Додатна за четврти разред
3.март 2005.г.

Разни задаци

Милан Новаковић

1. На луку BC круга описаног око троугла ABC који не садржи тачку A узета је произвољна тачка K. Нека су NK и MK симетрале углова у троугловима AKB и AKC. Доказати да права MN пролази кроз центар круга уписаног у троугао ABC.

2. Правоугаоник $a \times b$, $(a > b)$ разбијен је на правоугле троуглове, тако да се два троугла (која се граниче) граниче целим својим странама и да је заједничка страна нека два троугла хипотенуза једног и катета другог троугла. Доказати да је $a \geqslant 2b$.

3. Доказати да за произвољне позитивне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$ важи
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqslant (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2$$

4. а) Нека је P пресек дијагонала тангентног четвороугла $ABCD$. Доказати да центри уписаних кругова троуглова ABP, BCP, CDP и DAP припадају једном кругу.
б) Доказати обрнуто: ако поменути центри припадају једном кругу, онда је полазни четвороугао тангентан.

5. Доказати да за сваки природан број k постоји степен двојке који у децималном запису међу последњих k цифара има барем пола деветки.

6. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао коме се предужеци страна AB и CD секу у P, а AD и BC у Q. Доказати да су пресеци симетрала углова у A и C, B и D, P и Q колинеарни.

7. Таблица $n \times n$ попуњена бројевима се зове *супермагични квадрат* ако је за сваки избор од n бројева таквих да никоја два нису ни у истој врсти ни у истој колони њихов збир исти (као и за неки други избор). У неком супермагичном квадрату је у свакој врсти уочен најмањи број и од тих бројева је одабран највећи. Такође је у свакој колони уочен највећи број и од тих бројева је одабран најмањи. Доказати да су два тако одабрана броја једнака.

8. а) Доказати да за свако k постоји највише један полином f степена k такав да је
$$f(P(x))f(Q(x)) = f(R(x))$$
где су P, Q и R дати неконстантни различити полиноми.
б) Решити полиномску једначину $f(x)f(2x^2) = f(2x^3 + x)$.

9. Нека скуп $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ реалних бројева задовољава следеће услове:
   (а) $a_0 = a_n = 1$;
   (б) За свако $0 \leqslant k \leqslant n$ је $a_k = c + \sum_{i=k}^{n-1} a_{i-k}(a_i + a_{i+1})$.

   Доказати да је $c \leqslant \frac{1}{4n}$.

10. Доказати да низ $a_n = \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ садржи бесконачно много квадрата.

11. Нека је $f(m)$ највећа потенција двојке која дели $m!$. Доказати да $m - f(m) = 2005$ има бесконачно много решења.