати да број
$$(n+2)^4 - n^4$$
ни за један природан број n није потпун куб природног броја.

4. Ако је $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, одредити најмању вредност израза
$$S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}.$$

5. Да ли постоји конвексан многоугао који се може исећи на неконвексне четвороуглове?

Трећи и четврти разред
понедељак, 22. март 2004.

6. Претпоставимо да су збирови углова у теменима A и B тетраедра $ABCD$ једнаки по 180°. Доказати да је $AB \leqslant CD$.

7. Нека су $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ природни бројеви такви да не постоје два од којих се један састоји од почетних цифара другог у истом редоследу (нпр. бројеви 13 и 13809 не могу бити истовремено укључени). Доказати да је
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9}.$$

8. Дат је полином $P(x)$ са целобројним коефицијентима. За сваки природан број n број $P(n)$ је већи од n. Посматрајмо низ
$$x_1 = 1,\ x_2 = P(x_2),\ \dots\ , x_n = P(x_{n-1}),\ \dots$$

Познато је да за сваки природан број N постоји члан низа који је дељив са N. Доказати да важи $P(x) = x + 1$.

9. Посада од n пирата се домогла ковчега са благом у коме се налази одређен број златника. У тој посади пирати су распоређени по снази од најјачег до најслабијег и сви су упознати са тим редоследом. По пирацким правилима најјачи предлаже поделу плена која се прихвата ако за њу гласа барем половина свих пирата. Ако се подела не прихвати пират који је дао предлог бива елиминисан (ходањем на дасци) и дужност поделе плена припада следећем по снази и тако редом све док се не усвоји неки предлог. У гласању и предлагању подела плена пирати се понашају рационално и знају да се и други пирати понашају рационално. Сваком пирату је листа приоритета иста:

- Пирату је пре свега највише стало да сачува живу главу.
- Ако је први услов задовољен пират ће гласати и предлагати тако да освоји што већу количину златника
- Ако је пирату по обе претходне тачке све једно, он ће гласати против поделе у циљу елиминисања својих ривала.

Који ће бити први пират по снази који ће сачувати живу главу и како ће гласити коначна подела плена ако у ковчегу има 100 златника а број пирата износи: **а)** $n = 100$, **б)** $n = 2004$.

ЧЕТВРТО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

Први дан
субота, 26. јун 2004.

1. Нека су $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$ произвољни природни бројеви. Доказати да важи

$$\frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_2, a_3]} + \cdots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} < 1,$$

при чему $[x, y]$ означава НЗС(x, y).

2. Кругови γ_1 и γ_2 се секу у тачкама AB, а круг γ_3 их додирује споља у тачкама C и D редом. Права AB сече круг γ_3 у тачкама P и Q. Доказати да је $\sphericalangle PKC = \sphericalangle QKC$.

3. Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ скупови од по n дужи на датој правој. Доказати да се пресек $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ састоји од не више од $n^2 - n + 1$ дисјунктних дужи.

Други дан
понедељак, 28. јун 2004.

4. Претпоставимо да низ природних бројева (a_n) задовољава $(a_i, a_j) = (i, j)$ за свака два различита природна броја i, j. Доказати да је $a_n = n$ за свако n.

5. Дат је троугао ABC. Тангента у темену A на круг описан око $\triangle ABC$ сече средњу линију троугла паралелну са BC у тачки A_1. Аналогно дефинишемо тачке B_1 и C_1. Доказати да тачке A_1, B_1, C_1 леже на правој и да је та права нормална на Ојлерову праву троугла ABC.

6. У поља бесконачне квадратне таблице уписани су природни бројеви тако да важи следеће својство: ако је у неко поље таблице уписан неки број a, тада је збир бројева у пољу испод и у пољу десно од посматраног поља једнак $2a + 1$. Доказати да су на свакој дијагонали паралелној правој $x = y$ сви бројеви различити.

ПЕТО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

Први дан
среда, 30. јун 2003.

1. Нека је (a_n) низ различитих природних бројева такав да постоји константа $a > 0$ таква да је $a_n < an$ за све $n \in \mathbb{N}$. Доказати да:
а) ако је $a < 5$, низ садржи бесконачно много бројева којима збир цифара (у декадном систему) није дељив са 5;
б) претходни резултат није тачан за $a = 5$.

2. *Дијамант* реда n је вертикално симетричан скуп јединичних квадрата који у врстама има $1, 3, \ldots, 2n-3, 2n-1, 2n-3, \ldots, 3, 1$ квадрата редом (видети слику). Нека је $A(n,k)$ број начина на које може да се постави k дисјунктних 2×2 квадрата у $(2n-1) \times (2n-1)$ квадратну мрежу, а $B(n,k)$ број начина на које може да се постави k дисјунктних домина на дијамант реда n. Симетрична постављања се сматрају различитим. Доказати да је $A(n,k) < B(n,k)$ за $2 \leqslant k \leqslant (n-1)^2$.

3. Нека су a, b, c, d позитивни реални бројеви такви да је

$$3(a+b+c+d) + 4(abc+bcd+cda+dab) = 8.$$

Доказати неједнакост

$$ab+ac+bc+ad+bd+cd \leqslant 2.$$

Други дан
понедељак, 5. јул 2004.

4. У датом троуглу $\triangle ABC$ конструисати тачку M чији је збир квадрата растојања до правих AB, BC и CA минималан.

5. Чукунунук барона Минхаузена тврди да у његовој земљи постоји $n \geqslant 3$ већих градова, од којих су свака два повезани авионском линијом у једном смеру, као и да се из сваког града у било који други може доћи са највише једним преседањем. За које је све вредности природног броја $n \geqslant 3$ могуће да чукунунук барона Минхаузена говори истину?

6. За број $A = x^2 - 1002000y^2$, где су $x, y \in \mathbb{Z}$, важи $A > 0$ и A није потпун квадрат. Наћи најмању могућу вредност броја A.