

Математичка гимназија

Матурски рад из астрономије

Меркур и прецесија његове путање

Ученик:

Владимир Виктор
Мирјанић, IV_д

Ментор:

Слободан Спремо

Садржај

1	О Меркуру	3
1.1	Увод	3
1.1.1	Структура и површина	3
1.1.2	Спин-орбит резонанца	3
1.2	Меркур кроз историју	4
1.2.1	Меркур у Новом веку	4
1.2.2	Модерно изучавање Меркура	4
2	Облик Меркурове орбите	7
2.1	Апсидална прецесија	7
2.2	Кеплеров проблем	7
2.3	Проблем три тела	9
2.3.1	Орбитални елементи	9
2.3.2	Рачун	10
2.3.3	Табела	11
2.4	Изван Њутнове теорије	12
2.4.1	Потрага за Вулканом	12
2.5	Теорија релативности	12
2.5.1	Шварцшилдова метрика	12
2.6	Крај?	16
2.6.1	ВеріColombo	16
A	Разне физичке величине	19
A.1	Физичке величине везане за Меркур	19
A.2	Физичке константе	19
Б	Приближно решење једне диференцијалне једначине	21
	Литература	23

Увод

Гете је једном рекао:

„Радије бих био Меркур, најмања од седам планета које круже око Сунца, него први од пет месеца који се крећу око Сатурна.“

Меркур је врло загонетна планета. За њега се знало од давнина, али је он још увек вредан истраживања.

Циљ овог рада је да предочи:

- Необичност Меркурове путање која је дуго интригирала научнике
- Разне приступе које су научници кроз историју предлагали како би ту необичност објаснили

На почетку ћемо се укратко упознати са општим особинама Меркура које га издвајају од других планета. Затим ћемо пратити методе и моделе које су научници од Кеплера до Ајнштајна користили да опишу Меркурову путању. На самом крају ћемо се осврнути на планирана будућа истраживања Меркура и њихов значај.

Поглавље 1

О Меркуру

1.1 Увод

Меркур је најмања планета Сунчевог система, са пречником $R = 2439.7 \pm 0.1 \text{ km}$. Он је најближа планета Сунцу, и просечна удаљеност од Сунца му износи 0.39 AU . Година на Меркуру траје 88 Земалских дана, а дан скоро двапут више - чак 175.97. Меркур је име добио по истоименом Римском богу путника, трговаца и лопова.

Због близине Сунцу, његова елонгација је највише 28° (Венерина је доста већа, 47.8°). Због тога, Меркур се може добро видети само кад је близу хоризонта, и то рано ујутру или увече.

1.1.1 Структура и површина

Пречник Меркура је око 2440 км. Унутрашњост се дели на три дела: кору дебљине до 300 км, омотач дебљине око 600 км, и језгро.

Иако мали, Меркур је друга најгушћа планета (после Земље) са густином од 5.427 g/cm^3 . Разлог томе је што је језгро, које чини више од половине Меркурове запремине, богато гвожђем.

Једна од врло упечатљивих особина Меркурове површине је присуство бројних планинских гребена, од којих су неки дугачки стотинама километара. Сматра се да су настали хлађењем и скупљањем Меркурове унутрашњости, након што се кора већ формирала.

Температура на површини варира од 100 K до 700 K . Ипак, на половима Меркура постоји реда величине 10^{14} кг леда, јер подножја кратера на половима никад нису осветљена. Поређења ради, на Антарктику има око 10^{18} кг леда.

Меркур је превише мали и преблизу Сунца да би имао своју атмосферу.

1.1.2 Спин-орбит резонанца

Спин-орбит резонанца је интересантна појава која се јавља када је однос периода револуције и ротације небеског тела „леп“. На пример, Месец се налази у 1:1 резонанци, јер му треба једнако времена да се обрне око своје осе и да направи једну револуцију око Земље. Зато му је увек иста страна окренута ка Земљи.

За Меркур се дуго мислило да је такође у 1:1 резонанци, зато што је увек окренут истом страном ка Сунцу у тачки у којој га је најлакше посматрати. Разлог томе

је што је, коинцидентално, Меркуров период ротације скоро половина његовог *синодичког* периода (време потребно да направи циклус у односу на Земљу). Тек 1965. године је установљено да је Меркур заправо у 3:2 резонанци, тј. прави 3 ротације за сваке 2 револуције. Велики ексцентрицитет (в. А.1) Меркурове путање и плимске силе Сунца чине да је ова резонанца стабилна.

1.2 Меркур кроз историју

Најстарији запис о Меркуру се налази на Асирским глиненим плочама из 14. века пре нове ере. Меркур су као планету препознавали и Вавилоњани, Грци и Римљани. Арапски астроном Аз-Заркали је у 12. веку открио да је Меркурова орбита елипсаста, али за то није имао математички модел.

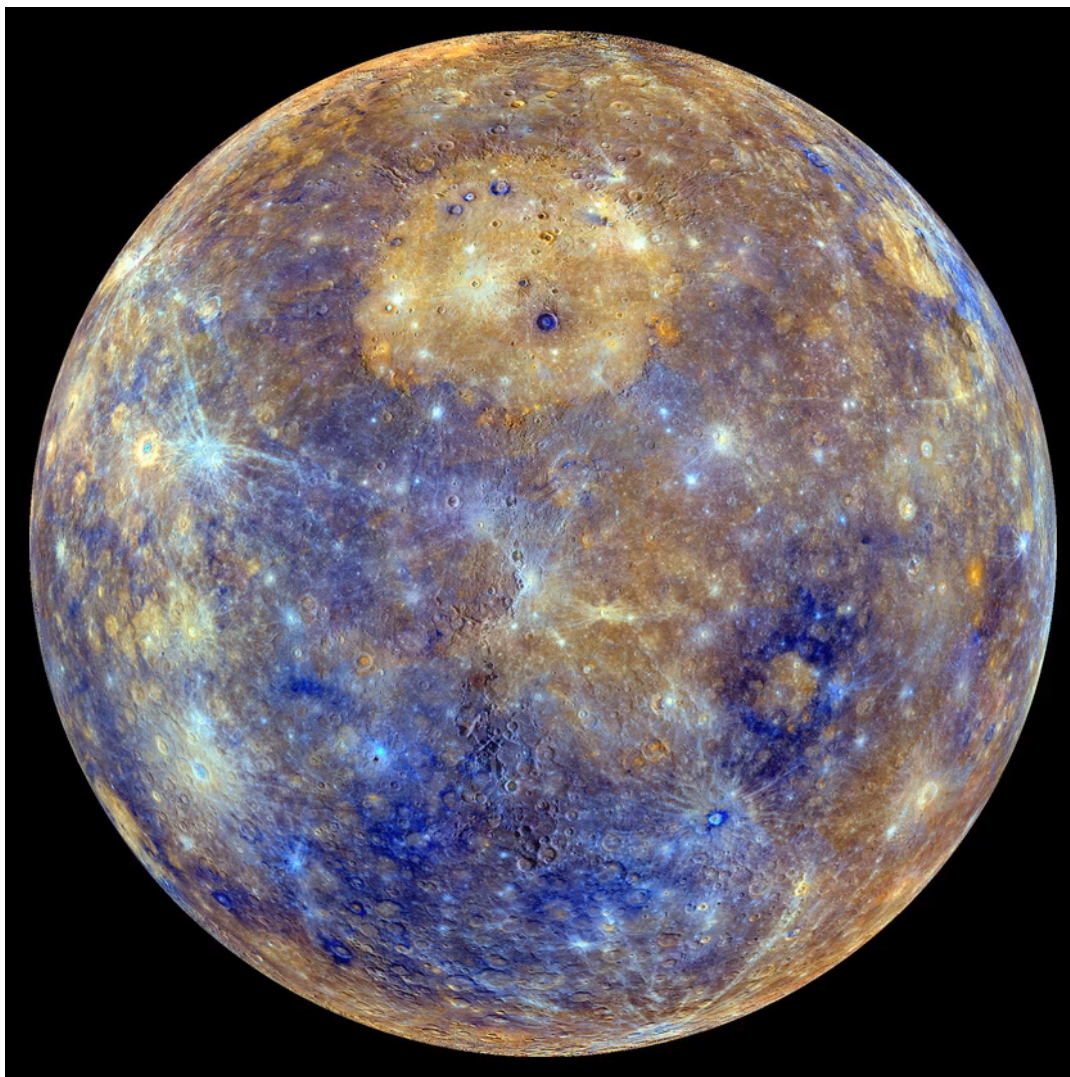
1.2.1 Меркур у Новом веку

1639. године Ђовани Цупи је први пут видео Меркурове мене и тиме показао да се Меркур креће око Сунца. 1737. године је Меркур заклонио Венеру посматрано са Земље. Овај догађај ће се поновити 2133. године. Због близине Сунцу, Меркур је врло слабо изучаван. Прве обимније карте Меркура излазе тек у 20. веку.

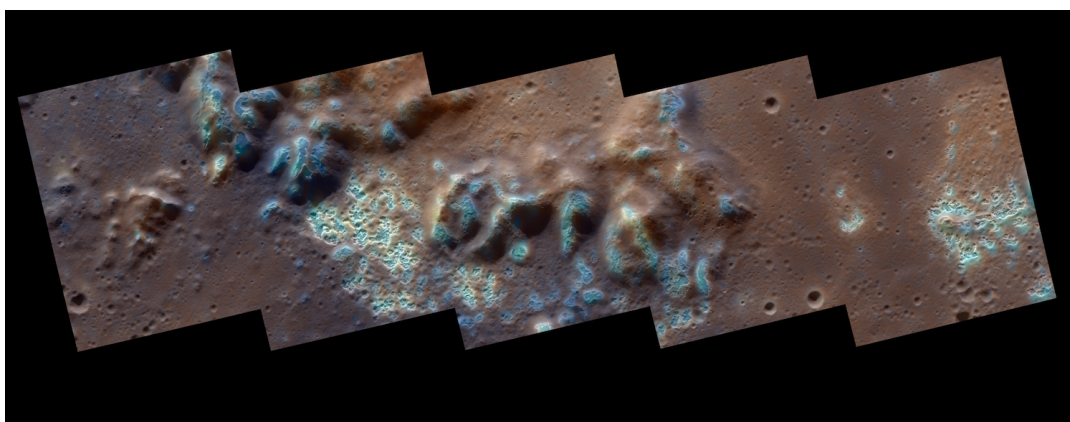
1.2.2 Модерно изучавање Меркура

Руски научници су 1962. године први пут „одбили“ радио таласе од Меркура. Настављајући истраживања, открили су да је Меркуру потребно 59 дана да се окрене око своје осе.

Прва сонда послата на Меркур је *Mariner 10*, а за њом су уследиле и *MESSENGER* и *BepiColombo*. Из безбедносних разлога, Хабл телескоп не може да снима Меркур.



Слика 1.1: Меркур



Слика 1.2: Једна од слика са MESSENGER-а. Вештачки је обојена да би се указало на неравнине на површини.

Поглавље 2

Облик Меркурове орбите

2.1 Апсидална прецесија

Аз-Заркали, осим што је установио да је Меркурова орбита елипсаста, открио је нешто много занимљивије - *апсидалну прецесију*. Апсиде су најдаља и најближа тачка на путањи небеског тела у његовом кретању око центра гравитационог привлачења. У општем случају се зову апоцентар и перицентар, а у Сунчевом систему, *афел* и *перихел*.

Апсидална прецесија (надаље само прецесија) је постепена ротација линије која спаја апсиде (видети 2.1).

2.2 Кеплеров проблем

У класичној механици се овај проблем односи на моделовање система два тела, ако између њих делује сила сразмерна $\frac{1}{r^2}$. Нека два тела имају масе m_1 и m_2 . Дефинишемо редуковану масу μ као $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$. Нека су \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 вектори положаја тела, и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, а γ гравитациона константа. Тада је сила која делује на прво тело управо $\mathbf{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}$. С друге стране, из другог Њутновог закона добијамо:

$$\frac{\mathbf{F}_{1,2}}{m_1} = \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2}$$

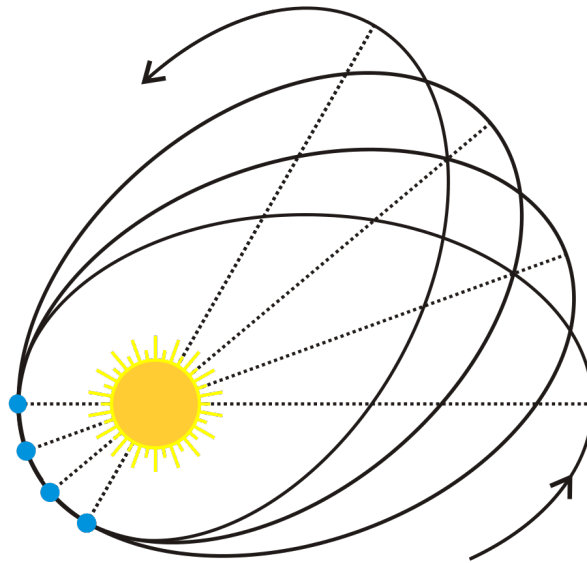
Сада је:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}_{1,2}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{2,1}}{m_2} = \mathbf{F}_{1,2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{\mathbf{F}_{1,2}}{\mu}$$

Међутим, ова једначина одговара телу масе μ и положаја \mathbf{r} на које делује *централна сила*, сила усмерена ка координатном почетку. Дакле, проблем је сведен на анализу понашања једног тела.

Нека је, даље, E укупна енергија, а $L = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$ момент импулса, где је θ угао који \mathbf{r} заклапа са x осом.

$$E = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$



Слика 2.1: Прецесија

Одатле добијамо

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ову једначину је врло непријатно интегралити, зато ћемо уместо тога наћи $r(\theta)$.
Интеграљењем

$$\frac{d\theta}{dr} = Lr^{-2} (2\mu)^{-\frac{1}{2}} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \gamma \frac{m_1 m_2}{r} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

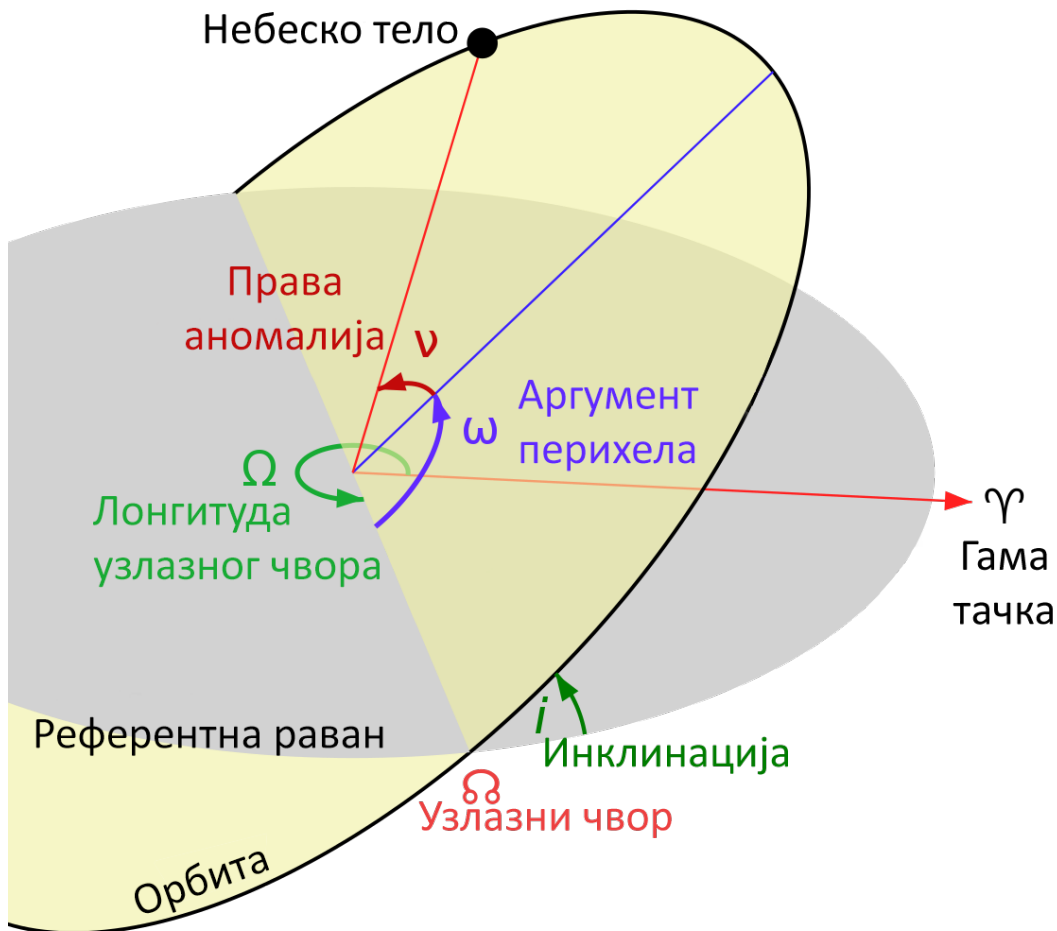
добијамо следећу зависност:

$$r = \frac{r_0}{1 - e \cos \theta}; \quad r_0 = \frac{L^2}{\mu \gamma m_1 m_2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu(\gamma m_1 m_2)^2}}$$

Видимо да је e ненегативно, па имамо 4 случаја:

- | | |
|--------------------------------|----------------------|
| Случај 1. $e = 0$: | Путање су кружнице. |
| Случај 2. $0 < e < 1$: | Путање су елипсе. |
| Случај 3. $e = 1$: | Путање су параболе. |
| Случај 4. $e > 1$: | Путање су хиперболе. |

До тога о ком се случају ради долазимо преко следеће зависности $E \sim (e^2 - 1)$.
За нас је од значаја случај 2 јер се он односи на све планете Сунчевог система.



Слика 2.2: Орбитални елементи

2.3 Проблем три тела

Претходни модел предвиђа елиптичну орбиту без прецесије. Међутим, у пракси не смемо занемарити међусобне утицаје планета. Зато треба размотрити проблем три тела. За општи проблем три тела не постоји решење у затвореном облику, а степени ред који конвергира решењу је потребно израчунати чак до 10^{800000} -тог члана да би се добили прецизни резултати. Ми ћемо се зато ограничити на случај у коме два мала тела круже око једног великог.

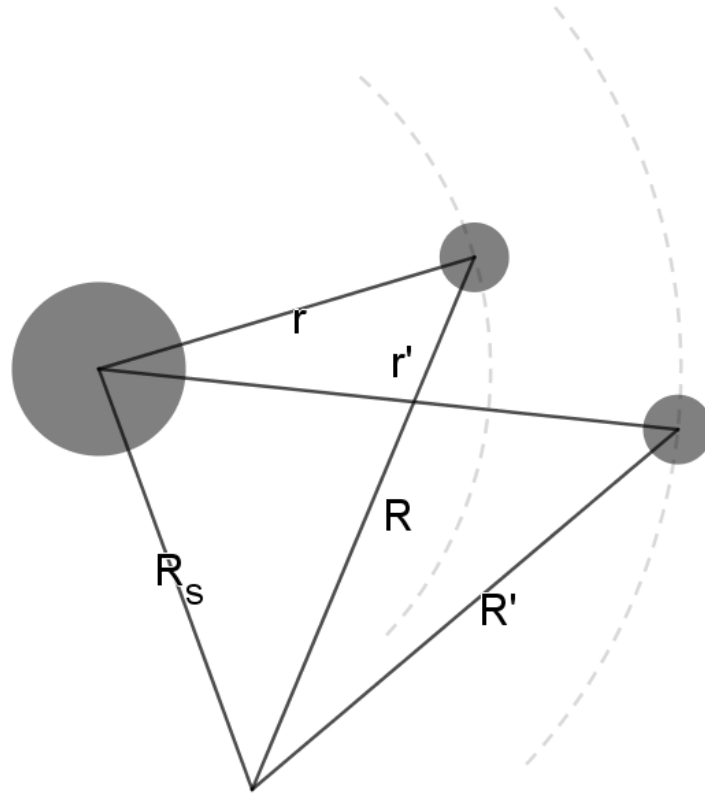
2.3.1 Орбитални елементи

За описивање кретања небеског тела нам је потребно 6 величина.

Ексцентрицитет e и **велика полуоса a** описују облик и величину елипсе.

Инклинација i и **лонгитуда узлазног чвора Ω** описују положај орбиталне равни. Коначно, имамо и **аргумент перихела ω** и **праву аномалију ν** , угао између тела и перихела у одређеном временском тренутку.

Ексцентрицитет једини није приказан на слици 2.2. Осим ових величина, постоји још и **средња аномалија M** , угао који би небеско тело имало да се креће по кружној путањи. Ова величина нема физички смисао, али може олакшати рачун.



Слика 2.3: Проблем три тела

2.3.2 Рачун

Нека су физичке величине дефинисане као на слици 2.3, и нека је $m, m' \ll M$. По Њутну, важе следеће формуле:

$$\begin{aligned} M \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{R}_s &= \gamma M m \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \gamma M m' \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \\ m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{R} &= \gamma m m' \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} + \gamma m M \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ m' \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{R}' &= \gamma m' m \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \gamma m' M \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \end{aligned}$$

Дељењем одговарајућом масом и одузимањем прве једначине од друге две добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= \gamma m' \left(\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right) \\ \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}' + \mu' \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} &= \gamma m \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

где је $\mu = \gamma(M + m)$, $\mu' = \gamma(M + m')$. Приметимо да израз у заградама има јако леп „интеграл“. То нас мотивише да дефинишемо следеће функције:

$$\mathcal{R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \gamma m' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{r} \mathbf{r}'}{r'^3} \right)$$

$$\mathcal{R}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \gamma m \left(\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^3} \right)$$

Овакве функције нису од већег значаја за овај рад. Ипак, ради краћег записа, писаћемо

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathcal{R}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \mathcal{R}'$$

Нека су $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ брзина тела, $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ убрзање тела, $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ угаони момент по јединици масе и

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

вектор ексцентрицитета. Познато је да \mathbf{e} увек показује ка перихелу и да важи $|\mathbf{e}| = e$. Приметимо да је

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{h}}{\mu} + \frac{\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{h}}{dt}}{\mu} - \frac{\mathbf{v}}{r} + \frac{(\mathbf{r}\mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3}$$

Приметимо даље да је

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathcal{R} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathcal{R}$$

То нам омогућује да упростимо израз за $\frac{d\mathbf{e}}{dt}$ у

$$\mu \frac{d\mathbf{e}}{dt} = 2 \left(\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathcal{R} \right) \mathbf{r} - (\mathbf{r}\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathcal{R} - \left(\mathbf{r} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathcal{R} \right) \mathbf{v}$$

Користећи ту формулу, и настављајући као што је описано у (Fitzpatrick, 2006), долазимо до формуле за тренутну угаону брзину прецесије

$$\dot{\omega} = \frac{m'}{M+m} \frac{r^2 r'}{e} \frac{d\nu}{dt} \left\{ \cos \nu \frac{r/r'}{C^3} + \left[\sin \nu \frac{2+e \cos \nu}{1+e \cos \nu} B - \cos \nu A \right] (C^{-3} - r'^{-3}) \right\}$$

где је

$$A = \cos(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad B = \frac{\partial A}{\partial \theta} \quad C = (r^2 + r'^2 - 2rr'B)^{\frac{1}{2}}$$

Да бисмо нашли просечну угаону брзину, морамо да интегралимо по орбити обе планете, односно

$$\langle \dot{\omega} \rangle = \oint \oint \dot{\omega} \frac{dM dM'}{4\pi^2}$$

где су M и M' средње аномалије два тела.

2.3.3 Табела

Конечно, налазимо да су доприноси сваке планете прецесији следећи:

Планета	$\langle \dot{\omega} \rangle$ ("век ⁻¹)
Венера	277.42
Земља	90.89
Марс	2.48
Јупитер	153.99
Сатурн	7.32
Уран	0.14
Нептун	0.04
Укупно	532.28

2.4 Изван Њутнове теорије

Ирбен Леверије је 1843. године конструисао модел Меркурове орбите на основу теорије гравитације. Међутим, веома брзо се приметило да је тај модел погрешан. Након 16 година, Леверије је објавио детаљнији модел, заснован на анализи претходних забележених транзита Меркура. Ипак, одступање је још увек било присутно. Како је у међувремену Леверије открио Нептун анализирајући неправилности Уранове орбите, закључио је да постоји планета између Сунца и Меркура.

2.4.1 Потрага за Вулканом

Леверије је ту хипотетичку интермеркуријалну планету назвао *Вулкан*, и кренуо 1859. године у потрагу за њом. Од тада је скоро сваке године било више запажања те планете. Помама је отишла толико далеко да је човеку који је „открио“ Вулкан додељен орден Легије части. Астрономи су трагали за овом планетом све до објављивања теорије релативности. Ипак, сва ова опажања се међусобно нису поклапала, и данас сматрамо да се или радило о Сунчевим пегама или о звездама.

2.5 Теорија релативности

Крајем 19. века, Њуком примећује да се Меркурова прецесија може објаснити ако сила гравитације није сразмерна са $\frac{1}{r^2}$ већ са $\frac{1}{r^{2.00000016}}$. Овакав приступ симболизује потпуно другачији поглед на проблем. Уместо да се траже нова експериментална побољшања, фокус је пребачен на теоријски део.

Када је, 1915. године, Ајнштајн објавио општу теорију релативности, отворила се једна нова област у физици. Један од првих доказа који су проистекли из ње се управо тиче Меркурове прецесије.

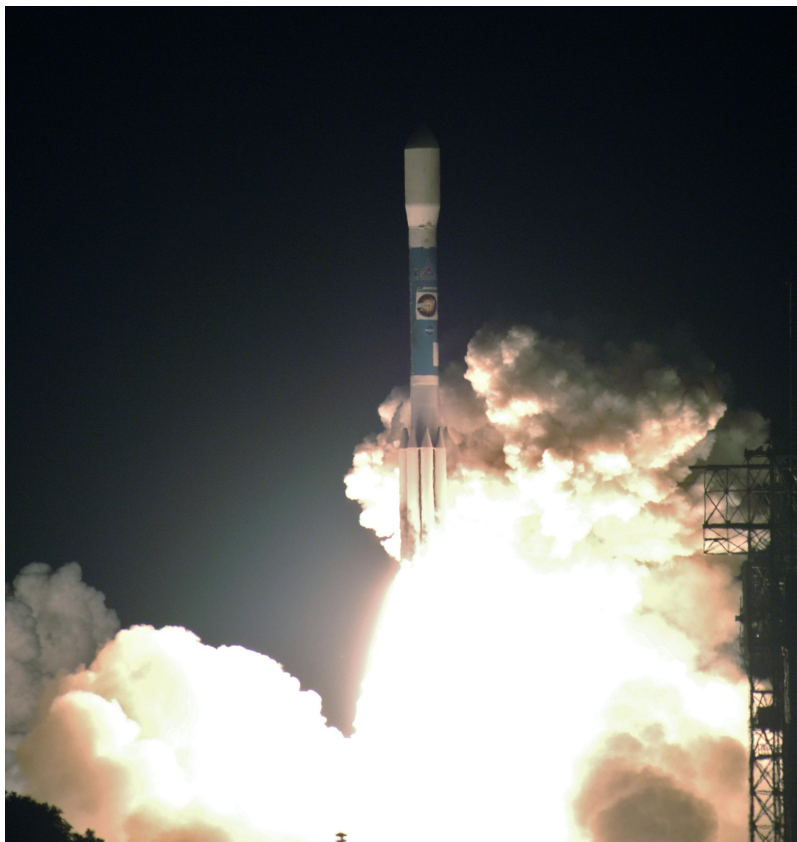
2.5.1 Шварцшилдова метрика

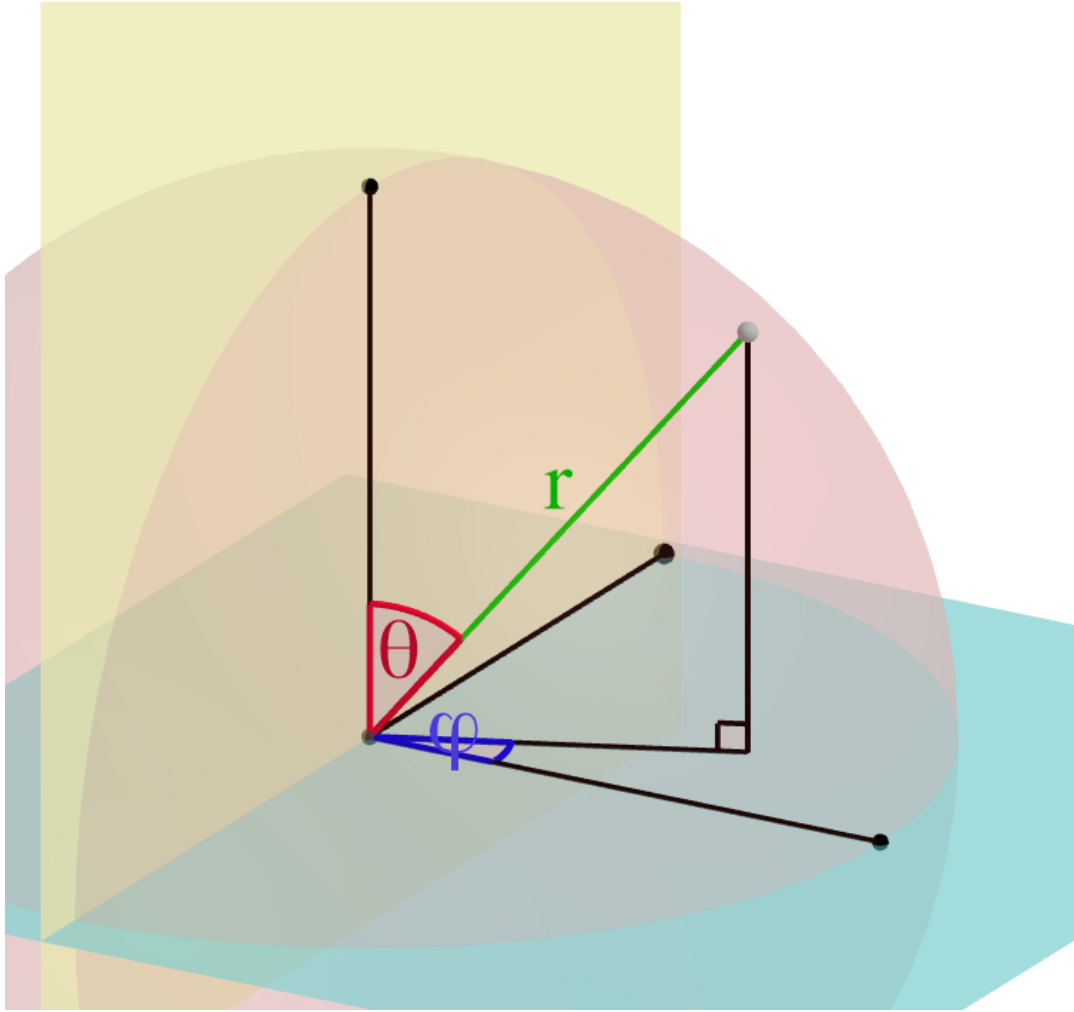
Шварцшилдово решење Ајнштајнове једначине описује гравитацију око једног масивног тела, и самим тим добро описује Сунчев систем. Формула је следећа:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (2.1)$$



Слика 2.4: Вулкан на мапи Сунчевог система

Слика 2.5: Лансирање Насиног сателита *STEREO* који није детектовао ниједно тело пречника већег од 6 км унутар Меркурове орбите

Слика 2.6: Три поларне координате: r, θ, φ

при чему су (r, θ, φ) поларне координате, m маса Сунца, и $c = 1, \gamma = 1$. Како се Меркур креће по геодезијској линији, важи $g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 1$, па је Лагранжијан $L = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{m}{2}$. С друге стране је $v = \frac{ds}{d\tau}$, па из 2.1 имамо:

$$L = \frac{m}{2} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right] = \frac{m}{2} \quad (2.2)$$

где \dot{x} означава извод по сопственом времену τ . Нека је $x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$. Сетимо се Лагранжове једначине:

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0 \quad (2.3)$$

Убацивањем $a \in \{0, 2, 3\}$ у 2.3 добијамо редом:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} (r^2\dot{\theta}) - \frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta\dot{\phi}^2 &= 0 \\ \frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2 \theta\dot{\phi}) &= 0\end{aligned}$$

Ако изаберемо референтни систем тако да је у почетном тренутку $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta} = 0$; друга једначина гарантује да ће та два услова важити увек, односно, Меркур ће се кретати у равни.

Из треће једначине онда добијамо $r^2\dot{\phi} = h = const$, при чему је h момент импулса, а из прве $(1 - \frac{2m}{r})\dot{t} = k = const$. Коначно убацујући то у 2.2 имамо

$$\frac{k^2 - \dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2\dot{\phi}^2 = 1 \quad (2.4)$$

Нека је $u = 1/r$.

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right) \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right) = -\frac{1}{u^2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right) hu^2 = -h \frac{du}{d\varphi}$$

2.4 се онда своди на

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 \quad (2.5)$$

Кад не бисмо имали члан $3mu^2$, 2.5 би се svelo на Њутнов закон гравитације. Због тог додатног фактора, не можемо наћи експлицитно решење. Међутим, приближно решење је

$$u \approx \frac{m}{h^2} [1 + e \cos(\varphi(1 - \varepsilon))]$$

за $\varepsilon = \frac{3m^2}{h^2}$. За детаље видети додатак Б. Ова формула је и даље периодична по φ али са периодом $\frac{2\pi}{1-\varepsilon}$. То нам даје прецесију по орбити

$$\sigma \approx 2\pi\varepsilon = \frac{6\pi m^2}{h^2} = \frac{6\pi\gamma^2 m^2}{c^2 h^2} \quad (2.6)$$

Да бисмо упростили формулу 2.6, користимо Кеплерове законе:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu} \Rightarrow \pi ab = \frac{L}{2\mu} T \approx \frac{hT}{2}$$

Како је $b^2 = a^2(1 - e^2)$, имамо:

$$T^2 = \frac{4\pi^2(1 - e^2)a^4}{h^2}$$

али и

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma(m + m')} \approx \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma m}$$

при чему је m' маса Меркура, занемарљива у односу на масу Сунца. Коначно је

$$\begin{aligned}\gamma^2 m^2 &= \frac{16\pi^4 a^6}{T^4} = \frac{4\pi^3 a^2 h^2}{T^2(1-e^2)} \\ \sigma &= \frac{24\pi^3 a^2}{cT^2(1-e^2)}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Заменом бројчаних вредности у 2.7 добијамо да, услед закривљења простора, Меркур прави додатну прецесију од $42.98''\text{век}^{-1}$.

2.6 Крај?

У одељку 2.3.3 смо видели како се долази до тога да је прецесија под утицајем планета $532.3''\text{век}^{-1}$. Додатна прецесија због релативности нас доводи до $575.28''\text{век}^{-1}$.

Међутим, измерена прецесија је $574.10 \pm 0.65''\text{век}^{-1}$.

Постоје додатни узроци прецесије које нисмо до сад спомињали, зато што су скоро занемарљиви. На пример, због одступања Сунца од облика правилне сфере настаје тзв. *квадруполни момент* који повећава прецесију за

$$\dot{\omega}_Q = \frac{3}{2} \frac{nQ}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \quad (2.8)$$

при чему је Q интензитет Сунчевог квадруполног момента, R пречник Сунца, n просечна угаона брзина Меркура, и i инклинација Меркура. Због мале вредности Q (ред величине му је 10^{-7}), квадруполни момент повећава прецесију за само $0.02''\text{век}^{-1}$. Због тога што Сунце ротира око своје осе, Ајнштајнова теорија предвиђа и такозвани Ленс-Тиринг ефекат, и прецесија се мења за

$$\dot{\omega}_{LT} = -\frac{4\gamma L \cos i}{c^2 a^3 (1-e^2)^{3/2}} \quad (2.9)$$

где L означава момент импулса Сунца. Ипак, та промена износи свега $-0.002''\text{век}^{-1}$.

Коначно, ваља приметити да се бројеви и даље не поклапају, и једино што нам преостаје је да чекамо да *BepiColombo* донесе неке нове податке о Меркуру.

2.6.1 BepiColombo

BepiColombo је заједнички пројекат од стране *ESA* и Јапанске агенције *JAXA*. Пројекат се састоји од два сателита *Mercury Planetary Orbiter* и *Mercury Magnetospheric Orbiter*. Циљеви ове мисије су проучавање настанка и формирања Меркура, особина његовог магнетног поља, магнетосфере, геолошке структуре, кратера, као и прецизна мерења константи повезаних са теоријом релативности (конкретно, параметара бета и гама у Пост-Њутновском формализму).

Лансирање је извршено 20. октобра 2018, а очекује се да ће сонде стићи до Меркура у децембру 2025.

Закључак

У овом раду смо се бавили обликом Меркурове путање и увидели њен значај за разумевање савремене астрономије и физике. Закључили смо да иако је ова област отворена вековима, она је још увек изразито актуелна. Заиста, Меркурова прецесија, заједно са гравитационим ленсингом и црвеним помаком, чини такозване класичне тестове теорије релативности. Штавише, данас се Меркурова прецесија користи за проверу бројних алтернативних теорија гравитације у физици.

На самом крају, желео бих да се захвалим свом професору и ментору, Слободану Спремену, на мотивацији да се бавим овом темом, великој пруженој помоћи у избору материјала, као и спремности да ми упути конструктивне критике.

Додатак А

Разне физичке величине

А.1 Физичке величине везане за Меркур

Сви подаци изнети у овој табели се односе на *epoch* $J2000$, то јест, 1.1.2000, 11:58:55.816 UTC.

Величина	Вредност
Велика полуоса (a)	0,387098 AU
Ексцентрицитет (e)	0,205630
Период револуције (T)	87,96 дана
Средња аномалија (M)	174,796°
Инклинација према еклиптици (i)	7,005°
Лонгитуда узлазног чвора (Ω)	48,331°
Аргумент перихела (ω)	29,124°
Средњи полупречник (r)	2439,7 km
Маса (m)	$0,33 \cdot 10^{24}$ kg
Запремина (V)	$6,08 \cdot 10^{10}$ km ³

А.2 Физичке константе

Величина	Вредност
Брзина светлости (c)	$2,99 \cdot 10^8$ m/s
Гравитациона константа (γ)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ m ³ kg ⁻¹ s ⁻²
Астрономска јединица (AU)	$1,49 \cdot 10^8$ km
Маса Сунца (M)	$1,98 \cdot 10^{30}$ kg
Полупречник Сунца (R)	$6,96 \cdot 10^5$ km

Додатак Б

Приближно решење једне диференцијалне једначине

У овом додатку ћемо се позабавити једначином 2.5:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2$$

Нека је $\varepsilon = \frac{3m^2}{h^2}$ и нека ' означава извод по φ . Тада једначина постаје

$$u'' + u = \frac{m}{h^2} + \varepsilon \left(\frac{h^2 u^2}{m} \right)$$

Нека је $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Заменом добијамо

$$u_0'' + u_0 - \frac{m}{h^2} + \varepsilon \left(u_1'' + u_1 - \frac{h^2 u_0^2}{m} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0$$

Покушајмо, дакле, да решимо следећи систем

$$u_0'' + u_0 - \frac{m}{h^2} = 0$$

$$u_1'' + u_1 - \frac{h^2 u_0^2}{m} = 0$$

Прва једначина има познато решење:

$$u_0 = \frac{m}{h^2} (1 + e \cos \varphi)$$

Сада је

$$u_1'' + u_1 = \frac{h^2 u_0^2}{m} = \frac{m}{h^2} (1 + e \cos \varphi)^2 = \frac{m}{h^2} \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) + \frac{2me}{h^2} \cos \varphi + \frac{me^2}{2h^2} \cos 2\varphi$$

Решење друге једначине је

$$u_1 = A + B\varphi \sin \varphi + C \cos 2\varphi$$

Заиста:

$$u_1'' + u_1 = A + 2B \cos \varphi - 3C \cos 2\varphi$$

па добијамо:

$$\begin{aligned} A &= \frac{m}{h^2} \left(1 + \frac{1}{2}e^2 \right) \\ B &= \frac{me}{h^2} \\ C &= -\frac{me^2}{6h^2} \end{aligned}$$

Међутим, сабирци уз A и C су ограничени, а $B\varphi \cos \varphi$ ће да расте неограничено. Зато можемо направити апроксимацију:

$$u_1 \approx \frac{me}{h^2} \varphi \cos \varphi$$

$$u \approx u_0 + \varepsilon u_1$$

$$u \approx \frac{m}{h^2} (1 + e \cos \varphi + e\varepsilon \varphi \sin \varphi)$$

Коначно, из $\cos \varepsilon \varphi \approx 1$ и $\sin \varepsilon \varphi \approx \varepsilon \varphi$ имамо

$$u \approx \frac{m}{h^2} [1 + e \cos(\varphi - \varepsilon \varphi)]$$

Литература

- BepiColombo*. url: <https://en.wikipedia.org/wiki/BepiColombo>.
- Clemence, G. M (окт. 1947). «The Relativity Effect in Planetary Motions». В: *Reviews of Modern Physics* 19.4, с. 361—364. url: <https://sci-hub.tw/10.1103/RevModPhys.19.361>.
- Fitzpatrick, R. (2006). *Introduction to Celestial Mchanics*. url: <https://farside.ph.utexas.edu/teaching/celestial/Celestial/Celestialhtml.html>.
- Park, R. S. et al (февр. 2017). «Precession of Mercury’s Perihelion from Ranging to the MESSENGER Spacecraft». В: *The Astronomical Journal* 153.3. url: <http://hdl.handle.net/1721.1/109312>.
- Pollock, C. (2003). «Mercury’s Precession». В: url: http://www.math.toronto.edu/~colliand/426_03/Papers03/C_Pollock.pdf.
- The Kepler Problem: Planetary Mechanics and the Bohr Atom*. url: <http://web.mit.edu/8.01t/www/materials/modules/guide17.pdf>.
- Toomer, G. J. (1969). «The Solar Theory of Az-Zarqual, A History of Errors». В: *Centaurus* 14.1, с. 306—336. url: <https://sci-hub.tw/10.1111/j.1600-0498.1969.tb00146.x>.