Додатна настава за први разред
30. октобар 2005.г.

# Елементарна геометрија

*Милан Новаковић*

1. Дати су кругови $k_1$ и $k_2$ који се споља додирују у тачки $A$ и права $p$ која дате кругове додирује редом у тачкама $B$ и $C$. Доказати да је $\angle BAC = 90^o$.

2. Дати су кругови $k_1$,$k_2$,$k_3$ такви да се свака два од њих додирују. Нека се кругови $k_1$ и $k_3$ додирују у тачки $B$, кругови $k_2$ и $k_3$ у тачки $A$, а кругови $k_1$ и $k_2$ у тачки $C$. Нека су пресечне тачке правих $AC$ и $BC$ са $k_3$ тачке $E$ и $F$. Доказати да су центар круга $k_3$ и тачке $E$ и $F$ колинеарне.

3. На дужи $AB$ узета је тачка $C$. Права која пролази кроз $C$ сече кругове над $AC$ и $BC$ као пречницима у тачкама $K$ и $L$, а круг над $AB$ као пречницима у тачкама $M$ и $N$. Доказати да је $KM = LN$.

4. Дата су четири круга $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ при чему се споља додирују кругови $S_i$ и $S_{i+1}$ за $i = 1, 2, 3, 4$ ($S_5 = S_1$). Доказати да су додирне тачке ових кругова темена тетивног четвороугла.

5. Три круга једнаких полупречинка $R$ садрже заједничку тачку $H$. Нека су $A$, $B$ и $C$ остале (различите) тачке пресека ових кругова. Доказати да је:

   (а) $H$ ортоцентар $\triangle ABC$;

   (б) полупречик описаног круга око $\triangle ABC$ једнак $R$.

6. Нека су $PC$ и $PD$ тангентне дужи из тачке $P$ на круг са пречником $AB$. Нека је $K$ пресек правих $AC$ и $BD$. Доказати да је $PK \perp AB$.

7. Нека су $O_a$, $O_b$ и $O_c$ центри описаних кругова око троуглова $PBC$, $PCA$ и $PAB$. Доказати да ако тачке $O_a$ и $O_b$ припадају редом правама $PA$ и $PB$ да тада и тачка $O_c$ припада правој $PC$.

8. Заједничке спољашње тангенте на два круга различитих полупречника додирују ове кругове у тачкама $A, B, C, D$. Доказати да је четвороугао $ABCD$ тангентан акко се ова два круга додирују.

9. Дат је паралелограм $ABCD$. Споља приписана кружница троугла $ABD$ додирује $AD$ и $AB$ редом у тачкама $M$ и $N$. Доказати да пресеци праве $MN$ са $BC$ и $CD$ припадају уписаној кружници троугла $BCD$.

10. Дата је кружница $S$ и тачке $A$ и $B$ на њој и $C$ на тетиви $AB$. За сваку кружницу $S'$ која додирује $AB$ у $C$ и сече $S$ у $P$ и $Q$ нека је $M$ пресечна тачка $AB$ и $PQ$. Доказати да положај тачке $M$ не зависи од избора кружнице $S'$.

11. Круг са центром $Q$ који садржи тачке $B$ и $C$ сече странице $AB$ и $AC$ троугла $ABC$ у тачкама $K$ и $L$. Круг описан око троугла $AKL$ сече описани круг троугла $ABC$ у тачкама $A$ и $N$. Доказати да је $QN \perp AN$.

12. (Савезно 2005, 1.раз) Нека је $ABC$ оштроугли троугао. Кружница $k$, над пречником $AB$, сече странице $AC$ и $BC$ редом у тачкама $M$ и $N$. Тангенте кружнице $k$ у тачкама $M$ и $N$ секу се у тачки $P$. Ако је $CP = MN$, одредити $\angle ACB$.

13. (Републичко 2004, 2.раз) Дат је троугао $ABC$. Права симетрична тежишној дужи из $A$ у односу на симетралу угла $\angle BAC$ сече описани круг троугла $ABC$ у тачки $K$. Нека је $L$ средиште дужи $AK$. Доказати да је $\angle BLC = 2\angle BAC$.

14. (Интерно 2002) Нека су $H_1, H_2$, подножја нормала из ортоцентра $H$ троугла $ABC$ на симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена $C$, а $C_1$ средишта странице. Доказати да су тачке $H_1, H_2, C_1$ колинеарне.

15. (Окружно 2002, 2.раз) У оштроуглом троуглу $ABC$, $B'$ и $C'$ су подножја висина из темена $B$ и $C$ редом. Кружница са пречником $AB$ сече праву $CC'$ у тачкама $M$ и $N$, а кружница са пречником $AC$ сече праву $BB'$ у $P$ и $Q$. Доказати да је четвороугао $MPNQ$ тетиван.

16. (ИМО 2002, предлог) Нека се кругови $S$ и $S'$ секу у тачкама $P$ и $Q$. Нека су $A$ и $B$ произвољне тачке круга $S$ различите од $P$ и $Q$ и нека $AP$ и $BP$ секу круг $S'$ у тачкама $A'$ и $B'$. Ако је $C$ пресек $AB$ и $A'B'$, доказати да за било који избор тачака $A$ и $B$ центар описаног круга око $\triangle AA'C$ припада неком кругу.

17. Нека је $I$ центар уписаног круга троугла $ABC$. Тачка $D$ је ван троугла $ABC$ таква да је $DA \parallel BC$ и $DB = AC$, али $ABCD$ није паралелограм. Симетрала угла $\angle BDC$ сече нормалу из $I$ на $BC$ у тачки $X$. Описани круг око троугла $CDX$ сече праву $BC$ у тачки $Y$. Доказати да је троугао $DXY$ једнакокраки.

18. Нека је $B$ додирана тачка тангенте из $A$ на круг $S$ и нека је $C$ произвољна тачка таква да дуж $AC$ сече $S$ у две различите тачке. Нека је $S'$ круг који додирује $AC$ у тачки $C$ и $S$ у тачки $D$ која је са супротне стране праве $AC$ од тачке $B$. Доказати да центар круга описаног око троугла $BCD$ припада описаном кругу троугла $ABC$.

19. Нека је $AD$ висина троугла $ABC$. Нека су тачке $X$ и $Y$ на описаним кружницама око троуглова $ADB$ и $ACD$ редом и нека су при томе $X, Y, D$ колинеарне. Ако су $M$ и $M'$ средишта $XY$ и $BC$ редом, доказати да је $MM' \perp AM'$.

20. Кругови $S$ и $S'$ се секу у тачкама $X$ и $Y$, а заједничка тангента која је ближа $X$ их додирује у $A$ и $B$. Тангнта на круг $S$ у тачки $X$ сече круг $S'$ у тачки $W$, а $AX$ сече $S'$ у тачки $Z$. Доказати да су $BX$ и $BW$ тангенте на описани круг троугла $XYZ$.

21. Нека је $I$ центар уписаног круга у троугао $ABC$. Нека су $D, E, F$ тачке у којима уписан круг додирује странице $AB, BC, CA$ редом. Ако $AD$ сече уписани круг још и у тачки $P$, а $M$ је средиште $EF$, доказати да тачке $P, M, D, I$ леже на једном кругу или на правој.

22. Нека је $BD$ симетрала у троуглу $ABC$ и нека су $E$ и $F$ подножја нормала из $A$ и $C$ на $BD$. Ако је $M$ подножје нормале из $D$ на $BC$, доказати да је $DM$ симетрала угла $EMF$.

23. Уписани круг са центром $I$ у троугао $ABC$ додирује странице $BC, CA, AB$ у тачкама $D, E, F$ редом. Праве $BI$ и $CI$ секу $EF$ у $P$ и $Q$ редом. Доказати да ако је $DPQ$ једнакокраки, да је онда и $ABC$.

24. Уписани круг троугла $ABC$ додирује странице $BC, CA, AB$ у тачкама $D, E, F$ редом. Ако $AD$ сече уписани круг у $Q$, доказати да $EQ$ полови $AF$ акко $AC = BC$.

25. Нека је $H$ ортоцентар троугла $ABC$ са висинама $AE$ и $BF$. Нека је $O$ пресек правих које су симетрицне правама $AE$ у односу на симетралу угла у $A$ и $BF$ у односу на симетралу угла у $B$. Означимо са $M$ и $N$ пресеке правих $AE$ и $AO$ са описаним круго око троугла $ABC$. Нека се $BC$ и $HN$, $BC$ и $OM$, $HR$ и $OP$ секу редом у $P, R, S$. Доказати да је $AHSO$ паралелограм.

26. Нека симетрала унутрашњег угла код $A$ троугла $ABC$ сече $BC$ у $X$. Нормала на $AX$ у тачки $X$ сече $AB$ у $Y$. Нормала на $AB$ у $Y$ сече $AX$ у $R$. Нека је $S$ пресек тежишне дужи из $A$ и $XY$. Доказати да је $RS$ нормално на $BC$.

27. (Савезно 1991, 2.раз) Дате су четири праве тако да се сваке две секу и да се никоје три не секу у једној тачки. те праве одређ уују четири троугла.
(а) Доказати да се описане кружнице тих троуглова ссеку у једној тачки $X$.
(б) Доказати да центри поменутих описаних кругова припадају једној кружници која такође садржи тачку $X$.

28. Нека је $ABC$ произвољан троугао. Круг који пролази кроз $B$ и $C$ сече странице $AB$ и $AC$ у тачкама $D$ и $E$, редом. Пројекције тачака $B$ и $E$ на праву $CD$ су тачке $B'$ и $E'$, редом, а тачака $D$ и $C$ на праву $BE$ тачке $D'$ и $C'$, редом. Доказати да су тачке $B', D', C'$ и $E'$ концикличне.

29. Нека су су $ABCD$ и $AEFG$ правоугаоници такви да су тачке $B, E, D, G$ колинеарне (и у том распореду). Нека се праве $BC$ и $GF$ секу у тачки $T$ и нека се тачке $DC$ и $EF$ секу у тачки $H$. Доказати да су тачке $A, H$ и $T$ колинеарне.

30. Нека је $E$ средиште странице $CD$ квадрата $ABCD$. Нека је $M$ тачка унутар квадарата таква да је $\angle MAB = \angle MBC = \angle BME = x$. Наћи угао $x$.

31. Нека је $ABCD$ ромб, чији је пресек дијагонала тачка $O$. Тачка $P$ је дата у унутрашњости ромба, али не на његовим дијагоналама. Нека су тачке $M, N, Q, R$ пројекције тачке $P$ на странице $AB, BC, CD, DA$, тим редом. Нека се симетрале страница $MN$ и $RQ$ секу се у тачки $S$, а симетрале страница $NQ$ и $MR$ у тачки $T$. Доказати да су тачке $P, S, T, O$ темена правоугаоника.

32. (Републичко 2001, 1.раз) Дат је оштроугли троугао $ABC$. Нека је $BK$, $K \in AC$, симетрала његовог унутрашњег угла у темену $B$, $CD$ висина, $N \in CD$ тачка таква даје $KN \perp BC$, и $M = BK \cap CD$. Ако је $P$ пресечна тача круга описаног око троуглова $BKN$ и праве $AB$, $P \neq B$, доказати да је $PK = PM$.

33. (БМО 2003, предлог) Нека у $o_1, o_2, o$ кругови такви да $o_1$ и $o_2$ пролазе кроз центар $O$ круга $o$. Круг $o$ сече круг $o_1$ у тачкама $A, E$, акруг $o_2$ у тачкама $C, D$. Кругови $o_1$ и $o_2$ секу се у тачкама $O$ и $M$. Ако $AD$ сече $CE$ у тачки $B$ и ако је $MN \perp BO$ ($N \in BO$) доказати да је $\frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MO^2} = \frac{1}{MN^2}$.

34. (БМО 2004) Нека је $O$ унутрашња тачка оштроуглог троугла $ABC$. Кругови са центрима у средиштима страница троугла $ABC$, који пролазе кроз тачку $O$, међусобно се секу у тачкама $K, L, M$, различитим од $O$. Доказати да је $O$ центар уписаног круга у троугао $KLM$, ако и само ако је $O$ центар описаног круга око троугла $ABC$.

35. (БМО 2005) Нека је $ABC$ оштроугли троугао чији центар уписаног круга додирује странице $AB$ и $AC$ у тачкама $D$ и $E$ редом. Нека су $X$ и $Y$ тачке пресека симетралама углова $\angle ACB$ и $\angle ABC$ са $DE$ и нека је $Z$ средиште странице $BC$. Доказати да је троугао $XYZ$ једнакостраничан ако и само ако је $\angle A = 60^o$.

36. (ИМО 2005, 4.зад) Дат је оштроугли троугао $ABC$ такав да је $AB \neq AC$. Кружница чији је пречник $BC$ сече странице $AB$ и $AC$ у тачкама $M$ и $N$ редом. Означимо са $O$ средиште странице $BC$. Симетрале углова $BAC$ и $MON$ секу се у тачки $R$. Доказати да се кружнице описане око троуглова $BMR$ и $CNR$ секу тачки који припада страници $BC$.

37. Нека су $AA_1, BB_1, CC_1$ висине оштроуглог троугла $ABC$, $O_A, O_B, O_C$ - центри кругова уписаних у троуглове $AB_1C_1, BC_1A_1$ и $CA_1B_1$ редом, $T_A, T_B, T_C$ - тачке додира круга уписаног у троугла $ABC$ са страницама $BC, CA, AB$ редом. Доказати да су све странице шестоугла $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ једнаке.

38. (ИМО 1994, 2.зад) Нека је $N$ произвољна тачка на симетрали угла $\angle BAC$. $P$ и $O$ су тачке на правама $AB$ и $AN$, редом, тако да је $\angle ANP = 90^o = \angle APO$. $Q$ је произвољна тачка на правој $NP$. Нека произвољна права кроз $Q$ сече праве $AB$ и $AC$ у тачкама $E$ и $F$ редом. Доказати да је $\angle OQE = 90^o$ ако и само ако је $QE = QF$.

39. (ИМО 1995, 1.зад) Нека су $A, B, C, D$ различите тачке једне праве, у том редоследу. Кругови са пречницима $AC$ и $BD$ секу се у тачкама $X$ и $Y$. Нека је $O$ произвољна тачка на правој $XY$, али да није на $AD$. Нека је пресечна тачка $CO$ са кругом пречника $AC$ тачка $M$, и нека $BO$ сече круг у тачки $N$. Доказати да су праве $AM, DN, XY$ конкурентне.

40. (ИМО 1997, предлог) Нека је $D$ тачка на страници $BC$ троугла $ABC$. Права $AD$ сече круг описан око $ABC$ опет у тачки $X$. Нека су $P$ и $Q$ подножја нормала из тачке $X$ на праве $AB$ и $AC$, редом и нека је $k$ круг са пречником $XD$. Доказати да је права $PQ$ тангентна на $k$ ако и само је $AB = AC$.

41. (ИМО 2000, предлог) У равни су дата два круга која се секу у тачкама $X$ и $Y$. Доказати да постоје тачке $A, B, C, D$ са следећим својством: за сваки круг који додирује два дата круга у тачкама $A$ и $B$ и који сече $XY$ у тачкама $C$ и $D$, свака од правих $AC, AD, BC, BD$ пролази кроз неку од ових тачака.

42. (ИМО 2002, 2.зад) Круг $S$ има центар $O$ и пречник $BC$. Нека је $A$ тачка на $S$ таква да је $\angle AOB < 120^o$. Нека је $D$ средиште лука $AB$ који не садржи $C$. Права кроз $O$ паралелна са $DA$ сече $AC$ у $I$. Симетрала странице $OA$ сече $S$ у тачкама $E$ и $F$. Доказати да је $I$ центар уписаног круга троугла $CEF$.

43. (ИМО 2004, предлог) Нека је $O$ центар описаног троугла $ABC$ код кога је $\angle B < \angle C$. Права $AO$ сече страницу $BC$ у тачки $D$. Центри кругова описаних око троуглова $ABD$ и $ACD$ су редом тачке $E$ и $F$. Нека су $G$ и $H$ редом продужеци дужи $BA$ и $CA$ преко $A$, такви да је $AG = AC$ и $AH = AB$. Доказати да је четвороугао $EFGH$ правоугаоник ако и само ако је $\angle ACB - \angle ABC = 60^o$.


*milan.novakovic@gmail.com*