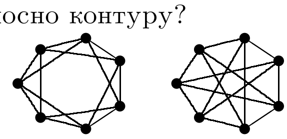
Додатна у Математичкој гимназији

Владимир Балтић, 2005.

1. **а)** Да ли постоји граф са 6 чворова чији су степени 2,2,3,3,4,5?
б) Да ли постоји граф са 5 чворова чији су степени 0,1,2,3,4?
в) Да ли постоји граф са 6 чворова чији су степени 2,3,3,4,4,4?
в) Да ли постоји граф са 7 чворова чији су степени 6,3,3,3,3,3,3?
Уколико је одговор потврдан одредити све неизоморфне графове који испуњавају услове задатка.
Да ли ти графови садрже Хамилтонов и Ојлеров пут, односно контуру?

2. Испитати да ли су следећи графови изоморфни.
Да ли су они планарни?



3. Описати графове код којих је степен сваког чвора мањи од 3.

4. Доказати да су следеће карактеризације стабла еквивалентне (G је граф са n чворова):

а) G је повезан граф и не садржи циклусе;

б) G је повезан граф и има $n-1$ грану;

в) G не садржи циклусе и има $n-1$ грану;

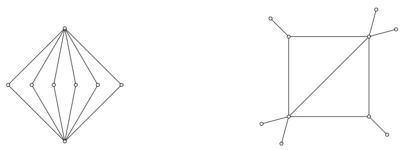
г) За сваки пар чворова $u, v \in V(G)$ постоји тачно један пут између u и v у G;

д) G не садржи циклусе, али када додамо произвољну грану добијамо граф који садржи тачно један циклус.

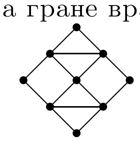
ђ) G је повезан граф, али када избацимо произвољну грану добијамо неповезан граф.

5. Конструисати регуларан граф степена 3 са $2n$ чворова ($n \geqslant 3$) који нема троуглова (контура дужине 3).

6. Одредити број неизоморфних, као и укупан број разапињућих стабала графова са слике.



7. Бела кућа у левом крилу има распоред просторија као на слици (чворови су просторије, а гране врата).
Бил Клинтон из свог кабинета креће у потрагу за секретарицом.
а) Да ли може да обиђе све просторије тачно једанпут?
б) Да ли може да обиђе све просторије тачно једанпут и да се врати у свој кабинет?



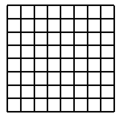
8. На шаховској табли димензија **а)** 5×4; **б)** 4×4 у доњем левом углу налази се скакач. Да ли скакач може да обиђе сва поља шаховске табле тачно једанпут?

9. Краљ Шонгабонга је имао 4 сина, 10 од његових мушких потомака су имали по 3 сина сваки, 15 од његових мушких потомака су имали по 2 сина сваки, док су сви остали умрли без деце. Ако је познато да краљ Шонгабонга није имао женских потомака, колико је укупно мушких потомака имао овај краљ?

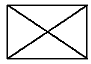
10. (*1. разред, А и Б категорија, Републичко 2003*) Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој послале писмо.

11. (*1. разред, Савезно 1990*) Цар жели да сагради дворац у којем ће бити 1990 соба у једном нивоу, тако да важе следећи услови:
1. Број врата на свакој соби је 0, 1 или 2.
2. Између сваке две собе су највише једна врата, а из сваке собе на улицу воде највише једна врата.
3. Број врата према улици једнак је 19, а број соба са једним вратима је 90.
Да ли је могуће саградити такав дворац?

12. (*4. разред, Савезно 1976*) Град има квадратну мрежу са m "хоризонталних" и n "вертикалних" улица (видети слику). Колика је најмања дужина дела мреже који треба асфалтирати тако да се од сваке раскрснице до било које друге може доћи асфалтом?



13. (*1. разред, Покрајинско 1990, Косово*) Може ли се једним потезом нацртати фигура са слике?



14. (*2. разред, Савезно 2004*) Разговарали су барон Минхаузен и математичар. Барон Минхаузен је рекао да се у његовој земљи из сваког града може путем стићи у било који други град. При томе, ако се из произвољног града путује по земљи произвољним путем до повратка у тај град, онда се прође кроз непаран број успутних градова. Математичар је питао колико пута се броји град, ако се више пута прође кроз њега. Барон је одговорио да се такав град броји онолико пута колико пута се прође кроз њега. Осим тога, барон Минхаузен је додао да из сваког града у његовој земљи полази једнак број путева, осим из његовог родног града из кога полази мањи број путева. На то је математичар рекао да барон Минхаузен лаже. Како је то закључио?

15. (*2. разред, пробно такмичење на припремама за Савезно 1995*) На двору краља Артура сакупило се n витезова, при чему сваки од њих, међу осталим, има највише $n-1$ непријатеља. Доказати да Мерлин, саветник краља Артура, може да распореди витезове за округли сто тако да су свака два суседа пријатељи. (Пријатељство и непријатељство су симетрични.)

16. (*2. разред, Савезно 1984*) У некој држави између свака два града постоји једносмерна авионска линија. Доказати да постоји град из којег се у сваки други град може стићи авионом са највише једним преседањем.

17. (*3. разред, Републичко 1983, БиХ*) На једном такмичењу сваки учесник се бори са сваким и ниједна борба се не завршава нерешено. Доказати да међу такмичарима постоји такав који ће прозвати све учеснике, осим себе, када прозове све учеснике које је победио, као и све учеснике који су побеђени од оних које је победио.

18. (*4. разред, Републичко 1974*) У држави Заврзламији има n градова. Треба их повезати телефонским линијама тако да буду испуњени услови:

1. свака линија повезује два града;
2. има укупно $n-1$ линија;
3. из сваког од тих n градова се може (директно или не) разговарати са било којим другим градом.

На колико се то начина може учинити?

19. (*4. разред, Општинско 1983*) Сваки град у некој држави је повезан директним авионским линијама са три друга града. Из сваког града може се отићи у било који други град са највише једним преседањем. Колико највише може бити градова у тој држави?

20. (*4. разред, Савезно 1972*) Колики је максималан број пермутација од n елемената таквих да су свака два елемента суседна у највише једној од пермутација?

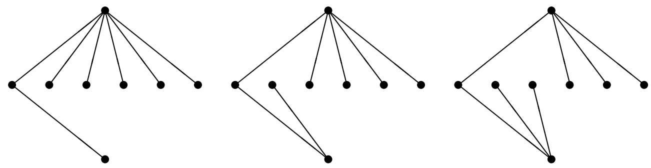
Решења

6. а) У овом задатку ћемо решити општији проблем—уместо за граф $K_{2,6}$ са слике, задатак ћемо решити за комплетан бипартитни граф $K_{2,n}$. Чворове у делу са 2 чвора означићемо са a и b, а чворове у делу са n чворова са $1, 2, \ldots, n$.

У произвољном разапињућем стаблу T чворови a и b спојени су тачно једним путем: због тога постоји тачно један чвор i тако да стабло T садржи гране $\{a, i\}$ и $\{b, i\}$. За сваки чвор $j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$ важи да се тачно једна од грана $\{a, j\}$, $\{b, j\}$ налази у T. Нека је k_T број оних чворова j за које се грана $\{a, j\}$ налази у T. Тада има $n - 1 - k_T$ чворова j за које се грана $\{b, j\}$ налази у T.

Када тражимо број неизоморфних разапињућих стабала, приметимо да су разапињућа стабла T и T' изоморфна ако и само ако је $k_T = k_{T'}$ или $k_T = n-1-k_{T'}$. Због тога неизоморфних разапињућих стабала има колико и могућих вредности за k_T, тј. вредности 0, 1, ..., $[(n-1)/2]$. Њихов број је стога једнак $[(n+1)/2]$.

За $n = 6$ сва $3 = [7/2]$ неизоморфна разапињућа стабла су:



Када тражимо укупан број разапињућих стабала, приметимо да је свако разапињуће стабло T одређено избором чвора i таквог да се обе гране $\{a, i\}$ и $\{b, i\}$ налазе у T и за сваки од преосталих чворова j избором да ли се у стаблу T налази грана $\{a, j\}$ или $\{b, j\}$. Због тога је укупан број разапињућих стабала једнак $n \cdot 2^{n-1}$. За $n = 6$ свих разапињућих стабала има $2^5 \cdot 6 = 192$.

Иначе, овај број смо могли да добијемо и користећи теорему о матрицама и стаблима. Ако у ову теорему уврстимо $s = t = 1$, тада је број свих разапињућих стабала једнак

$$t(K_{2,n}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & n \end{vmatrix},$$

где је детерминанта реда $(n+1) \times (n+1)$, тј. $t(K_{2,n}) = D_{n+1}$. Ако детерминанту овог облика, реда $m \times m$, развијемо по првој колони, а затим по првој врсти добијамо рекурентну једначину

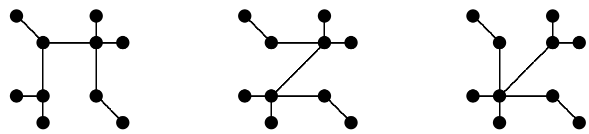
$$D_m = 2D_{m-1} - 2^{m-2}, \quad \text{уз почетни услов } D_2 = 2n - 1$$

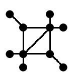
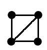
и њено решење је $D_m = 2^{m-2}(2n+1-m)$. За $m = n+1$ добијамо да је број свих разапињућих стабала графа $K_{2,n}$ једнак

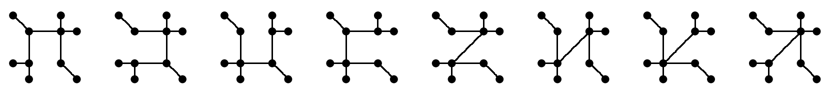
$$t(K_{2,n}) = D_{n+1} = 2^{n-1} \cdot n.$$

б) Како је цикломатички број овог графа једнак $\nu(G) = 11 - 10 + 1 = 2$, да би добили стабло потребно је избацити 2 гране.

Постоје 3 неизоморфна разапињућа стабла:



Како разапињуће стабло мора да садржи све висеће гране у графу, то је број свих разапињућих стабала графа  једнак броју разапињућих стабала графа , а њих има тачно 8:



9. У овом задатку ћемо користити следећу лему:
Лема. Нека је T стабло са n чворова, $n \geqslant 2$. За природан број i, нека p_i означава број чворова степена i у стаблу T. Тада важи $p_1 - p_3 - 2p_4 - \ldots - (n-3)p_{n-1} = 2$.

Доказ Леме. У произвољном графу G са n чворова, збир степена чворова једнак је $\sum\limits_{v \in V(G)} d_G(v) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} ip_i$, а очигледно важи и $\sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i = n$. Ако је G стабло, његов број грана је $n-1$, те је $\sum\limits_{i=1}^{n-1} ip_i = 2(n-1) = 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i - 2$, што даје тражену једнакост $\sum\limits_{i=1}^{n-1} (2-i)p_i = 2$, односно $p_1 - p_3 - 2p_4 - \ldots - (n-3)p_{n-1} = 2$. □

Напомена: Овај задатак се може искористити да покажемо да у сваком стаблу са бар два чвора постоје бар два листа, тј. да је $p_1 \geq 2$. Такође одмах следи да је једино стабло са тачно два листа, пут P_n ($p_1 = 2$, а $p_3 = \ldots = p_{n-1} = 0$).

Сада се вратимо на задатак.

Ако нацртамо родослов краља Шонгабонге, видимо да он представља стабло у коме чвор који одговара краљу има степен 4, док чвор који одговара неком краљевом потомку има степен за један већи од броја његових синова: по једна грана за сваког сина и још једна грана за његовог оца.

Ако сада са p_i означимо број чворова степена i у родослову, онда видимо да је $p_3 = 15$ и $p_4 = 10+1 = 11$. Како родослов садржи само чворове степена 1, 3 или 4, на основу Леме имамо да је $p_1 = p_3 + 2p_4 + 2 = 39$, па је број чворова у стаблу једнак $n = 65$, а како је ту рачунат и краљ Шонгабонга, добијамо да је он имао 64 мушких потомака.

14. *Доказати да не постоји повезан граф G, код кога све контуре имају парну дужину и сви чворови имају степен r, осим једног чвора који има степен s, при чему је $s < r$.*

Прво ћемо показати да ако су све контуре графа парне дужине тада је граф бихромацки (тј. може се обојити у две боје).

То ћемо показати тако што ћемо извршити ефективно бојење. Произвољан чвор v (нека је то баш чвор степена s) обојимо црвеном бојом, затим све његове суседе белом, а суседе од ових суседа опет црвеном (уколико већ нису обојени црвеном бојом) итд. Претпоставимо да не можемо извршити тражено бојење. Тада у процесу бојења долазимо до чвора w који треба обојити, на пример белом бојом, а да је један од њему суседних чворова већ обојен у бело. Међутим, тада од чвора v воде у чвор w две различите путање, од којих једна има паран, а друга непаран број грана. Ако спојимо ове две путање, онда добијамо контуру са непарним бројем чворова, што је у контрадикцији са претпосатвком да све контуре имају парну дужину.

Нека је n_C чворова обојено црвеном бојом, а n_B чворова белом бојом. Како из свих чворова полази тачно r грана, сем из чвора v, из кога полази тачно s грана и како свака грана спаја један црвени и један бели чвор, то добијамо да је укупан број грана једнак $n_B \cdot r$ (ако гледамо из белих чворова), односно $(n_C - 1) \cdot r + 1 \cdot s$ (ако гледамо из црвених чворова). Према томе,

$$n_B \cdot r = (n_C - 1) \cdot r + s,$$

односно $s = (n_B - n_C + 1) \cdot r$, што је немогуће јер је $s < r$.
Напомена: Први део задатка је део теореме Кенига: *Граф је бихроматски (бипартитан) ако и само ако не садржи као подграф ниједну контуру са непарним бројем чворова.*