ФУНКЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ
Додатна у Математичкој гимназији

Владимир Балтић

1. Наћи све функције за које важи $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (такве функције се називају адитивне) и **а)** $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$; **б)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и непрекидне су.
2. За функцију $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ важи $f(1)=2$ и $f(xy)=f(x)\cdot f(y)-f(x+y)+1$. Наћи све такве функције.
3. Наћи све функције $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$ које задовољавају: $f(x)+f(\dfrac{1}{1-x})=x$.
4. Наћи све $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ за које је: $(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2)$.
5. Наћи све функције $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ које задовољавају: $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$.
6. Наћи све функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ које задовољавају: $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$.
7. Функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ задовољава идентитет $f(xy)=\dfrac{f(x)+f(y)}{x+y}, x,y\in\mathbb{R}, x+y\neq 0$. Да ли постоји $x\in\mathbb{R}$ тако да је $f(x)\neq 0$?
8. Нека $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(0)=f(1)=0$ и $\forall x,y\in[0,1]\quad f(\dfrac{x+y}{2})\leqslant f(x)+f(y)$.
а) Доказати да је $f(x)\geqslant 0$ за свако $x\in[0,1]$ и да f има бесконачно много нула.
б) Навести пример такве функције која није идентички једнака нули.
9. Да ли постоји функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ која је непрекидна на $\mathbb{R}$ и за коју важи да је $f(f(x))=e^{-x}$?
10. Наћи све непрекидне функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такве да је $f(xy)=xf(y)+yf(x)$.
11. Наћи све функције за које важи $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ ако **а)** $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$; **б)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и диференцијабилна су.
12. Наћи све непрекидне функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такве да је $f(\dfrac{x+y}{2})=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.
13. Наћи све непрекидне функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за које је $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$.
14. Одредити минималан број елемената коначног скупа A, тако да постоји функција $f:\mathbb{N}\to A$ са особином: ако је $|i-j|$ прост број тада је $f(i)\neq f(j)$.
15. Дата је функција $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$. Доказати да не може да важи за свако $n\in\mathbb{N}_0$: $f(f(n))=n+1987$.
16. Нека је дата функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ са $f(x)+(x+\frac{1}{2})\cdot f(1-x)=1$.
а) Наћи $f(0)$ и $f(1)$. **б)** Наћи све f које задовољавају горње услове.
17. Доказати да ако је $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ непрекидна и $f(f(x))=x^2$ тада је $x^2<f(x)<x$ за $x\in(0,1)$. Дати један пример такве функције.
18. Дата је функција $f(x)=ax^2+bx+c$, где су $a,b,c>0$ и $a+b+c=1$. Доказати да за све $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$ $x_1\cdot\ldots\cdot x_n=1$ важи $f(x_1)\cdot\ldots\cdot f(x_n)\geqslant 1$.
19. Строго растућа функција f дефинисана на $[0,1]$ задовољава $f(0)=0, f(1)=1$ и $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{f(x+y)-f(x)}{f(x)-f(x-y)}\leqslant 2$ за све x,y такве да је $0\leqslant x\pm y\leqslant 1$. Доказати да је $f(\dfrac{1}{3})\leqslant\dfrac{76}{135}$.
20. Наћи све функције $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ које задовољавају следеће услове:
$f(x\cdot f(y))\cdot f(y)=f(x+y)$, $f(2)=0$ и $f(x)\neq 0$ за $0\leqslant x<2$.
21. Нека је $0<a<1$ фиксиран реалан број и нека је f непрекидна функција на интервалу $[0,1]$ која задовољава: $f(0)=0, f(1)=1$ и $f(\dfrac{x+y}{2})=(1-a)f(x)+af(y)$ за све $x,y\in[0,1]$ и $x\leqslant y$. Наћи $f(\dfrac{1}{7})$.
22. Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $f(1)=1, f(a+b)=f(a)+f(b)$ и $f(x)\cdot f(\dfrac{1}{x})=1$ за $x\neq 0$. Доказати да је $f(x)=x$.
23. Нека је $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ строго растућа, мултипликативна функција ($f(mn)=f(m)\cdot f(n)\ \forall m,n\in\mathbb{N}$), за коју важи да ако је $m\neq n$ и $m^n=n^m$ тада је $f(m)=n$ или $f(n)=m$. Наћи $f(30)$.
24. Нека је дата функција $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ која задовољава следећих пет услова:
1) ако је $x>y$ и $f(y)-y\geqslant v\geqslant f(x)-x$ тада је $f(z)=v+z$ за неко z између x и y;
2) једначина $f(x)=0$ има бар једно решење и међу решењима постоји највеће;
3) $f(0)=1$; **4)** $f(1987)\leqslant 1988$; **5)** $f(x)\cdot f(y)=f(x\cdot f(y)+y\cdot f(x)-xy)$. Наћи $f(1987)$.
25. Нека је $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ таква да важи $f(f(n)+f(m))=m+n\quad\forall m,n\in\mathbb{N}$. Наћи све могуће вредности за $f(1988)$.
26. Конструисати функцију $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ која задовољава услов $f(x\cdot f(y))=\dfrac{f(x)}{y}$.
27. Доказати да не постоји бијекција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_0$ таква да је за све $m,n\in\mathbb{N}$ испуњено $f(mn)=f(m)+f(n)+3f(m)f(n)$.
28. Наћи све непрекидне функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за које је $f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)\cdot f(y)$ за свако $x,y\in\mathbb{R}$ и $f(1)=a$.
29. Да ли постоји функција $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ за коју важи:
а) $\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{2002}=\dfrac{x}{x+1}$; **б)** $\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{2002}=1+x+2\sqrt{x}$.

30. Наћи све функције $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ за које важи $2f(x)=f(x-y)+f(x+y)$, за све $x,y\in\mathbb{Q}$.
31. Колико има функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ таквих да за свако $n\in\mathbb{N}$ важи $f(n)>1$ и $f(n+3)f(n+2)=f(n+1)+f(n)+36$?
32. Наћи све "1–1" функције $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, за које важи $f(f(m)+f(n))=f(f(m))+f(n)$, $f(1)=2$ и $f(2)=4$.
33. Дата је функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, таква да је $f(f(m)+f(n))=f(f(m))+f(n)$ за све природне бројеве m и n. Ако је $f(29)=58$ и $f(58)=87$, израчунати $f(2001)$.
34. Низ функција $f_n(x)$ дефинисан је на следећи начин: $f_1(x)=\frac{x}{x-1}$, $f_2(x)=\frac{1}{1-x}$, $f_{n+2}(x)=f_{n+1}(f_n(x)),n\in\mathbb{N}$. Наћи $f_{2000}(x)$.
35. Наћи све функције $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_0$ за које важе следећи услови: **1)** $f(mn)=f(m)+f(n)$, за све $m,n\in\mathbb{N}$; **2)** $f(n)=0$ за сваки природан број $n\equiv 3 \pmod{10}$; **3)** $f(10)=0$.
36. Наћи све функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за које је $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$ и $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ за све $x,y\in\mathbb{R}$.
37. Наћи све функције $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ и задовољава услове: **1)** $f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$ за све $x,y\in\mathbb{Z}$; **2)** $f(0)\neq 0$; **3)** $f(1)=\frac{5}{2}$.
38. Наћи све функције $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ и задовољава услове: **1)** $f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$ за све $x,y\in\mathbb{Z}$; **2)** $f(0)\neq 0$; **3)** $f(1)=\sqrt{3}$.
39. Нека функције $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и за свако $x,y\in\mathbb{R}$ важи $f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$. **а)** Ако је f периодична функција, доказати да је и g периодична. **б)** Ако је g периодична функција, да ли f мора бити периодична?
40. Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ функција која испуњава следеће услове: **1)** $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, **2)** $\exists! x_0\in\mathbb{R}$, $f(x_0)=2002$. Доказати да је f ињективна функција.
41. Наћи све функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за које важи $f(x)\cdot f(y)=f(x-y)$ за све $x,y\in\mathbb{R}$ и $f(2002)=1$.
42. За функцију $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ важи: **1)** $f(x)\leqslant x$, за свако $x\in\mathbb{Q}$, и **2)** $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$ за све $x,y\in\mathbb{R}$. Доказати да је $f(x)=x$ за свако $x\in\mathbb{R}$.
43. Наћи све функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за које важи $f(x+f(y))=f(x)+y$ за све $x,y\in\mathbb{R}$.
44. За функцију $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ важи $f(f(n))=4n+9$, за свако $n\in\mathbb{N}$ и $f(2^k)=2^{k+1}+3$, за свако $n\in\mathbb{N}_0$. Израчунати $f(1789)$.
45. Наћи све непрекидне функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за које је $f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)\cdot f(y)$.
46. Нека функције $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ задовољавају: 1° h је ињективна функција (1–1), 2° скуп вредности за g је цео скуп $\mathbb{N}$, 3° $f(n)=g(n)-h(n)+1$. Доказати да је $f(n)=1$.
47. Дата је функција $f\,[0,1]\to\mathbb{R}$ која има следећа својства:
а) $f(x)\geqslant 0$ за све $x\in[0,1]$,
б) $f(1)=1$,
в) ако $x_1,x_2\in[0,1]$ и $x_1+x_2\leqslant 1$, онда је $f(x_1)+f(x_2)\leqslant f(x_1+x_2)$.
Доказати да за свако $x\in[0,1]$ важи $f(x)\leqslant 2x$.
48. Наћи све функције $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ које задовољавају следеће услове:
(1) $f(x+y)-yf(x)-xf(y)=f(x)f(y)-x-y+xy$, за свако $x,y\in\mathbb{Q}$;
(2) $f(x)=2f(x+1)+2+x$, за свако $x\in\mathbb{Q}$;
(3) $f(1)+1>0$.
49. Нека функција $f:\mathbb{Q}\to[0,+\infty)$ задовољава следеће услове:
1° $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$ $(\forall x,y\in\mathbb{Q})$;
2° $f(x)\leqslant 1 \;\Rightarrow\; f(x+1)\leqslant 1$ $(\forall x\in\mathbb{Q})$;
3° $f(\frac{2003}{2002})=2$.
Наћи све могуће вредности за $f(\frac{2004}{2003})$.
50. Наћи све функције $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, за које важи $2n+2001\leqslant f\big(f(n)\big)+f(n)\leqslant 2n+2002$.
51. Наћи све функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, за које важи $\big(f(x)+f(z)\big)\big(f(y)+f(t)\big)=f(xy-zt)+f(xt+yz)$ за свако $x,y,z,t\in\mathbb{R}$.

52. Наћи све функције $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ које за све $x,y\in\mathbb{N}$ задовољавају $f\left(\dfrac{x+y}{3}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$, кад је $\dfrac{x+y}{3}\in\mathbb{N}$.

53. Функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ је таква да је $x+f(x)=f(f(x))$ за свако $x\in\mathbb{R}$. Наћи сва решења једначине $f(f(x))=0$.

54. За дати природан број n, нека је S скуп свих непарних природних бројева мањих од n и узајамно простих са n. За $x\in S$ дефинишемо $f(x)$ као највећи непаран делилац броја $n-x$. Доказати:
а) за свако $x\in S$ постоји $m\leqslant[\frac{n+1}{4}]$ такво да је $f(f(\dots f(x)\dots))=x$;
б) ако је n прост и не дели 2^k-1 ни за које $k=1,2,\dots,n-2$, онда је најмање m из дела под а) управо једнако $[\frac{n+1}{4}]$.
55. Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ функција таква да је, за свако x, $|f(x)|\leqslant 1$ и $f(x+15/56)+f(x)=f(x+1/7)+f(x+1/8)$. Доказати да је f периодична.

Решења

1. а) Када заменимо $x=y=0$ добијамо $f(0)=0$. Означимо са $f(1)=c$. Математичком индукцијом се показује да је $f(nx)=n\cdot x,\ \forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{Q}\quad(*)$, а одатле добијамо $f(n)=c\cdot n,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Ако ставимо $y=-x$ у полазну једначину добијамо $f(-x)=-f(x)=c\cdot(-x)$, тј. добијамо да важи $f(z)=c\cdot z,\ \forall z\in\mathbb{Z}$. Ако заменимо $n=q$ и $x=\frac{p}{q}$ у $(*)$ добијамо $cp=f(p)=q\cdot f(\frac{p}{q})$, а одатле $f(\frac{p}{q})=c\cdot\frac{p}{q}$, тј. $f(q)=c\cdot q,\ \forall q\in\mathbb{Q}$.
б) Исто као у претходном делу добијамо $f(q)=c\cdot q,\ \forall q\in\mathbb{Q}$. Како је f непрекидна функција то ће важити и $f(x)=c\cdot x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

У оба случаја смо добили да су сва решења ове функционалне једначине $\boxed{f(x)=c\cdot x}$.

2. Када заменимо $x=y=1$ добијамо $f(1)=2$. Када заменимо само $y=1$ добијамо $f(x+1)=f(x)+1$, а помоћу тога математичком индукцијом се показује да је $f(n+x)=f(x)+n,\ \forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{Q}\quad(*)$, а одатле добијамо $f(n)=n+1,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Када заменимо $x=y=0$ добијамо $f(0)=1$. Када заменимо $x=1,y=-1$ добијамо $f(-1)=0$. Ако ставимо $y=-x$ у полазну једначину добијамо $f(-x)=-x+1$, тј. добијамо да важи $f(z)=z+1,\ \forall z\in\mathbb{Z}$. Ако заменимо $x=q$ и $y=\frac{p}{q}$ у полазну једначину и из $(*)$ имамо $f(q+\frac{p}{q})=f(\frac{p}{q})+q$ добијамо $f(\frac{p}{q})=\frac{p}{q}+1$, тј. $\boxed{f(x)=x+1}$.

3. Ако свако x у једначини $f(x)+f(\frac{1}{1-x})=x\quad(1)$, заменимо са $\frac{1}{x-1}$ добијамо $f(\frac{1}{1-x})+f(\frac{x-1}{x})=\frac{1}{1-x}\quad(2)$, а ако ставимо $\frac{x-1}{x}$ добијамо $f(\frac{x-1}{x})+f(x)=\frac{x-1}{x}\quad(3)$. Сада из $\dfrac{(1)+(3)-(2)}{2}$ добијамо $\boxed{f(x)=\dfrac{x^3-x+1}{2x(x-1)}}$

4. Означимо $x-y=u$ и $x+y=v$. Тада полазна једначина постаје $u\cdot f(v)-v\cdot f(u)=(v^2-u^2)vu$, што кад помножимо са uv (за $uv\neq 0$) добијамо $\frac{f(v)}{v}-v^2=\frac{f(u)}{u}-u^2$. Како су u и v произвољно изабране вредности (јер су x и y произвољни) добијамо да је $\frac{f(x)}{x}-x^2$ константно, тј. $\frac{f(x)}{x}-x^2=c$, одакле је $f(x)=x^3+cx, x\neq 0$. Ако у полазну једначину заменимо $x=y\neq 0$ добијамо $f(0)=0$, што нам даје $\boxed{f(x)=x^3+cx}$.

5. Уочимо да је $\varphi(x)=\frac{1}{2}x^2$ решење ове функционалне једначине (тј. важи $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)+xy$). Означимо са $\Psi(x)=f(x)-\varphi(x)$ помоћну функцију Ψ. За њу важи $\Psi(x+y)=f(x+y)-\varphi(x+y)=f(x)+f(y)+xy-\varphi(x)-\varphi(y)-xy=\Psi(x)+\Psi(y)$, тј. добили смо Кошијеву једначину (**1.** задатак) и знамо да је њено решење $\Psi(x)=cx$, одакле добијамо $f(x)=\Psi(x)+\varphi(x)$, тј. $\boxed{f(x)=\frac{1}{2}x^2+cx}$.

6. Ако узмемо $x\neq 0,y=0$ добијамо $f(0)=f(0)\cdot f(x)$. Ако је $f(0)=a\neq 0$ добијамо да је $f(x)=1$ за $x\neq 0$, тј. $f(x)=\begin{cases}a, & x=0\\ 1, & x\neq 0\end{cases}, a\neq 0$. Ако је $f(0)=0$ када заменимо у полазну једначину $x=y\neq 0$ добијамо $f(x)=f(x)^2$, тј. за свако $x\neq 0$ је $f(x)=0$ или $f(x)=1$. Уколико је $f(x)=1$ за неко $x\neq 0$ добијамо из полазне једначине да је $f(y)=1$ за свако $y\neq 1$, тј. добијамо функцију $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\neq 0\end{cases}$. Уколико није испуњено $f(x)=1$ ни за једно $x\neq 0$ добијамо да је $f(x)=0$. Када обједининимо ова решења добијамо да је $\boxed{f(x)=0 \text{ или } f(x)=\begin{cases}a, & x=0\\ 1, & x\neq 0\end{cases}}$.

7. Ако узмемо $x\neq 0,y=0$ добијамо $f(x)=(x-1)\cdot f(0)$, а одатле за $x=1$ имамо $f(1)=0$. Ако узмемо $x\neq -1,y=1$ добијамо $x\cdot f(x)=0\quad\Rightarrow\quad f(x)=0$ за $x\in\mathbb{R}/\{0,-1\}$. Ако узмемо $x=0,y=2$ добијамо $f(0)=f(2)=0$. Ако узмемо $x=y=-1$ добијамо $f(-1)=-f(1)=0$. Дакле одговор је $\boxed{\text{не}}$.

8. а) Ако узмемо $x=y$ добијамо $f(x)\geqslant 0$. $0\leqslant f(\frac{1}{2})\leqslant f(0)+f(1)=0$. На сличан начин, само математичком индукцијом по k показујемо и да су сви бројеви облика $\dfrac{n}{2^k}$ $(0<n<2^k,k\in\mathbb{N})$ такође нуле функције (то су бројеви који имају коначан бинарни запис!).

б) $\boxed{f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}\\ 1, & x\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}\end{cases}}$.

9. Како је функција e^{-x} монотона добијамо да је и $f(x)$ монотона: $f(x)=f(y)\ \Rightarrow\ f(f(x))=f(f(y))\ \Rightarrow\ e^{-x}=e^{-y}\ \Rightarrow\ x=y$. Ако је f монотоно растућа функција имамо да важи $x<y\ \Rightarrow\ f(x)<f(y)\ \Rightarrow\ f(f(x))<f(f(y))\ \Rightarrow\ e^{-x}<e^{-y}\ \Rightarrow\ e^x>e^y$ што је контрадикција. Ако је f монотоно опадајућа функција имамо да важи $x<y\ \Rightarrow\ f(x)>f(y)\ \Rightarrow\ f(f(x))<f(f(y))\ \Rightarrow\ e^{-x}<e^{-y}\ \Rightarrow\ e^x>e^y$ што је контрадикција. Стога таква функција $\boxed{\text{не постоји}}$.

10. Ако узмемо $x\neq 0,y=0$ добијамо $f(0)=0$. Ако узмемо $x=y=1$ добијамо $f(1)=0$. Ако узмемо $x=y=-1$ добијамо $f(-1)=0$. Ако узмемо $x>0,y=-1$ добијамо $f(-x)=-f(x)$, па даље разматрање ћемо вршити за позитивне бројеве. За $x,y>0$ можемо полазну једначину да поделимо са xy, па добијамо $\frac{f(xy)}{xy}=\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)}{y}$, тј. $g(xy)=g(x)+g(y)$ (ако ставимо $g(x)=\frac{f(x)}{x}$). Ову једначину можемо записати у облику $g(e^{\ln x+\ln y})=g(e^{\ln x})+g(e^{\ln y})$. Ако ставимо $u=\ln x$, $v=\ln y$ и $g(e^t)=h(t)$, добијамо Кошијеву функционалну једначину $h(u+v)=h(u)+h(v)$, чије је решење $h(t)=c\cdot t$, тј. добили смо $g(e^t)=c\cdot t$. Ако ставимо $x=e^t$ добијамо $g(x)=c\cdot\ln x$, а како је $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ добијамо $f(x)=c\cdot x\cdot\ln x$ за $x>0$, а како је $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0)$, тражена функција је непрекидна. Решење ове функционалне једначине је $\boxed{f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ c\cdot x\cdot\ln|x|, & x\neq 0\end{cases}}$.

11. а) Ако узмемо $x=y=\frac{t}{2}$ добијамо $f(t)=[f(\frac{t}{2})]^2\geqslant 0$. За $x=y=0$ имамо $f(0)=f(0)^2$, тј. $f(0)=0$ или $f(0)=1$. 1° Ако је $f(0)=0$ када у полазну једначину ставимо $y=0$ добијамо $f(x)=0$ за произвољно x. 2° $f(0)=1$. Означимо са $f(1)=a$. Када узмемо $y=-x$ добијамо $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

<u>I начин</u> Индукцијом се може показати да важи $f(n\cdot x)=[f(x)]^n$, $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad(*)$ и одатле за $x=1$ добијамо $f(n)=a^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Како је $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$, имамо да важи и $f(z)=a^z$, $\forall z\in\mathbb{Z}$. Ако у $(*)$ ставимо $n=q$ и $x=\frac{p}{q}$ добијамо $f(\frac{p}{q})=a^{p/q}$, па је $f(x)=a^x$, $\forall x\in\mathbb{Q}$, па како је непрекидна то важи и за све реалне бројеве.

<u>II начин</u> $f(x)\cdot f(-x)=1$, $f(x)\geqslant 0\ \Rightarrow\ f(x)>0$, тј. можемо да логаритмујемо полазну једначину и онда добијамо основну Кошијеву функционалну једначину $g(x+y)=g(x)+g(y)$ (уз смену $g(x)=\ln f(x)$), па је $g(x)=cx\ \Rightarrow\ f(x)=a^x$ (где је $a=e^c$).

Решење је $\boxed{f(x)=0 \text{ или } f(x)=a^x,\ a>0}$.

б) Означимо са $u=x+y$ и диференцирајмо полазну једначину по x: $f'_u(x+y)\cdot 1=f'(x)\cdot f(y)$. Када диференцирамо по y добијамо $f'_u(x+y)\cdot 1=f(x)\cdot f'(y)$, одакле је $f'(x)\cdot f(y)=f(x)\cdot f'(y)$, тј. $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(y)}{f(y)}$ за $f(x),f(y)\neq 0$ ($f(x)=0$ је такође једно решење). Како ово важи за произвољне x и y мора бити $\frac{f'(x)}{f(x)}$ константно, тј. $\frac{f'(x)}{f(x)}=c$, кад ово интегралимо добијамо $\ln f(x)=cx$ и одавде слично као у II решењу под а) добијамо да је $f(x)=a^x$ (где је $a=e^c$). Решење је $\boxed{f(x)=0 \text{ или } f(x)=a^x,\ a>0}$.

12. Ако уместо x и y у полазној једначини ставимо $x+y$ и 0 добијамо $f(\dfrac{x+y}{2})=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}=\dfrac{f(x+y)+f(0)}{2}$. Сменом $g(x)=f(x)-f(0)$ добијамо Кошијеву једначину $g(x+y)=g(x)+g(y)$ и њено решење је $g(x)=ax$. Ако означимо $b=f(0)$ добијамо да је $\boxed{f(x)=ax+b}$.

13. Слично као у задатку **5.** имамо да је једно решење ове функционалне једначине $\varphi(x)=\frac{1}{3}x^3$ (тј. важи $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)+xy(x+y)$). Означимо са $\Psi(x)=f(x)-\varphi(x)$ помоћну функцију Ψ. За њу важи $\Psi(x+y)=\Psi(x)+\Psi(y)$, тј. добили смо Кошијеву једначину, па је $\Psi(x)=cx$, одакле добијамо $\boxed{f(x)=\frac{1}{3}x^3+cx}$.

14. Скуп A мора имати бар четири елемента, јер $f(1)$, $f(3)$, $f(6)$ и $f(8)$ морају бити међусобно различити ($|a-b|$ је прост ако су $a,b\in\{1,3,6,8\}$, $a\neq b$). Ако $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ тражену функцију можемо задати као $f(x)=\begin{cases}a_1, & x=4k+1\\ a_2, & x=4k+2\\ a_3, & x=4k+3\\ a_4, & x=4k\end{cases}$. Тада је $f(i)=f(j)$ акко $|i-j|=4m$, па ако је разлика проста онда је $f(i)\neq f(j)$. Дакле, $\boxed{\min|A|=4}$.

15. Претпоставимо супротно, да је $f(f(n))=n+1987$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$. $f(f(n))=n+1987\ \Rightarrow\ f(n+1987)=f(f(f(n)))=f(n)+1987$, а одатле имамо (индукцијом) $f(n+1987k)=f(n)+1987k$. Сада посматрајмо само оне $0\leqslant n\leqslant 1986$. Нека је $f(n)=1987p+q$, $0\leqslant q\leqslant 1986$. Тада имамо $n+1987=f(f(n))=f(1987p+q)=f(q)+1987p$. Пошто је $n\leqslant 1986$ имамо да је $p=0$ или $p=1$. 1° $p=0$ онда $f(n)=q$, а $f(q)=n+1987$; 2° $p=1$ онда $f(n)=q+1987$, а $f(q)=f(f(n))-1987=n$. У оба случаја је $f(n)\neq f(q)$ и $n\neq q$ (да је $n=q$ имали би и $f(n)=n$ и $f(n)=n+1987$, што је немогуће), те би се скуп $\{0,1,2,\ldots,1986\}$ могао разбити на парове (a,b) тако да је $f(a)=b$ и $f(b)=a+1987$, што је немогуће јер тај скуп има непаран број елемената.

16. Ако у полазној једначини свако x заменимо са $1-x$ добијамо једначину $f(1-x)=(\frac{3}{2}-x)\cdot f(x)=1$. Ако означимо $f(x)=a$ и $f(1-x)=b$ од ове и полазне једначине добијамо систем $a+(x+\frac{1}{2})b=1$, $(\frac{3}{2}-x)a+b=1$. $\Delta=-(x-\frac{1}{2})^2$, а $\Delta_a=x-\frac{1}{2}$, па добијамо да је за $x\neq\frac{1}{2}$ јединствено решење $f(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}-x}=\frac{2}{1-2x}$. $f(\frac{1}{2})$ добијамо када заменимо $x=\frac{1}{2}$ у полазну једначину: $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. Стога је једино решење $\boxed{f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=\frac{1}{2}\\ \frac{2}{1-2x}, & x\neq\frac{1}{2}\end{cases}}$.

17. Пример: $\boxed{f(x)=x^{\sqrt{2}}}$. Ако је $x\in(0,1)$ имамо да важи $f(x)\neq x$ (због $x^2=f(f(x))=f(x)=x\neq x^2$) и $f(x)\neq x^2$ ($x^2=f(f(x))=f(x^2)$, што је немогуће због претходног). Из непрекидности функције $f(x)$ следи да функције $f(x)-x$ и $f(x)-x^2$ имају на интервалу $(0,1)$ сталан знак. Неједнакост $f(x)>x$ је немогућа (иначе је $x^2=f(f(x))>f(x)>x>x^2$). Слично је немогуће и $f(x)<x^2$ (тада би било $x^2=f(f(x))<(f(x))^2<(x^2)^2<x^2$). Дакле важи $x^2<f(x)<x$ за $x\in(0,1)$, што је и требало доказати.

18. Прво ћемо показати да важи $f(x)\cdot f(y) \geqslant (f(\sqrt{xy}))^2$ за свако $x,y>0$. Ставимо $z=\sqrt{xy}$ и посматрајмо израз $f(x)\cdot f(y)-f(\sqrt{z})^2 = a^2(x^2y^2-z^4)+b^2(xy-z^2)+c^2(1-1)+ab(x^2y+xy^2-2z^3)+ac(x^2+y^2-2z^2)+bc(x+y-2z) = ab(\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2})^2+ac(x-y)^2+bc(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$ $(z=\sqrt{xy})$. Производ $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$ допунимо до 2^k фактора: $\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}_{2^k}=1$ и на њих по паровима применимо горњу неједнакост довољан број пута и добијамо $\underbrace{f(1)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(1)\cdot f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\ldots\cdot f(x_n)}_{2^k} \geqslant (f(\sqrt[2^k]{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n})^{2^k} = (f(1))^{2^k}$. Како је $f(1)=a+b+c=1$, добијамо тражену неједнакост $f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\ldots\cdot f(x_n)\geqslant 1$.

19. Ако заменимо $x=y=\dfrac{1}{2}$ имамо $\dfrac{f(1)-f(\frac{1}{2})}{f(\frac{1}{2})-f(0)} \geqslant \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(\dfrac{1}{2}) \leqslant \dfrac{2}{3}$.

$x=y=\dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{4})}{f(\frac{1}{4})-f(0)} \geqslant \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(\dfrac{1}{4}) \leqslant \dfrac{2}{3}f(\dfrac{1}{2}) \leqslant \dfrac{4}{9}$.

$x=\dfrac{3}{4}, y=\dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{f(1)-f(\frac{3}{4})}{f(\frac{3}{4})-f(\frac{1}{2})} \geqslant \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(\dfrac{3}{4}) \leqslant \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}f(\dfrac{1}{2}) \leqslant \dfrac{8}{9}$.

$x=y=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{f(\frac{2}{3})-f(\frac{1}{3})}{f(\frac{1}{3})-f(0)} \geqslant \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(\dfrac{2}{3}) \geqslant \dfrac{3}{2}f(\dfrac{1}{3})$.

$x=\dfrac{1}{3}, y=\dfrac{1}{12} \Rightarrow \dfrac{f(\frac{5}{12})-f(\frac{1}{3})}{f(\frac{1}{3})-f(\frac{1}{4})} \geqslant \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(\dfrac{5}{12}) \geqslant \dfrac{3}{2}f(\dfrac{1}{3})-\dfrac{1}{2}f(\dfrac{1}{4}) \geqslant \dfrac{3}{2}f(\dfrac{1}{3})-\dfrac{2}{9}$.

$x=\dfrac{2}{3}, y=\dfrac{1}{12} \Rightarrow \dfrac{f(\frac{3}{4})-f(\frac{2}{3})}{f(\frac{2}{3})-f(\frac{7}{12})} \geqslant \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(\dfrac{7}{12}) \geqslant 3f(\dfrac{2}{3})-2f(\dfrac{3}{4}) \geqslant \dfrac{9}{2}f(\dfrac{1}{3})-\dfrac{16}{9}$.

$x=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{1}{12} \Rightarrow \dfrac{f(\frac{7}{12})-f(\frac{1}{2})}{f(\frac{1}{2})-f(\frac{5}{12})} \leqslant 2 \Rightarrow \dfrac{\frac{9}{2}f(\frac{1}{3})-\frac{16}{9}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}f(\frac{1}{3})+\frac{2}{9}} \leqslant 2 \Rightarrow f(\dfrac{1}{3}) \leqslant \dfrac{76}{135}$.

20. Ако је $w>2$ ставимо у (1) $x=w-2, y=2$ и добијамо $f(w)=0$, тј. важи $f(x)=0 \Leftrightarrow x\geqslant 2$. Нека је $0\leqslant y<2, x\geqslant 0$. Лева страна неједнакости (1) једнака је 0 акко $x\cdot f(y)\geqslant 2$. Десна страна неједнакости (1) једнака је 0 акко $x+y\geqslant 2$. Значи $x\cdot f(y)\geqslant 2 \Leftrightarrow x+y\geqslant 2$, тј. $x\geqslant\frac{2}{f(y)} \Leftrightarrow x\geqslant 2-y$. Одатле следи $\frac{2}{f(y)}=2-y$, па је једино могуће $f(y)=\frac{2}{2-y}$ за $0\leqslant y<2$. Покажимо још да функција $\boxed{f(x)=\begin{cases}0, & x\geqslant 2\\ \frac{2}{2-x}, & 0\leqslant x<2\end{cases}}$ задовољава услове задатка (услови (2) и (3) су елементарно задовољени, а за (1) имамо случајеве):

1° $x+y<2, x\cdot f(y)<2$. Тада је $0\leqslant y<2$, па је $f(y)=\frac{2}{2-y}$. $f(xf(y))=\frac{2}{2-xf(y)}=\frac{2-y}{2-2x-2y}$, па је $f(xf(y))f(y)=\frac{2}{2-2x-2y}=f(x+y)$.

2° $x+y\geqslant 2, x\cdot f(y)\geqslant 2$. Тада су обе стране једнакости (1) једнаке 0.

3° $x+y\geqslant 2, x\cdot f(y)<2$. Тада је $y\geqslant 2$ и обе стране једнакости (1) су једнаке 0 (иначе за $0\leqslant y<2$ $x\cdot\frac{2}{2-y}<2 \Rightarrow x+y<2$ што је контрадикција).

4° $x+y<2, x\cdot f(y)\geqslant 2$. Овај случај је немогућ јер $f(y)\geqslant\frac{2}{x} \Rightarrow 0\leqslant y<2$ и $x\cdot\frac{2}{2-y}\geqslant 2 \Rightarrow x+y\geqslant 2$.

21. Постоји јединствена f која задовољава услове задатка, јер f има фиксне вредности у свим тачкама $x=\frac{n}{2^k}$ и непрекидна је. $f(x)=f(y)$ само ако је $x=y$ јер $f(x)=f(y)$ за $x<y$ повлачи (истом конструкцијом као и малопре) да је $f(z)=f(x)$ $\forall z\in[x,y]$, а одатле (одговарајућом екстраполацијом) и за све $z\in[0,1]$, што је контрадикција $(f(0)=0, f(1)=1)$. Уведимо помоћну функцију $g(x)=\dfrac{f(\frac{1}{8}+\frac{x}{8})-f(\frac{1}{8})}{f(\frac{1}{4})-f(\frac{1}{8})}$, $g(0)=0$ и $g(1)$. Због лакшег писања ставимо да је $g(x)=Af(Bx+C)+D$. Тада је $g(\frac{x+y}{2})=Af(B\frac{x+y}{2}+C)+D=Af(\frac{Bx+C}{2}+\frac{By+C}{2})+D=(1-a)Af(Bx+C)+(1-a)D+aAf(By+C)+aD=(1-a)g(x)+ag(y)$. Како и за функцију g важе сви услови задатка добијамо $f(x)=g(x)$, па је $f(\dfrac{1}{7})=g(\dfrac{1}{7})=\dfrac{f(\frac{1}{7})-f(\frac{1}{8})}{f(\frac{1}{4})-f(\frac{1}{8})}$, тј. $f(\dfrac{1}{7})=\dfrac{f(\frac{1}{8})}{1-f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{8})}$. Како је $f(\dfrac{1}{2})=a$, $f(\dfrac{1}{4})=a^2$ и $f(\dfrac{1}{8})=a^3$ добијамо $\boxed{f(\dfrac{1}{7})=\dfrac{a^3}{1-a^2+a^3}}$.

22. Стандардним поступком (ово је Кошијева једначина) добијамо да је $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{Q}$, али је проблем што овде није дата непрекидност ове реалне функције. Лако се из другог услова види да је $f(x)\neq 0$ за $x\neq 0$. Лако се види и да је ова функција "1–1": $f(x)=f(y) \Rightarrow f(x-y)=f(x+(-y))=f(x)-f(y)=0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$. За произвољно реално $a\neq a^2$ имамо: $\dfrac{1}{f(a)-f(a^2)}=\dfrac{1}{f(a(1-a))}=f(\dfrac{1}{a(1-a)})=f(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{1-a})=f(\dfrac{1}{a})+f(\dfrac{1}{1-a})=\dfrac{1}{f(a)}+\dfrac{1}{f(1-a)}=\dfrac{1}{f(a)}+\dfrac{1}{1-f(a)}=\dfrac{1}{f(a)-f(a)^2}$, па је $f(a^2)=f(a)^2$ за $\forall a\in\mathbb{R}/\{0,1\}$, али како је $f(0)=0$ и $f(1)=1$, добијамо да је $f(x^2)=f(x)^2$, за $\forall x\in\mathbb{R}$. Ако је $a<b$ тада је $b-a=x^2$ за неко $x\in\mathbb{R}$, па $f(b)-f(a)=f(b-a)=f(x^2)=f(x)^2>0 \Rightarrow f(a)<f(b)$. За сваки ирационалан број $x\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ постоје рационални низови $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такви да је x једини реалан број који задовољава

$a_n < x < b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, па је $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
23. Једино решење једначине $m^n = n^m,\ m \neq n$ је $2^4 = 4^2 \ \Rightarrow\ \underline{f(2) = 4}$ (због услова строго растућа). Због мултипликативности имамо $f(30) = f(2) \cdot f(3) \cdot f(5)$. $4 = \underline{f(2) < f}(3) < f(4) = f(2) \cdot f(2) = 16$. За $f(3) = k,\ 5 \leqslant k \leqslant 8$ имамо контрадикцију $f(9) = k^2 \leqslant 64 = f(8)$ са условом да је функција растућа. Слично, ако је $f(3) = k,\ 11 \leqslant k \leqslant 15$ имамо контрадикцију $f(27) = k^3 \geqslant 1331 > 1024 = 4^5 = f(32)$. Ако би било $f(3) = 10$ имамо $f(3^5) = f(243) = 10000 > 65536 = 4^8 = f(256)$. Стога је $\underline{f(3) = 9}$. $16 = f(4) < f(5) < f(6) = f(2) \cdot f(3) = 36$. За $f(5) = k,\ 17 \leqslant k \leqslant 24$ имамо контрадикцију $289 \leqslant f(\overline{25) \leqslant 57}6 = f(24)$. Ако $27 \leqslant f(5) \leqslant 35$ имамо $f(27) = 729 \leqslant f(25) \leqslant 1255$. Ако би било $f(5) = 26$ имамо $f(125) = f(5^3) = 26^3 = 17576 > 16384 = 4^7 = f(128)$. Стога је $\underline{f(5) = 25}$. На основу свега изложеног добијамо $\boxed{f(30) = 900}$.
24. Покажимо да су сва решења ове једначине негативна. Нека је $f(u) = 0$. Због услова **2)** имамо да је $u \neq 0$. Претпоставимо да је $u > 0$. Због услова **1)** и **3)** са $x = u, y = 0 \ \Rightarrow\ \exists z \in [0, u]\ f(z) = z$. Али сада из услова **5)** са $x = z, y = u$ добијамо $0 = f(z) \cdot f(u) = f(z \cdot f(u) + u \cdot f(z) - uz) = f(u \cdot 0 + uz - uz) = f(0) = 1$ – контрадикција, па је $u < 0$. Због услова **2)** можемо уочити највеће решење $u_0 < 0$. Из услова **5)** имамо $f(x) \cdot f(u_0) = f(x \cdot f(u_0) + u_0 \cdot f(x) - xu_0)$, тј. $0 = f(u_0(f(x) - x))$. Како је u_0 највећа нула имамо $u_0 > u_0(f(x) - x)$, што са условом $u_0 < 0$ даје $f(x) - x \geqslant 1$. Из овога и услова **4)** следи $\boxed{f(1987) = 1988}$.
25. $\underline{\text{I решење}}$ Означимо $f(1) = r$ и $f(2) = s$. Сада ћемо вишеструко користити услов задатка. $m = n = 1 \ \Rightarrow\ \underline{f(2r) = 2}$. $m = n = 2 \ \Rightarrow\ f(2s) = 4$. $m = n = 2r \ \Rightarrow\ f(4) = 4r$. $m = 1, n = 4 \ \Rightarrow\ f(5r) = 5$. $m = 1, n = 2 \ \Rightarrow\ f(s + r) = 3$. $m = n = 2s \ \Rightarrow\ f(8) = 4s$. $m = 5r, n = s + r \ \Rightarrow\ f(8) = 6r + s$. Из последње две једнакости добијамо $s = 2r$. $m = 2r, n = s + r \ \Rightarrow\ f(5) = 3r + s = 5r$. Сада ћемо математичком индукцијом (са n на $n + 2$) показати да за $\forall n \geqslant 4$ важе тврђења (А) $f(nr) = n$ и (Б) $f(n) = nr$. База: тврђења важе за $n = 4$ и $n = 5$. Претпоставимо да оба тврђења важе за $n = k$: $f(kr) = k$ и $f(k) = kr$. Посматрајмо шта се дешава са $n = k + 2$: $m = k, n = 2 \ \Rightarrow\ f(k + 2) = (k + 2)r$ и $m = kr, n = 2r \ \Rightarrow\ f(k + 2) = (k + 2)r$, те тврђења важе за свако $n \in \mathbb{N}$. Како је $4r \geqslant 4$ по особини (Б) имамо $f(4r) = 4r^2$, а из (А) имамо $f(4r) = 4$, што нам даје $r = 1$, тј. $\boxed{f(n) = n}$.
$\underline{\text{II решење}}$ $f(f(1) + n + m) = f(f(1) + f(f(n) + f(m))) = 1 + f(n) + f(m)$, па је $f(n) + f(m)$ функција од $n + m$, тј. $f(n) + f(m) = g(n + m)$. Стога имамо $f(n + 1) + f(1) = g(n + 2) = f(n) + f(2)$, тј. $f(n + 1) - f(n) = f(2) - f(1) \ \Rightarrow\ f(n) = an + b$. Ако у полазну једначину заменимо $m = n = 1$ добијамо $f(f(1) + f(1)) = 2 = f(2a + 2b) = a(2a + 2b) + b$. Ако у полазну једначину заменимо $m = 1, n = 2$ добијамо $f(f(1) + f(2)) = 3 = f(3a + 2b) = a(3a + 2b) + b$. Решавањем овог система добијамо $b = 0$ и $a^2 = 1$, тј $a = 1$. Дакле, $\boxed{f(n) = n}$.

26. $f(y_1) = f(y_2) \ \Rightarrow\ f(1 \cdot (f(y_1)) = f(1 \cdot (f(y_2)) \ \Rightarrow\ \dfrac{f(1)}{y_1} = \dfrac{f(1)}{y_2} \ \Rightarrow\ y_1 = y_2$ ($f(1) \neq 0$ јер $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$) па је функција "1–1". Ако у полазну једначину ставимо $y = 1$ добијамо да је $f(1) = 1$ (јер је "1–1"). Ако у полазну једначину ставимо $x = 1$ добијамо да је $f(f(y)) = \dfrac{1}{y}\ y \in \mathbb{Q}^+$. Ако на два различита начина развијемо $f(f(f(y)))$ добијамо $f(f(f(y))) = \frac{1}{f(y)} = f(\frac{1}{y})\ y \in \mathbb{Q}^+$. Ако у полазну једначину заменимо $y = f(\frac{1}{t})$ добијамо да је тражена функција мултипликативна $f(x \cdot t) = f(x) \cdot f(t)\ x, y \in \mathbb{Q}^+$. Проблем смо свели на следећи: Наћи функцију за коју важи $f(x \cdot t) = f(x) \cdot f(t)\ x, y \in \mathbb{Q}^+$ и $f(f(x)) = \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}^+$ (стављањем $t = f(y)$ добијамо полазну функционалну). Мултипликативна функција задовољава $f({p_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {p_r}^{\alpha_r}) = f(p_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot f(p_r)^{\alpha_r}$ и како је $f(\frac{p}{q}) = \frac{f(p)}{f(q)}$ имамо да ово важи и за $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. Да би функција задовољавала и други услов узећемо $f(p_j) = \begin{cases} p_{j+1}, & j \text{ neparno} \\ \frac{1}{p_{j-1}}, & j \text{ parno} \end{cases}$, где је p_j j–ти прост број. Тражена функција је дата преко $\boxed{f({p_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {p_r}^{\alpha_r}) = f(p_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot f(p_r)^{\alpha_r},\ \alpha_i \in \mathbb{Z} \text{ и } f(p_j) = \begin{cases} p_{j+1}, & j \text{ neparno} \\ \frac{1}{p_{j-1}}, & j \text{ parno} \end{cases}}$.
27. Ако заменимо $m = n = 1$ добијамо $f(1) \cdot (3f(1) + 1) = 0$, па како $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ добијамо да је $f(1) = 0$. Математичком индукцијом се лако покаже да ако је $f(x) = a$ тада је $f(x^k) = \dfrac{(3a + 1)^k - 1}{3}$. Такође се индукцијом може показати и да је општи облик функције $f({p_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {p_r}^{\alpha_r}) = \dfrac{(3s_1 + 1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (3s_r + 1)^{\alpha_r} - 1}{3}$, где је $f(p_i) = s_i$. Како је у условима задатка дато да је f бијекција она је и "на", па постоје бројеви a, b и c такви да је $f(a) = 1$, $f(b) = 3$ и $f(c) = 8$. Из претходне дискусије за општи облик функције добијамо да бројеви a, b и c морају бири прости, али тада је $f(ac) = \dfrac{4 \cdot 25 - 1}{3} = 33 = \dfrac{10 \cdot 10 - 1}{3} = f(b^2)$, што је контрадикција јер f треба да буде и "1–1".
28. За $x = y = 0$ добијамо $f(0)^2 = f(0)$, па је $f(0) = 0$ или $f(0) = 1$. Ако је $f(0) = 0$ тада из услова за $y = 0$ добијамо да је $f(x) = 0$ за свако позитивно x. Како је $f(-x)f(-x) = f\left(\sqrt{(-x)^2 + (-x)^2}\right) = 0$ добијамо да је тада и $f(-x) = 0$, тј. $f(0) = 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$.
Ако је $f(0) = 1$ тада је $f(-x) = f(-x)f(0) = f\left(\sqrt{(-x)^2 + 0^2}\right) = f\left(\sqrt{x^2 + 0^2}\right) = f(x)f(0) = f(x)$, тј. функција

f је парна. Функција f је и ненегативна због $f(-x)=f(x)=\left[f(\sqrt{x/2})\right]^2\geqslant 0$ (када уместо и x и y узмемо $\sqrt{x/2}$, где је $x>0$). Нека је $f(1)=a$. Математичком индукцијом се лако покаже да је за природне бројеве n испуњено $f(n)=a^{n^2}$. Због парности и $f(0)=1=a^{0^2}$ то се проширује на целе бројеве, а затим и на рационалне (да би могли да извучемо неки паран корен и да се не мислимо да ли је то позитивна или негативна вредност, користимо чињеницу да је $(\forall x)\ f(x)\geqslant 0)$ једноставним рачуном. Како је функција f непрекидна тврђење се преноси са рационалних на реалне бројеве, тј. добијамо да је тражена функција $f(x)=a^{x^2}$ $(\forall x\in\mathbb{R})$.

Значи, $\boxed{\text{за } a<0 \text{ функција } f \text{ не постоји, а за } a\geqslant 0 \text{ је } f(x)=a^{x^2}}$.

29. **а)** $f(x)=\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{2002}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2002}}$; **б)** $f(x)=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2002}\right)^2$.

30.

31.

32. Из $f(f(m)+f(n))=f(f(m))+f(n)$ заменом m и n добијамо

$$f(f(m))-f(f(n))=f(m)-f(n)$$

одакле следи да на скупу слика S важи $f(s_1)-f(s_2)=s_1-s_2$, односно $f(s)=s+c$. Како $2\in S$ и $f(2)=4$, следи да је

$$\forall s\in S,\quad f(s)=s+2. \tag{1}$$

Одатле добијамо да је $f(2n)=2n+2$. Како је f 1-1, слике непарних бројева морају бити непарни бројеви. Нека је $2p+1$ најмањи непаран број у S. Из (1) имамо да је за сваки непаран број $2s+1$ који није мањи од $2p+1$ важи $f(2s+1)=2s+3$, па је и $2p+1$ слика неког мањег непарног броја. Доказаћемо да је $2p+1=5$. Како је $2p+1$ најмањи непаран број у S, и f 1-1, онда $p-1$ бројева $3,5,...,2p-1$ морају да се сликају у неке од $p+1$ бројева $1,3,...,2p+1$. Одатле следи да је $2p+1=5$ и $f(3)=5$ ($f(3)=1$ је контрадикција са $1\in S$ и (1)). Дакле једини кандидат за функцију која задовољава услове задатка је:

$$f(1)=2,\quad f(n)=n+2,\quad n>1.$$

Лако са проверава да она заиста задовољава услове задатка.

33.

34.

35. Како $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_0$ имамо да је $f(n)\geqslant 0\ \forall x\in\mathbb{N}$. Из услова **3)** и **1)** добијамо $f(10)=f(2)+f(5)=0\ \Rightarrow\ f(2)=f(5)=0$. Сваки природан број n може се представити у облику $n=2^\alpha\cdot 5^\beta\cdot c$, где је c број облика $10k\pm 1$ или $10k\pm 3$. За свако такво c важи да је c^2 број облика $10k+1$ (у првом случају) или $10k-1$, па је c^4 број облика $10k+1$, тј. $3c^4$ је облика $10k+3$. На основу особина **2)** и **1)** имамо да је $f(3c^4)=f(10k+3)=0$, али и $f(3c^4)=f(3)+4f(c)$, па како је $f(3)+4f(c)=0\ \Rightarrow\ f(c)=0$, за свако c узајамно просто са 2 и 5. Како је $f(2)=F(5)=f(c)=0$ из особине **1)** добијамо да је $\boxed{f(n)=0}$.

36.

44.

45. Додамо 1 на обе стране и уведемо $g(x)=f(x)+1$ и добијамо функционалну једначину $g(x+y)=g(x)\cdot g(y)$, чије је решење по **11.** задатку $g(x)=0$ или $g(x)=a^x$, $a>0$. Стога је $\boxed{f(x)=-1 \text{ или } f(x)=a^x-1,\ a>0}$.

46.

47. За $x_1=x_2=0$ из услова (ц) следи да је $f(x)\leqslant 0$, што са условом (а) даје $f(0)=0$, па неједнакост $f(x)\leqslant 2x$ важи за $x=0$. Ако у (ц) ставимо $x_1=x$, $x_2=1-x$ и искористимо (б), добијамо да важи $f(x)\leqslant 1$ за свако $x\in[0,1]$. Тражена неједнакост је еквивалентна са $\dfrac{f(x)}{x}\leqslant 2$.

1° Ако је $x\in(\frac{1}{2},1]$, тада је $\dfrac{f(x)}{x}\leqslant 1x<2$, јер је $f(x)\leqslant 1$ и $x>\dfrac{1}{2}$.

2° Ако је $x\in(0,\frac{1}{2}]$, тада је $2x\in(0,1]$, па из услова (ц) за $x_1=x_2=x$ следи да је $2f(x)\leqslant f(2x)$, тј. $\dfrac{f(x)}{x}\leqslant\dfrac{f(2x)}{2x}$ (1) за свако $x\in(1,\frac{1}{2}]$. За $x\in(1,\frac{1}{2}]$ важи $x<2x<2^2x<\ldots<2^{n-1}x\leqslant\frac{1}{2}<2^nx$, за неко $n\in\mathbb{N}$. Ала тада вишетруким коришћењем једнакости (1) добијамо $\dfrac{f(x)}{x}\leqslant\dfrac{f(2x)}{2x}\leqslant\ldots\leqslant\dfrac{f(2^{n-1}x)}{2^{n-1}x}\leqslant\dfrac{f(2^nx)}{2^nx}<2$, при чему последња неједнакост важи јер је $2^nx>\dfrac{1}{2}$ (то је случај 1°, који смо већ показали) и $f(2^nx)\leqslant 1$. Тиме је тврђење задатка доказано.

48. Након срећивања, услов (1) постаје: $f(x+y)+(x+y)=(f(x)+x)(f(y)+y)$, тј. ако означимо са $g(x)=f(x)+x$, добијамо:

$(1')\quad g(x+y)=g(x)g(y),\quad$ за свако $x,y\in\mathbb{Q}$,
$(2')\quad g(x)=2g(x+1),\quad$ за свако $x\in\mathbb{Q}$,
$(3')\quad g(1)>0$.
За $x=y=0$ из $(1')$ добијамо $g(0)=(g(0))^2$, па је $g(0)=0$ или $g(0)=1$. За $x=0$ из $(2')$ и $(3')$ добијамо $g(0)=2g(1)>0$, па је $g(0)=1$. Из $(2')$ је $g(1)=\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^1$, па можемо показати, користећи $(1')$ и принцип математичке индукције, да је

$$g(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\quad(\forall n\in\mathbb{N}).$$

Ако у једнакост $(1')$ уместо y ставимо $y=-x$ добијамо $g(0)=1=g(x)g(-x)$, па је

$$g(-x)=\frac{1}{g(x)}.\tag{$*$}$$

То нам заједно са $g(0)=1=\left(\frac{1}{2}\right)^0$ и $g(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\quad(\forall n\in\mathbb{N})$ даје

$$g(z)=\left(\frac{1}{2}\right)^z\quad(\forall z\in\mathbb{Z}).$$

Ако у једнакост $(1')$ уместо x и y ставимо $\frac{x}{2}$ добијамо да је

$$g(x)=g(\frac{x}{2})g(\frac{x}{2})=(g(\frac{x}{2}))^2\geqslant 0$$

за свако $x\in\mathbb{Q}$. Због тога када вадимо m-ти корен он је једнозначно одређен и када је m паран број (узимамо позитивну вредност!).
Индукцијом по m можемо показати да је $g(m\cdot x)=g(x)^m$ за свако $m\in\mathbb{N}$. Коришћењем једнакости $(*)$ добијамо и

$$g(m\cdot x)=g(x)^m\tag{$**$}$$

за свако $m\in\mathbb{Z}$. Ако овде ставимо $x=\frac{1}{m}$ добијамо да је

$$g(m\cdot\frac{1}{m})=g(1)=\frac{1}{2}=\left(g(\frac{1}{m})\right)^m$$

и одатле је

$$g(\frac{1}{m})=\sqrt[m]{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/m}$$

за сваки $m\in\mathbb{N}$. Ако у једнакост $(**)$ ставимо $x=\frac{1}{k}$ добијамо $g(\frac{m}{k})=\left(\frac{1}{2}\right)^{m/k}$, односно

$$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x\quad(\forall x\in\mathbb{Q}).$$

Враћањем назад добијамо да је

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-x=2^{-x}-x,\quad(x\in\mathbb{Q}).$$

Провером лако видимо да ова функција задовољава сва три услова задатка.

49. За $x=1$ и $y=\dfrac{2003}{2002}$ из 1° добијамо $2=f(1)\cdot 2$, тј. $f(1)=1$. За $x=y=-1$ из 1° добијамо $[f(-1)]^2=f(1)=1$, тј. $f(-1)=1$ (јер f слика у $[0,+\infty)$). Сада математичком индукцијом и коришћењем услова 2° показујемо да је $f(n)\leqslant 1$ за свако $n\in\mathbb{N}$. Како је $f(-n)=f(-1)\cdot f(n)=f(n)\leqslant 1$ и како из $f(-1)\leqslant 1\ \Rightarrow\ f(0)\leqslant 1$ добијамо да је $f(z)\leqslant 1$ $(\forall z\in\mathbb{Z})$.
За бројеве $x,y\neq 0$ имамо $f(\frac{x}{y})f(\frac{y}{x})=f(1)=1$ па је или $f(\frac{x}{y})\leqslant 1$ или $f(\frac{y}{x})\leqslant 1$. Нека је нпр. $f(\frac{x}{y})\leqslant 1$. Тада због услова 2° је $f(1+\frac{x}{y})\leqslant 1$, па је $f(x+y)=f(y)\cdot f(1+\frac{x}{y})\leqslant f(y)$, тј. добијамо да важи $f(x+y)\leqslant\max\{f(x),f(y)\}$.
Нека су p и q прости бројеви и нека је $f(q)\neq 1$ (тј. $f(q)<1$). Како су $(p,q)=1$, постоје $a,b\in\mathbb{Z}$ такви да је $ap+bq=1$ и како је $f(bq)=f(b)f(q)\leqslant f(q)<1$ (и b и q су природни па важи $f(b)\leqslant 1$ и $f(q)\leqslant 1$) добијамо, коришћењем претходног разматрања са максимумом, да је $1=f(1)=f(ap+bq)\leqslant f(ap)\leqslant 1$ (и ap је зео број), а да би ово важило мора бити $f(ap)=1$, тј. $f(ap)=f(a)f(p)=1\cdot 1$, па је $f(p)=1$. Следи да је $f(p)=1$ за сваки прост број, сем евентуално једног.
На основу услова 1° имамо да је функција f дата са $f\left(\pm p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}\right)=(f(p_1))^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(f(p_k))^{\alpha_k}$, где су $\alpha_i\in\mathbb{Z}$.
Како је $2=f(\frac{2003}{2002})=\dfrac{f(2003)}{f(2)f(7)f(11)f(13)}$, добијамо да је један од бројева $f(2),f(7),f(11),f(13)$ једнак $\dfrac{1}{2}$.

Стога $f(\frac{2004}{2003}) = \dfrac{[f(2)]^2 f(3) f(167)}{f(2003)}$ је или $\dfrac{1}{4}$ или 1, у зависности од тога да ли је $f(2) = \dfrac{1}{2}$ или $f(2) = 1$.

Обе ове вредности се могу постићи, $f(\frac{2004}{2003}) = \dfrac{1}{4}$: ако је $f(2) = \dfrac{1}{2}$, $f(p) = 1$ за остале просте бројеве и $f(\pm p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}) = (f(p_1))^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (f(p_k))^{\alpha_k}$. Потребно је показати да ова функција задовољава услове 1°–3°. Услови 1° и 3° су очигледни, а за 2° имамо следеће: $f(x) > 1$ ако и само ако је x облика $x = \pm \dfrac{q_1^{\beta_1} \dots q_s^{\beta_s}}{2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}}$, где су $\alpha_i > 0, \beta_j > 0$, односно уколико је именилац броја x паран број. Супротно $f(x) \leqslant 1$ акко је именилац броја x непаран, а тада је и именилац броја $x+1$ такође непаран, па важи и услов 2°.

$f(\frac{2004}{2003}) = 1$: нпр. за $f(7) = \dfrac{1}{2}$, $f(p) = 1$ за остале просте бројеве и $f(\pm p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}) = (f(p_1))^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (f(p_k))^{\alpha_k}$. Проверавање услова иде аналогно (само се сада гледа да ли је именилац броја x дељив са 7!).

50.

51.

52. Ставимо $f(1) = a$. Како је за свако x, $f(x) = f(\frac{x+2x}{3}) = \frac{f(x)+f(2x)}{3}$, добијамо $f(2x) = f(x)$: између осталог, $f(1) = f(2) = f(4) = a$. Такође, $a = f(2) = f(\frac{3+3}{3}) = \frac{f(3)+f(3)}{2} = f(3)$.
Доказаћемо индукцијом да је $f(n) = a$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Претпоставимо да је $f(1) = f(2) = \dots = f(n-1) = a$. Тада за дато n постоји $i \in \{1, 2, 3\}$ такво да је $n + i$ дељиво са 3. Зато је $a = f(\frac{n+i}{3}) = \frac{f(n)+f(i)}{2} = \frac{f(n)+a}{2}$, тј. $f(n) = a$, с обзиром на то да је $\frac{n+i}{3} \leqslant n-1$ за $n \geqslant 4$. Овим је индукција завршена.

53. <u>*Решење 1*</u>: Ако је a решење дате једначине, онда, због $x + f(x) = f(f(x))$ $\quad (*)$, важи једнакост $a = -f(a)$. Замењујући $x = f(a)$ у $(*)$, добијамо $a = -f(a) - f(f(a)) = -f(f(f(a))) = -f(0)$. Опет из $(*)$, за $x = 0$, добијамо $f(0) = f(f(0))$, а за $x = f(0)$: $f(0) + f(f(0)) = f(f(f(0))) = f(f(0))$, па је $f(0) = 0$, тј. $a = 0$. Покажимо још да је 0 решење дате једначине: $f(f(0)) = f(0) = 0$.

<u>*Решење 2*</u>: Из функционалне једначине непосредно следи да је f инјективно пресликавање. Стављањем $x = 0$ добијамо да је $f(0) = f(f(0))$ што због инјективности даје $f(0) = 0$. Опет, због инјективности, имамо да је 0 једино решење једначине $f(x) = 0$ а тиме и $f(f(x)) = 0$.

54. Нека је $S_N = \{(m,n) \in S \mid m + n = N\}$ за произвољан непаран број $N > 1$. Ако је $f(m,n) = (m_1, n_1)$, онда је $m_1 + n_1 = m + n$ и m_1 је непаран, $m_1 \leqslant \frac{n}{2} < \frac{N}{2} < n_1$, што значи да f слика S_N у S_N. Шта више, f је бијективна јер је за дато $f(m,n) = (m_1, n_1)$ број n једнозначно одређен као јединствен паран број облика $2^k m_1$ који припада интервалу $[\frac{N+1}{2}, N]$. Самим тим је и m једнозначно одређено.

Скуп S_N има највише $\left[\frac{N+1}{4}\right]$ елемената, при чему једнакост важи ако и само ако је N прост. Према томе, за свако $(m,n) \in S_N$ постоје s, r, $1 \leq s < r \leq \left[\frac{N+5}{4}\right]$ такви да је $f^s(m,n) = f^r(m,n)$. Због бијективности f следи $f^t(m,n) = (m,n)$ за $t = r - s$, $0 < t \leq \left[\frac{N+1}{4}\right] = \left[\frac{m+n+1}{4}\right]$.

Нека је $(m,n) \in S_N$ и нека је t најмањи природан број за који је $f^t(m,n) = (m,n)$. Пишемо $(m,n) = (m_0, n_0)$ и $f^i(m,n) = (m_i, n_i)$ за $i = 1, \dots, t$. Тада постоје $a_i \in \mathbb{N}$ такви да је $2^{a_i} m_i = n_{i-1}$, $i = 1, \dots, t$. Како је $m_t = m_0$, множењем ових једнакости добијамо

$$2^{a_1+a_2+\dots+a_t} m_0 m_1 \dots m_{t-1} = n_0 n_1 \dots n_{t-1} \equiv (-1)^t m_0 m_1 \dots m_{t-1} \pmod{N}. \tag{1}$$

Следи да $N \mid 2^k \pm 1$ и одатле $N \mid 2^{2k} - 1$, где $k = a_1 + \dots + a_t$. С друге стране, такође следи $2^k \mid n_0 n_1 \dots n_{t-1} \mid (N-1)(N-3) \cdot \dots \cdot (N - 2[\frac{N}{4}])$. Међутим, из једнакости

$$\frac{(N-1)(N-3) \cdot \dots \cdot (N - 2[\frac{N}{4}])}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2[\frac{N-2}{4}] + 1)} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (N-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \frac{N-1}{2}} = 2^{\frac{N-1}{2}},$$

закључујемо $0 < k \leq \frac{N-1}{2}$, при чему важи једнакост ако и само ако $\{n_1, \dots, n_t\}$ је скуп свих парних бројева од $\frac{N+1}{2}$ до $N-1$, и дакле $t = \frac{N+1}{4}$.

Ако је сада $N \nmid 2^h - 1$ за $1 \leq h < N-1$, мора бити $2k = N - 1$. Закључујемо да је $t = \frac{N+1}{4}$.

55. Имамо да је $f(x+a+b) - f(x+a) = f(x+b) - f(x)$, за $a = 1/6$ и $b = 1/7$. Сабирајући ове једнакости за $x, x+b, \dots, x+6b$ добијамо $f(x+a+1) - f(x+a) = f(x+1) - f(x)$. Сабирајући нове једнаксоти за $x, x+a, \dots, x+5a$ добијамо:

$$f(x+2) - f(x+1) = f(x+1) - f(x).$$

Индукцијом закључујемо да је $f(x+n) - f(x) = n[f(x+1) - f(x)]$. Ако би било $f(x+1) \neq f(x)$, онда би $f(x+n) - f(x)$ по апсолутној вредности могло да буде веће од произвољно великог броја за довољно велико n, што противречи претпоставци да је f ограничена. Дакле $f(x+1) = f(x)$ за свако x.