Математичка гимназија
Београд

УВОД У АЛГЕБАРСКУ ТОПОЛОГИЈУ

МАТУРСКИ РАД
ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Ментор: Ученик:

др Соња Чукић Никола Татомировић,IVe

Београд, јун 2017.

С А Д Р Ж А Ј

ПРЕДГОВОР

Човек је од свог настанка имао потребу да проучава простор у ком је живео. Идеја геометријских облика и тела се врло брзо развијала помагајући човеку да боље схвати одлике и особине тог простора. Из те идеје је зачета геометрија као математичка дисциплина и човеково оруђе које ће му помоћи да обликује свет око себе. У свом настојању да разуме и помера границе свог сазнања човек је у једном тренутку закључио да геометрија не може сама пружити све одговоре о простору.

Док је геометрија проучавала особине као што су дужина, површина и запремина истовремено је занемаривала апстрактнија својства тела као што су повезаност, ограниченост односно неограниченост, коначност и бесконачност. Управо топологија као једна од најмлађих грана математике успева да нам опише оно што геометрија није могла.

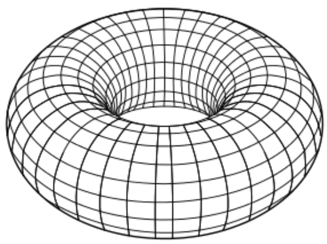
Топологија се развила као област из геометрије и теорије скупова, на којој се модерна топологија у великој мери заступа, анализом концепта простора, димензија и трансформација. Корен јој потиче из идеја Готфрида Лајбница (Gottfried Wilhelm Leibniz) у XVII веку, а један од првих тополошких проблема је проблем Кенигзбершких мостова. Проблем је решио Ојлер (Leonhard Euler) увидевши да је у овом проблему својство повезаности геометријских тела , а не њихове димензије, заправо кључ решења.

Назив топологија увео је Јохан Листинг (Johann Benedict Listing) у XIX веку, мада је идеја тополошког простора развијена тек почетком XX века. Данас топологија значајно доприноси развоју и напретку у многим пољима науке па се и сама развила на више тополошких области. Једна од тих области је управо алгебарска топологија која уз помоћ апстрактне алгебре проучава и класификује тополошке просторе.

1. Увод

Топологија је појам са којим се просечна особа врло ретко сусреће ако се у животу није озбиљно бавила математиком, па чак и међу математичарима постоје људи који се никад нису сусрели са њим. Ја сам имао срећу да се са овим појмом упознам на предавању руског математичара Антона Зорича које је одржано у „Математичкој гимназији“. Изабрао сам ову тему баш из тог разлога, јер је топологија веома корисна у развоју технологије, а не добија довољно признања за свој допринос. Верујем да ће се уз помоћ топологије одговорити на нека неодговорена питања и да ће имати велику улогу у преласку технологије у следећу еру. Овај рад ће једва загребати површину алгебарске топологије, и највећим делом је заправо превод уводне главе књиге „Алгебарска топологија“ од Алена Хечера („Algebraic topology“, Allen Hatcher), који је на веома разумљив и једноставан начин објаснио неке основне појмове алгебарске топологије у својој књизи, са неким додатим примерима. Пре него што читалац настави, навешћемо дефиниције неких појмова са којим читалац треба да буде упознат како би могао са разумевањем да прочита овај рад:

Шта је торус? Торус је површ која се добија ротирањем кружнице око осе која је компланарна са кружницом. Може се замислити као крофна са рупом у средини.



Дефиниција 1.1: Нека је X непразан скуп. Топологија на скупу X је фамилија T његових подскупова таква да важе: $\emptyset, X \in T$; $T_1, T_2 \in T \Rightarrow T_1 \cap T_2 \in T$; $\{T_\alpha | \alpha \in A\}$ је фамилија подскупова од $T \Rightarrow \bigcup\{T_\alpha | \alpha \in A\} \in T$. Пар (X,T) назива се тополошки простор и у топологији га углавном означавамо само са X подразумевајући шта је топологија T.

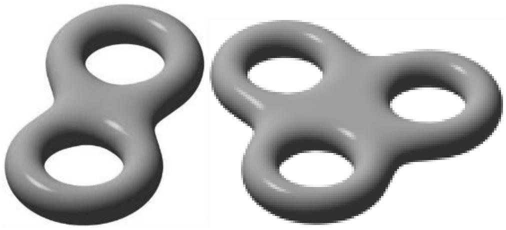
Дефиниција 1.2: Пресликавање $f: X \rightarrow Y$ тополошких простора X и Y је тополошка еквиваленција или хомеоморфизам ако важи да је f бијекција и да су f и f^{-1} непрекидне. Ако између два простора постоји хомеоморфизам, кажемо да су они тополошки еквивалентни или хомеморфни. Грубо речено, хомеморфизам је непрекидно и повратно деформисање неког облика у други.

Дефиниција 1.3: Нека је пресликавање f: $X \to Y$ тополошких простора X и Y. Пресликавање f се назива квоцијентно ако је испуњен услов $(\forall A \subset Y)$ A је отворен у $Y \Leftrightarrow f^{-1}[A]$ је отворен у X.

Дефиниција 1.4: Нека је f: $X \to Y$ квоцијентно пресликавање тополошког простора X у Y. Тада топологију $T_y = \{A \subset Y | f^{-1}[A] \in T_x\}$ називамо квоцијентном топологијом одређену пресликавањем f.

Дефиниција 1.5: Нека је (X,T) тополошки простор и D декомпозиција скупа X , а $p: X \to D$ природна пројекција. Пару $((X, T), D)$ придељујемо пар (D, T_D) Узимајући на D Квоцијентну топологију одређену пресликавањем p, односно $(\forall A \subset D) A \in T_D \Leftrightarrow p^{-1}[A] = \bigcup\{D | D \in A\} \in T_x$. Простор (D, T_D) називамо квоцијентни простор простора X, одређен декомпозицијом D.

Шта је род? Род повезане и оријентабилне површи је цео број који представља максимални број сечења по затвореним и непресецајућим линијама на површи, таквих да је резултујуће тело такође повезано. На род се може посматрати и као број рупа у неком телу. За пример, торус има род 1, сфера има род 0... За чворове и неоријентабилне површи род се другачије дефинише. На слици доле су приказани двоструки торус рода 2 и троструки торус рода 3.



Дефиниција 1.6: Тополошки просто X је повезан ако не постоји пар A_1, A_2 непразних, дисјунктних и отворених подскупова таквих да је $X = A_1 \cup A_2$.

Дефиниција 1.7: Нека је X тополошки простор, а $I = [0,1]$. Непрекидно пресликавање $u: I \to X$ назива се пут у X са почетком у тачки $u(0) = x_0$ и крајем у тачки $u(1) = x_1$. Скренимо пажњу на то да је пут функција, а да је скуп вредности ове функције путања.

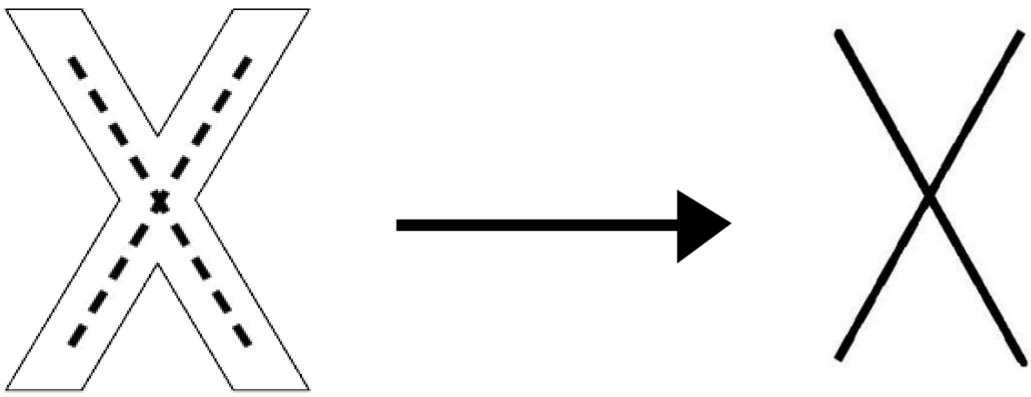
Дефиниција 1.8: За две тачке $x, y \in X$ кажемо да су еквивалентне у ознаци $x \sim y$ ако постоји пут $u: I \to X$ такав да важи $u(0) = x, u(1) = y$. Лако је доказати да је ова релација заправо релација еквиваленције. Класе еквиваленције по овој релацији називамо путне компоненте. Скуп свих путних компонената простора X означавамо са $\pi_0(X)$. Простор X је путно повезан ако има само једну путну компонентну односно када је скуп $\pi_0(X)$ једночлан.

2. Хомотопија и хомотопски тип

2.1. Деформацијска ретракција

Једна од главних идеја алгебарске топологије је да се два простора сматрају еквивалентна ако имају „исти облик“ у смислу који је много опширнији од хомеоморфизма.

Пример 2.1: Узмимо слова абецеде посматрајући их као коначан скуп правих и кривих линија или као површине одређене једном или више затворених линија, тј. као „танка“ и „дебела“ слова.



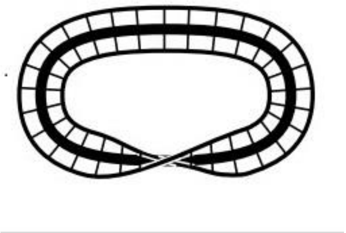
Слика 1

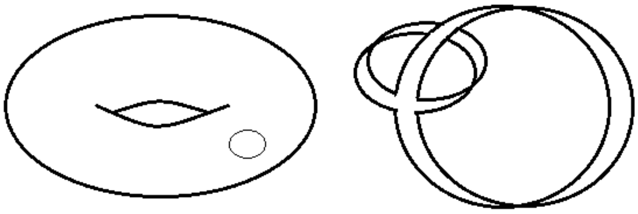
Може се рећи да дебела слова садрже у себи танка слова и да их заправо можемо скупити у њих. То скупљање ћемо представити тако што ћемо раставити дебело слово (Сл. 1), назовимо га $\boldsymbol{X}$**,** на дужи које спајају сваку тачку на границама $\boldsymbol{X}$ са јединственом тачком на танком слову X. Сада $\boldsymbol{X}$ можемо скупити у X тако што свака тачка из $\boldsymbol{X}$ склизне низ дуж на којој се налази до тачке у X, притом тачке које су већ у X се не померају. Можемо посматрати да се ово сужавање одвија на неком временском интервалу $0 \leq t \leq 1$, сада можемо дефинисати фамилију функција $\{f_t\}$ са параметром $t \in I := [0,1]$, при чему је $f_t(x)$ положај тачке x у тренутку t. Из овог примера можемо извести следећу дефиницију:

Дефиниција 2.1: Деформацијска ретракција простора X на потпростор Y је непрекидна фамилија пресликавања $f_t\colon X \to X$, $t \in I = [0,1]$ тако да важи $f_0 = \mathbb{1}_X$, $f_1(X) = Y$, $f_t|Y = \mathbb{1}_Y$ за свако t. Тада је Y деформацијски ретракт простора X.

Напомена: Под тиме да је фамилија f_t непрекидна сматрамо да је придружено пресликавање $X \times I \to X$, $(x,t) \to f_t(x)$ непрекидно.

Постоје разни примери деформацијске ретракције сличне примеру са словима, као што је ретракција Мебијусове (Möbius) траке (Сл. 2) у кружницу или деформацијска ретракција пробушеног торуса (торуса без једне тачке) у два круга спојена у тачки (Сл. 3).



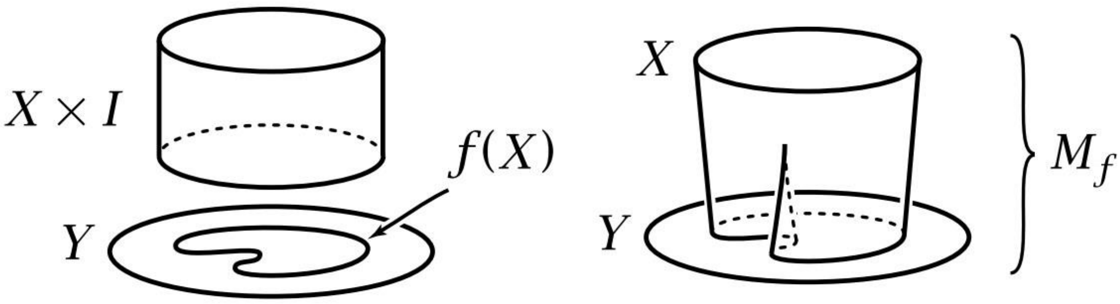


Слика 2 *Слика 3*

2.2 Цилиндар пресликавања

У претходним примерима конструкција која доводи до деформацијске ретракције може се дефинисати на следећи начин:

Дефиниција 2.2: За пресликавање f: $X \to Y$, цилиндар пресликавања M_f се дефинише као квоцијентни простор дисјунктне уније $(X \times I)$ ∪ Y добијен идентификацијама $(x,1) \sim f(x)$, $x \in X$ (Сл. 4)



Слика 4

У првом примеру, простор X је спољна ивица дебелог слова, Y је танко слово, а f пресликава тачке на спољашњем крају дужи у тачку на унутрашњем крају.
Закључујемо да је цилиндар пресликавања M_f могуће деформацијски ретраковати у потпростор Y тако што сваку тачку (x,t) довучемо дуж сегмента $\{x\} \times I \subset M_f$ до тачке $f(x) \in Y$. Непрекидност овакве деформацијске ретракције је очигледна у претходним примерима, а за општи случај може се доказати.

Напомена: Ако је M_f цилиндар пресликавања f: $X \to Y$, онда је Y увек деформацијски ретракт од M_f, али не могу се све деформацијске ретракције добити из цилиндра пресликавања.

2.3 Ретракција и релативна хомотопија

Деформацијска ретракција f_t: $X \to X$ је специјалан случај хомотопије, односно фамилије пресликавања f: $X \to Y$, $t \in I$ такве да је придружено пресликавање F:$X \times I \to Y$, дефинисано са $F(x,t) = f_t(x)$, непрекидно. Каже се да су два пресликавања f_0, f_1: $X \to Y$ хомотопна, у ознаци $f_0 \simeq f_1$, ако постоји хомотопија f_t која их повезује.
Дакле, деформацијска ретракција простора X до потпростора Y је хомотопија од идентитете $\mathbb{1}_X$ до пресликавања r:$X \to X$ таквог да је $r(X) = Y$ и $r|Y = \mathbb{1}_Y$. Такво пресликавање r назива се ретракција. Другим речима, ретракција је пресликавање $r : X \to X$ такво да је $r^2 = r$.

Напомена: Ретракција не мора истовремено бити и деформацијска ретракција. На пример, простор X увек може да се ретракује у било коју тачку $x_0 \in X$ тако што константним пресликавањем шаљемо цео простор X у x_0, али простор који се деформацијски ретракује у тачку мора да буде повезан јер деформацијска ретракција X у x_0 даје пут који спаја свако $x \in X$ са x_0. Постоје и повезани простори који се не могу деформацијски ретраковати у тачку, у првом примеру то би била слова која имају „рупе“ (**A,B,D,O...**).

Као што смо видели у првом примеру, деформацијска ретракција f_t простора X у потпростор Y мирује у тачкама које се налазе у Y, формалније $f_t|Y = \mathbb{1}_Y$ за свако $t \in I$, другим речима не зависи од t. Опште важи:

Дефиниција 2.3: Релативна хомотопија или хомотопија *rel* Y је хомотопија f_t: $X \to A$ која на подскупу $Y \subseteq X$ не зависи од параметра t тј. $f_t(y) = f_0(y)$, $t \in I$ и $y \in Y$.

Дакле, деформацијска ретракција простора X у потпростор Y је хомотопија *rel* Y од идентитете простора X до ретракције X у Y.

2.4 Хомотопска еквиваленција

Нека је f_t: $X \to X$ деформацијска ретракција простора X у потпростор Y. Означимо са r:$X \to A$ завршну ретракцију, а са i:$A \to X$. Тада важи $r \circ i = \mathbb{1}_Y$ и $i \circ r \simeq \mathbb{1}_X$. Ово је заправо специјалан случај следећег:

Дефиниција 2.4: За f: $X \to Y$ кажемо да је хомотопска еквиваленција ако постоји пресликавање g: $X \to Y$ такво да је $fg \simeq \mathbb{1}_Y$ и $g f \simeq \mathbb{1}_X$. Тада X и Y имају исти хомотопски тип тј. хомотопски еквивалентни су у ознаци $X \simeq Y$.

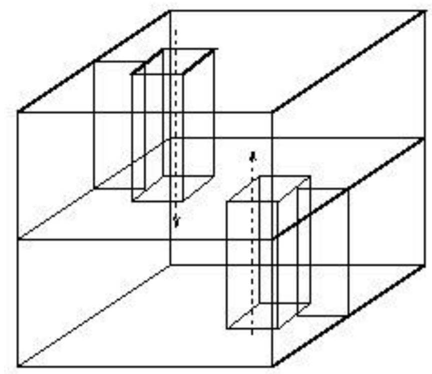
Уопштено важи да су простори X и Y хомотопски еквивалентни ако и само ако постоји простор Z који садржи X и Y као своје деформацијске ретракте.

Пример: Простори ○ ♀ ♂ су хомотопски еквивалентни јер су сви деформацијски ретракти прстена.

2.5 Контрактибилност

Дефиниција 2.5: Простор X је контрактибилан ако је истог хомотопског типа као тачка, $X \simeq \bullet$, што је еквивалентно томе да је идентитета $\mathbb{1}_X$ нулхомотопна, тј. да је хомотопна константном пресликавању.

Пример 2.2: Узећемо један врло неочигледан пример, дводимензионални потпростор $X \subseteq P^3$, познатији као Бингова (R.H. Bing) „Кућа са две собе“(Сл. 5). Овај простор се добија на следећи начин: Узмимо затворену кутију подељену на два унутрашња дела преградом. Потом се направе два тунела, један који има отворе у доњој просториј и на горњој страни кутије и други који има отворе у горњој просторији и доњом страном кутије. На крају се дода по један зид који спаја зидове тунела са зидовима просторије.



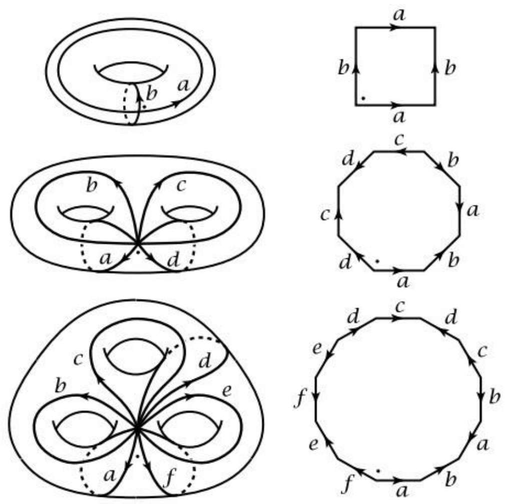
Слика 5

Да бисмо доказали да је овај простор X контрактибилан узмимо затворену ε-околину $N(X)$ од X. За довољно мало ε ова околина се може деформацијски ретраковати у X. Заправо, $N(X)$ је цилиндар пресликавања за пресликавање граничне површине $N(X)$ у X. Са друге стране $N(X)$ је хомеоморфна тродимензионалном диску (затвореној кугли) $D^3 \subseteq P^3$ који је контрактибилан. Добили смо $X \simeq N(X) = D^3 \simeq \bullet$ (тачка), стога је и X контрактибилан простор јер је хомотопска еквиваленција релација еквиваленције.

3. Ћелијски комплекси

3.1 Конструкција торуса и ћелијски комплекс

Уобичајена конструкција торуса $S^1 \times S^1$ подразумева идентификацију (спајање) наспрамних страница квадрата. Слично се од осмоугла, идентификацијом страница означеним на слици(Сл. 6), може добити двоструки торус тј. торус са две рупе. Опште важи да од 4g-угла можемо добити површину M_g рода g. Унутрашњост многоугла можемо посматрати као отворен диск или 2-ћелију која је налепљена на уније 2g кружница, које су добијене лепљењем 2g отворених интервала на заједничку тачку.



Слика 6

Поопштење овога је конструкција са следећим корацима:
(1) Почнимо са дискретним скупом X^0 чије тачке називамо 0-ћелијама
(2) Индуктивно, n-скелет X^n се формира лепљењем n-ћелија e_α^n на n-1-скелет пресликавањем $\varphi_\alpha : \partial D_\alpha^n = S^{n-1} \to X^{n-1}$. Ово значи да је X^n квоцијентни простор дисјунктне уније $X^{n-1} \cup_\alpha D_\alpha^n$ тј. X^{n-1} и фамилије n-дискова D_α^n (затворених кугли) уз идентификације $x \sim \varphi_\alpha(x), x \in \partial D_\alpha^n$. Дакле $X^n = X^{n-1} \cup_\alpha e_\alpha^n$, при чему су e_α^n међусобно дисјунктни и отворени n-дискови.
(3) Ако са конструкцијом станемо за неко коначно n , добијамо X=X^n за неко $n < \infty$, или можемо да наставимо у бесконачност у том случају добијајући $X = \bigcup_n X^n$, у том случају за топологију узимамо слабу топологију: скуп $A \subset X$ је отворен (или затворен) ако и само ако је $A \cap X^n$ отворен (затворен) у X^n за свако n.

Овако конструисан простор X назива се ћелијски комплекс или CW[1] комплекс. Ако је X=X^n за неко n, каже се да је X коначно-димензионалан, и најмање такво n је заправо димензија од X тј. максимална димензија ћелија у X.

[1] Closure-finite (коначно-затворен), Weak topology (слаба топологија)

Примери:
3.1 1-димензионалан ћелијски комплекс $X = X^1$ називамо графом у алгебарској топологији. Граф се састоји од темена (0-ћелија) на које качимо странице (1-ћелије), притом оба краја неке странице могу да се закаче за исто теме.
3.2 Кућа са две собе, један од претходних примера, је 2-димензионалан ћелијски комплекс. Темена представљају 0-ћелије, ивице соба 1-ћелије, и зидови представљају 2-ћелије. Овај комплекс има 29 0-ћелија, 51 1-ћелију и 23 2-ћелије.
3.3 Сфера S^n је ћелијски комплекс са две ћелије, e^0 и e^n која је налепљена на e^0 константним пресликавањем $S^{n-1} \to \mathrm{e}^0$. Ово је исто као да посматрамо S^n као количник $D^n/\partial D^n$.

3.2 Поткомплекс

Свака ћелија e^n_α има своје карактеристично пресликавање $\phi_\alpha : D^n_\alpha \to X$ које проширује пресликавање лепљења φ_α, и које представља хомеоморфизам унутрашњости D^n_α на e^n_α. Ово пресликавање ϕ_α можемо посматрати као композицију $D^n_\alpha \hookrightarrow X^{n-1} \cup_\alpha D^n_\alpha \to X^n \hookrightarrow X$ где је средње пресликавање квоцијентно пресликавање које дефинише X^n. На пример, у примеру 3, карактеристично пресликавање за n-ћелију је квоцијентно пресликавање $D^n \to S^n$ које ∂D^n сабија у тачку.

Дефиниција 3.1: Поткомплекс ћелијског комплекса X је затворен потпростор $Y \subset X$ који је унија ћелија из X.

Како је Y затворен простор, карактеристично пресликавање ϕ_α сваке ћелије e^n_α се слика у Y , па се и прдируженo пресликавање φ_α сваке ћелије такође слика у Y, стога је и Y ћелијски комплекс сам по себи. Сваки скелет X^n је поткомплекс ћелијског комплекса X. Пар (X,Y), где је Y поткомплекс комплекса X, назива се CW пар.

Напомена: Постоје и релативни CW комплекси који имају исту ознаку (X,Y), али у том случају Y не мора бити поткомплекс од X.

Пример 3.4: Узмимо природне инклузије сфера $S^0 \subset S^1 \subset \cdots \subset S^n$. Ако за S^k узмемо ћелијску структуру као у примеру 3 ћелијских комплекса, онда ниједна S^k није поткомплекс S^n. Да би S^k била поткомплекс од S^n, за сваку сферу морамо узети другачију ћелијску структуру. Нека је свака S^k индуктивно добијена лепљењм две k-ћелије на екватор S^{k-1}. У овом случају $S^k \subset S^n$ је поткомплекс од S^n за свако $k \leq n$ и S^n у свакој димензији m, $m \leq n$, има тачно две m-ћелије. У овом случају и бесконачно-димензионална сфера $S^\infty = \bigcup_n S^n$ је дефинисана као ћелијски комплекс.

4. Операције над просторима

4.1 Производ

Дефиниција 4.1: Ако су X и Y ћелијски комплекси, онда производ $X \times Y$ има природну ћелијску структуру са ћелијама $e_\alpha^n \times e_\beta^m$, при чему су e_α^n ћелије од X, а e_β^m ћелије од Y.

Пример 4.1: Ћелијска структура торуса $S^1 \times S^1$ је добијена на овај начин почевши са стандардном ћелијском структуром S^1.

Напомена: За опште ћелијске комплексе X и Y, производ $X \times Y$ може да има слабију топологију него што је топологија производа осим ако је барем један од ћелијских комплекса X и Y коначан или ако су оба пребројива. У примерима које ћемо ми посматрати неће долазити до оваквих проблема.

4.2 Квоцијент

Дефиниција 4.2: Ако је (X,Y) CW пар онда квоцијент X/Y наслеђује природну ћелијску структуру од X. Ћелије од X/Y су ћелије X-Y заједно са једном новом 0-ћелијом која је слика од Y у X/Y. За ћелију e_α^n из X-Y са пресликавањем $\varphi_\alpha = S^{n-1} \to X^{n-1}$, пресликавање лепљења одговарајуће ћелије из X/Y изражено је композицијом $S^{n-1} \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^{n-1} \to X^{n-1}/Y^{n-1}$.

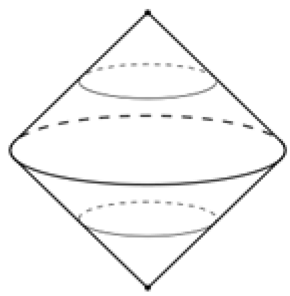
Пример 4.2: Ако за S^{n-1} узмемо било коју ћелијску структуру и изградимо D^n тако што налепимо n-ћелију на S^{n-1}, онда је квоцијент D^n/S^{n-1} заправо S^n са својом уобичајеном ћелијском структуром.

4.3 Суспензија

Дефиниција 4.3: Суспензија SX простора X је квоцијент добијен од производа $X \times I$ таквог да се $X \times \{0\}$ слика у једну тачку, а $X \times \{1\}$ у неку другу тачку.

Пример 4.3: Узмимо $X = S^n$, тада је $SX = S^{n+1}$ са две „тачке суспензије" на северном и јужном полу S^{n+1} које имају координате $(0, \ldots, 0, \pm 1)$.

Суспензија може да се посматра као двоструки конус односно уније две копије конуса $CX = (X \times I)/(X \times \{0\})$(Сл. 7).



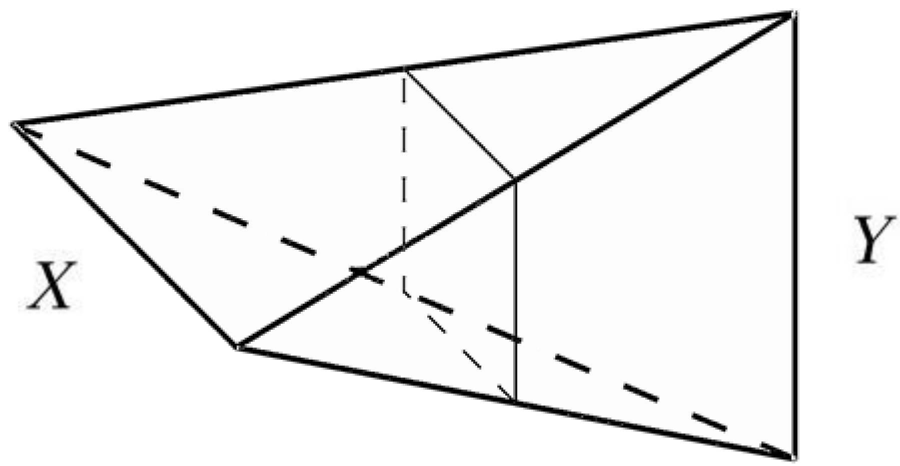
Слика 7

Суспензије имају важну улогу у алгебарској топологији због својих особина, једна од којих је да не само ћелијске структуре и простори могу бити суспендовани, већ и пресликавања. Пресликавање $f: X \to Y$ се суспендује у пресликавање $Sf: SX \to SY$ које је квоцијентно пресликавање од $f \times \mathbb{1}: X \times I \to Y \times I$.

4.4 Спајање

Конус CX је унија свих сегмената који спајају тачке из X са неком тачком ван X, врхом конуса. Суспензија SX је унија свих сегмената који спајају тачке X са две такве тачке. Уопштено, ако имамо просторе X и Y, на следећи начин дефинишемо простор који садржи све сегменте који спајају све тачке из X са свим тачкамо из Y.(Сл. 8)

Дефиниција 4.4: Спој $X * Y$ је простор дефинисан као квоцијент производа $X \times Y \times I$ уз идентификације $(x, y_1, 0) \sim (x, y_{2,0})$ и $(x_1, y, 0) \sim (x_2, y, 0)$.



Слика 8

На овај начин се потпростор $X \times Y \times \{0\}$ сабија у X, а потпростор $X \times Y \times \{1\}$ у Y. У општем случају простор $X * Y$ садржи X и Y као своје потпросторе, а све остале тачке (x, y, t) налазе се на јединственом сегменту који спаја тачку $x \in X \subset X * Y$ са тачком $y \in Y \subset X * Y$, при чему се координате x и y фиксирају док се координата t мења. Практичан начин за записивање тачака из $X * Y$ је $t_1 x + t_2 y$, при чему важи $0 \le t_i \le 1$, $t_1 + t_2 = 1$, $0x + 1y = y$ и $1x + 0y = x$.

Аналогно се дефинише и вишеструки спој $X_1 * X_2 * \dots * X_n$ као скуп формалних линеарних комбинација $t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n$, при чему важи $0 \le t_i \le$ и $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, уз договор да се сабирци облика $0x_i$ могу изоставити. Посебан случај са значајном улогом у алгебарској топологији је када је сваки X_i тачка. Тако редом спој две тачке даје дуж, спој три тачке троугао, четири тачке дају тетраедар итд. Спој n тачака је конвексни полиедар димензије *n-1* који се назива симплекс.

Напомена: Ако су X и Y ћелијски комплекси, онда постоји природна ћелијска структура за $X * Y$ који садржи потпросторе X и Y као своје поткомплексе, док су остале ћелије уствари ћелије производа $X \times Y \times (0,1)$. Ово је пример где ћелијска топологија на $X * Y$ може бити слабија него топологија производа.

4.5 Клинска сума

Дефиниција 4.5: Ако су дати простори X и Y са изабраним тачкама $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$, онда је клинска сума $X \vee Y$ квоцијент дисјунктне уније $X \cup Y$ добијен идентификацијом x_0 и y_0 у једну тачку.

Пример: Једноставан пример клинске суме је $S^1 \vee S^1$, где је резултат хомеоморфан фигури броја 8, односно два круга који се додирују у једној тачки.

Аналогно се дефинише и клинска сума $\bigvee_\alpha X_\alpha$ произвољних простора X_α узимајући дисјунктну унију $\bigcup_\alpha X_\alpha$ и идентификујући тачке $x_\alpha \in X_\alpha$ у једну тачку. Клинска сума $\bigvee_\alpha X_\alpha$ често се назива и букет. Ако су $(X_\alpha, x_{\alpha 0})$ ћелијски комплекси тј. $(X_\alpha, \{x_{\alpha 0}\})$ су CW парови за свако α онда је и $\bigvee_\alpha X_\alpha$ ћелијски комплекс.

Пример: За било који ћелијски комплекс X, квоцијент X^n/X^{n-1} је букет $\bigvee_\alpha S_\alpha^n$ са једном сфером за сваку n –ћелију у X.

5. Критеријуми хомотопске еквиваленције

Раније смо као критеријум да су два простора X и Y хомотопски еквивалентна ако постоји неки трећи простор Z који садржи оба простора X и Y као своје деформацијске ретракте. Међутим, на овај начин није баш увек лако „увидети“ да су два простора хомотопски еквивалентна. Зато ћемо навести још два начина за „стварање“ хомотопно еквивалентних простора. Један подразумева сабијање одређених потпростора неког простора у тачку, а други узима у обзир различите начине на који „делови“ простора могу да се саставе.

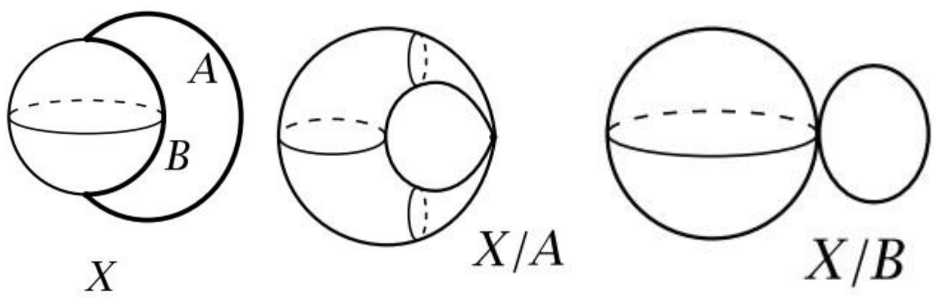
5.1 Сабијање потпростора

У неким случајевима сабијање неког потпростора у тачку драстично мења хомотопски тип целог простора, међутим то не мора бити случај ако тај потпростор већ има исти хомотопски тип као и тачка.

Теорема 5.1: Ако је *(X,Y)* CW пар, такав да је поткомплекс Y контрактибилан онда је квоцијентно пресликавање $X \to X/Y$ хомотопска еквиваленција.Ову теорему нећемо доказивати, а сада погледајмо неке примене ове теореме

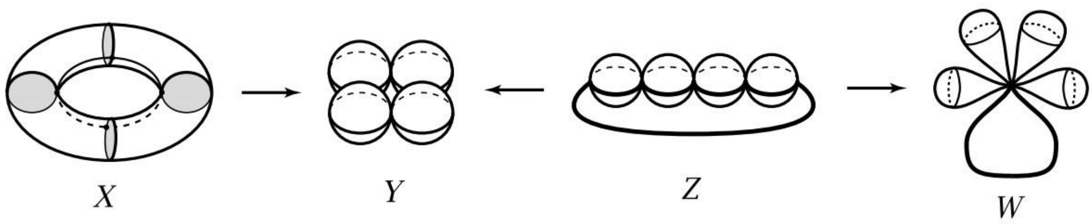
Пример 5.1, графови: Узмимо да је X било који граф са коначно много темена и страница. Ако су два темена неке странице различита, ту страницу можемо сабити у тачку, добијајући граф са једном мање страницом који је хомотопски еквивалентан почетном. Ово можемо понављати док све странице X не постану петље, онда је свака компонента X или изолована тачка или букет $\vee_n S^1$. Ово подстиче питање да ли два букета $\vee_n S^1$ и $\vee_m S^1$ могу бити хомотопски еквивалентни а да притом нису изоморфни тј. $m \neq n$. Одговор на ово питање је не, али алат који нам треба за доказивање тога неће бити покривен у овом раду.

Пример 5.2: Нека је простор X сфера S^2 којој су јужни и северни пол спојени неким луком А и нека је В⊆X лук који спаја крајње тачке лука А(Сл. 9). Тада се простору X може дати ћелијска структура комплекса таква да су две крајње тачке А и В 0-ћелије, њихове унутрашњости 1-ћелије, а остатак сфере S^2 2-ћелије. Пошто су и А и В контрактибилни потпростори важи $X/A \simeq X$ и $X/B \simeq X$, па су и $X/$А и X/B истог хомотопског типа. Дакле, добили смо да је квоцијент S^2/S^0 односно сфера са две идентификоване тачке истог хомотопског типа као и букет сфере и круга $S^2 \vee S^1$.



Слика 9

Пример 5.3: Нека је X унија торуса и n меридијанских дискова. Како бисмо добили ћелијску структуру од X изаберимо лонгитудинални круг који сече сваки меридијански дис у једној тачки. Тада су ове тачке пресека 0-ћелије, остаци лонгитудиналног круга и ивице меридианских дискова су 1-ћелије, а 2-ћелије су остаци унутрашњости торуса и унутрашњости дискова. Сабијањем сваког меридијанског диска у тачку добија се хомотопски еквивалентан простор Y који се састоји од n S^2 од којих се свака додирује са две суседне сфере у по једној тачки. Добијен простор изгледа као огрлица са n перли. Сада узмимо простор Z који се састоји од n S^2 сфера које формирају низ спојених сферу и 1-ћелијом која спаја прву и последњу сферу. Простор Y може да се добије од простора Z сабијањем 1-ћелије у тачку, па су ови простори истог хомотопског типа. Коначно, узмимо лук који образују половине екватора сфери са једне стране у простору Z и сабијмо га у тачку. Тако добијамо нови простор W који је заправо клинска сума $S^1 \vee (\vee_n S^2)$. Пример за n=4 дат је на слици 10.



Слика 10

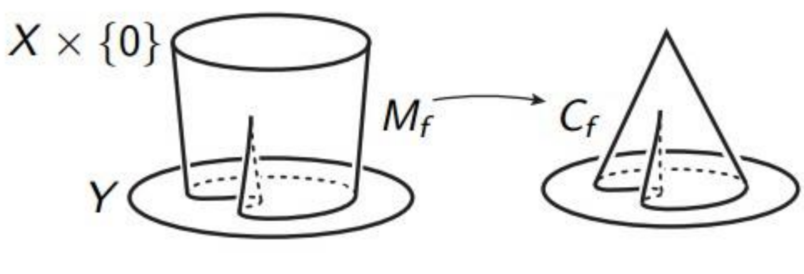
5.2 Лепљење простора

За почетак, даћемо некакву врсту дефиниције „лепљења једног простора на други простор“ које укључује лепљење ћелија. Имамо простор X_0 и на њега желимо да налепимо други простор X_1 тако да тачке неког подскупа $Y \subset X_1$ идентификујемо са тачкама из X_0. За пресликавање $f: Y \to X_0$, формирамо квоцијент дисјунктне уније $X_0 \cup X_1$ са идентификацијама $f(y) \sim y, y \in Y$. Добијени простор означавамо са $X_0 \cup_f X_1$ и кажемо да је добијен лепљењем простора X_1 дуж Y на простор X_0 помоћу пресликавања f. У случају када је $(X_1, Y) = (D^n, S^{n-1})$ ради се о лепљењу n-ћелије на простор X_0 уз помоћ пресликавања $f: S^{n-1} \to X_0$. На овај начин је добијен и M_f цилиндар пресликавања $f: X \to Y$. Прецизније, цилиндар $\mathrm{M}_f = Y \cup_f (X \times I)$ је добијен лепљењем простора $X \times I$ дуж $X \times \{1\}$ на простор Y помоћу пресликавања f. Сада ћемо дефинисати простор врло сличан цилиндру пресликавања.

Дефиниција 5.1: Конус пресликавања $f: X \to Y$ је простор $C_f = Y \cup_f CX$ добијен лепљењем конуса $CX = (X \times I)/(X \times \{0\})$ дуж базе конуса $X \times \{1\}$ на простор Y помоћу идентификације $(x, 1) \sim f(x)$.

Пример: Конус C_f пресликавања $f: S^{n-1} \to Y$ је простор добијен додоавањем n-ћелије на простор Y помоћу пресликавања f.

Конус пресликавања C_f можемо посматрати и као квоцијентни простор M_f / X добијен од цилиндра пресликавања M_f сабијањем базе цилиндра $X = X \times \{0\}$ у тачку (Сл. 11).

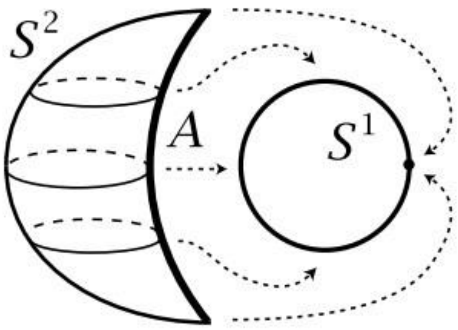


Слика 11

Ако пресликавање f варирамо неком хомотопијом f_t, добијамо фамилију простора чији се облици непрекидно мењају, очекује се да су сви ти простори истог хомотопског типа. Ово најчешће и јесте случај.

Теорема 5.2: Ако је $(X_{1,}Y)$ CW пар, а $f, g: Y \to X_0$ хомотопна пресликавања, тада су простори $X_0 U_f X_1$ и $X_0 U_g X_1$ хомотопски еквивалентни. Поново ћемо доказ теореме занемарити, а прво погледати неке конкретне примере.

Пример 5.4: У овом примеру ћемо на другачији начин добити резултати из примера 5.2. Сфера са две идентификоване тачке може се добити тако што се простор S^2 залепи на простор S^1 пресликавањем које неки затворени лук A из S^2 обмотава око S^1 (Сл. 12). Како је лук A контрактибилан, пресликавање лепљења је хомотопно константном пресликавању, а управо додавање S^2 на S^1 константним пресликавањем преко A даје $S^1 \vee S^2$. Како је $(S^2,$A) CW пар, из критеријума лепљења добијамо да су ова два простора истог хомотопског типа, што смо и хтели да докажемо.



Слика 12

Пример 5.5: На овај начин ћемо и доказати да су огрлица са перлама и букет круга и n сфера из примера 5.1 хомотопски еквиалентни, што већ знамо. Огрлица може да се добије тако што n 2-сфера залепимо на круг дуж лукова тог круга, што значи да је огрлица хомотопски еквивалентна простору добијеном када исте те сфере залепимо на тачке круга, пошто су сви лукови тог круга контрактибилни. Да добијемо букет који нам треба, само треба да све тачке спајања померимо у једну тачку на кругу.

Пример 5.6: У овом примеру ћемо користити раније напомениту чињеницу да је сабијање контрактибилног поткомплекса хомотопска еквиваленција. Ако је (X,Y) CW пар где је Y контрактибилан поткомплес од X. Тада је $X/Y \simeq X \cup CY$, односно квоцијент X/Y хомотопски је еквивалентан C_i, конусу инклузије $i: Y \hookrightarrow X$. Како је CY контрактибилан поткомплекс од $X \cup CY$ заиста важи $X/Y = (X \cup CY)/CY \simeq X \cup CY$.

6. Закључак

Надам се да је читање овог рада приближило читаоца свету топологије и можда подстакло знатижељу за даљим изучавањем ове гране математике. Као што је већ речено, топологија има значајне примене и у другим наукама, у биологији се уз помоће ње изучавају утицаји одређених ензима на ДНК, користи се у еволуционој биологији за презентовање односа генотипова и фенотипова, има примена у неколико поља физике и такође има велику улогу у информатици и роботици. У најширем смислу топологија формализује појмове близине и континуитета. Реалност се такође понаша у континуалном маниру, барем на скали еволуције човека и његове интуиције. Ми размишљамо о реалности континуално, и интерагујемо са њом континуално, и топологија је ту да формализује све те непрекидне интеракције. Све користи топологије тек треба да се открију, јер појам континуитета нам помаже да разумемо многе ствари у нашој реалности. Можда ће баш топологија бити инструмент којим ћемо померити границе и проширити наше схватање на реалност. Топологија нуди много више од онога што је представљено у овом кратком раду, и верујем да ћу у свом даљем школовању проширити своје знање топологије и да ће и сама топологија напредовати и наставити да служи човечанству.

Литература

Allen Hatcher (2002): “Algebraic topology”, Cambridge University Press, преузето са Allen Hatcher’s Home Page: https://www.math.cornell.edu/~hatcher/#ATI

Милосав Марјановић и Синиша Врећица (2011): „Топологија“, Завод за уџбенике, Обилићев венац 5, Београд

Шиме Унгар:“Алгебарска топологија“, преузето са NASTAVA(Šime Ungar): https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/NASTAVA/nastava.html