Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из вероватноће и статистике -

Ланци Маркова

Ученик
Никола Самарџић IVд

Ментор
Бојана Милошевић

Београд, јун 2016.

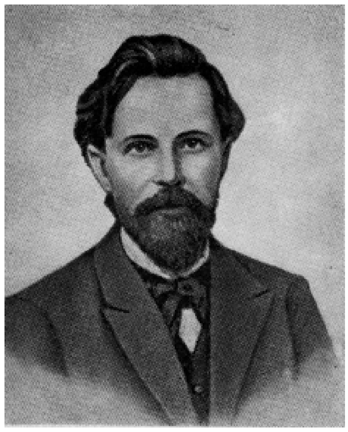
Садржај

1

Увод

1.1 Преглед поглавља и историјски контекст

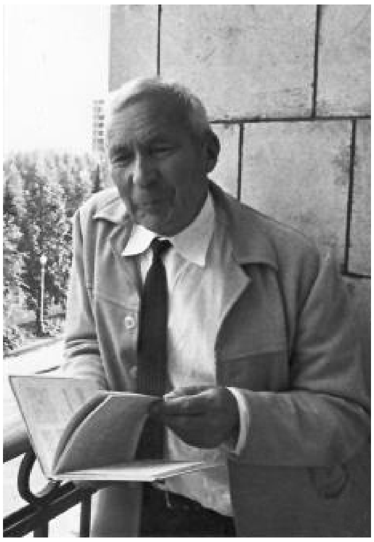
Ланци Маркова су добили назив по проф. А. Маркову (1856-1922). Марков је завршио мастер и докторат на Универзитету у Санкт Петербургу. Био је члан Руске Академије Наука. Марковљева открића у вези са ланцима Маркова изнедрила су прагматичну страну случајних процеса. Сам Марков покушао је да докаже примењивост ланаца Маркова тако што је ручно конструисао ланац Маркова од речи из Евгенија Оњегина (две речи би биле спојене од прве ка другој ако би прва реч дошла одмах пре друге негде у тексту, а тежина те гране била би једнака броју различитих места у тексту у којима прва реч стоји тик пре друге подељена са укупним бројем речи у тексту ради нормализације). Овако добијеним ланцем Маркова, Марков је пратећи ланац Маркова случајним ходом по стањима (речима) конструисао нови текст који је за то време и за овако наизлгед примитиван приступ био зачуђујуће кохерентан.



Слика 1: Андреј Марков, (1856-1922)

У математици се, у част Маркову, својство да наредна вредност коју ће случајни процес узети не зависи од начина на који је у тренутно стање доспео. Ланци Маркова су случајни процеси који имају Марковљево својство.

Кључне кораке у описивању понашања ланаца Маркова направио је и Андреј Колмогоров(1903-1987), један од најзначајнијих руских математичара двадесетог века. Колмогоров је докторирао на Универзитету у Москви. Већ 1933. Колмогоров објављује књигу "Основи теорије вероватноће"у којој описује модерне аксиоме теорије вероватноће, чиме се сврстава међу водећим стручњацима у области теорије вероватноће, те 1935. постаје први декан Одељења за вероватноћу Универзитета у Москви. За време Другог Светског Рата доприноси Савезницима тако што примењује статистичке моделе на Русима позната надлетања немачких авиона да би утврдио правце надлетања бомбардера над Москвом у будућности.



Слика 2: Андреј Колмогоров, (1856-1922)

Независно од, али у исто време кад и енглески математичар Сидни Чапман поставља једначину која се данас назива једначина Колмогоров-Чапмана, а представља једну од основа истраживања случајних процеса данас. Колмогоров се такође сматра оцем теорије алгоритамске сложености, теорије која проучава сложеност апстрактних објеката преко потребне величине програмског кода да се тај објекат дефинише.

Значај рада Колмогорова на многим пољима математике двадесетог века најбоље је изражена у реченици његовог студента, Владимира Арнолда:

"Колмогоров, Поенкаре, Гаус, Ојлер и Њутн су само пет живота који нас деле од извора наше науке."

Ово поглавље пролази кроз кратак увод у класичну теорију дискретних и непрекидних ланаца Маркова, као и њихову везу са матричним рачуном.

Прво ћемо дефинисати ланце Маркова и описати како од њих конструисати усмерени тежински граф. Даље се представљају најзначајније законитости ланаца Маркова, као и подела дискретних ланаца Маркова и пар теорема које образлажу потребу и корист постојања тих подела. На крају поглавља представљамо пар примера који показују корист ланаца Маркова при описивању реалних промена и понашања објеката који се могу посматрати као случајни процеси са марковљевим својством.

2

Појам ланца Маркова

Овај одељак представља увод у појам дискретних хомогених Марковљевих ланаца. Марковљеви ланци служе као модели реалних процеса који задовољавају одређене особине.

Нека је I пребројив скуп, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноће и $(X_n)_{n\geq 0}$ низ случајних величина такав да $X : \Omega \to I$.

Нека је $\lambda = (\lambda_i : i \in I)$ расподела вероватноће $(0 \leq \lambda_i, \Sigma_{i\in I}\lambda_i = 1)$ и нека овај вектор представља **иницијалну расподелу** на I, дефинисану са $\lambda_i : i \in I$.

Дефиниција 2.1. **Матрица преласка** $P = (p_{i,j} : i, j \in I)$ је матрица која има следећа својства:

(i) $$(\forall i, j \in I)\ p_{i,j} \geq 0;$$

(ii) $$\textstyle\sum_{i,j\in I} p_{i,j} = 1.$$

Дефиниција 2.2. Кажемо да је $(X_n)_{n\geq 0}$ **дискретни хомогени ланац Маркова** почетне расподеле λ и матрице преласка P ако)$\forall n \geq 0$) и $i_0, ..., i_n \in I$

(i) $$P(X_0 = i_0) = \lambda_{i_0};$$

(ii) $$P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, ..., X_0 = i_0).$$

Величину I називамо **простор стања**, а елементе простора стања називамо **стања**. Марковљев ланац $(X_n)_{n\geq 0}$ краће записујемо као $Markov(\lambda, P)$.

2.1 Ланац Маркова као граф

Испоставља се да је корисно посматрати ланце Маркова као усмерене тежинске графове, иако строго гледано они то нису. Да бисмо разумели примену ових графова у интерпретирању Марковљевих ланаца потребна нам је следећа теорема:

Теорема 2.1. $(X_n)_{n\geq 0}$ *је* $Markov(\lambda, P)$ *ако и само ако за свако* $n \geq 0$ *и за свако* $i_0, ..., i_n \in I$ *важи:*

$$P(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0,i_1} \cdots\ p_{i_{n-1},i_n}$$

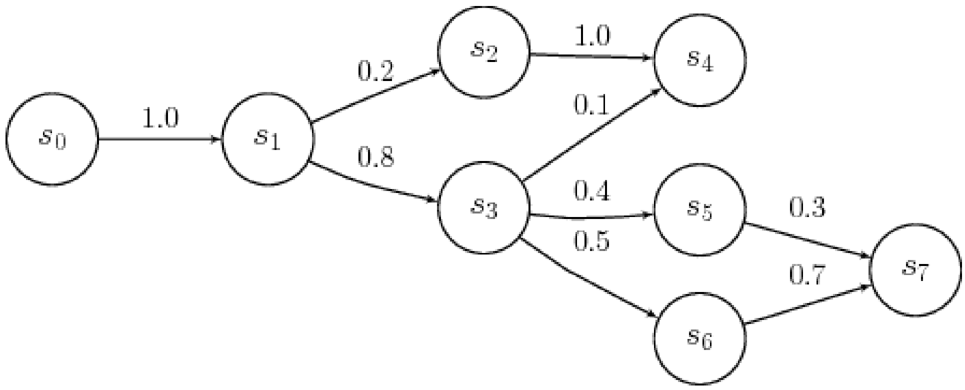
Доказ. ($\Rightarrow$) Нека је низ $(X_n)_{n\geq 0}$ $Markov(\lambda, P)$. Онда имамо

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) = \\ &= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) P(X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= \lambda_{i_0} p_{i_0, i_1} \cdot ... \cdot \ p_{i_{n-1}, i_n}. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Узимајући $n = 1$ одмах добијамо својство (i). Даље имамо $\forall n$:

$$P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = \frac{P(X_n = i_n, ..., X_0 = i_0)}{P(X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0)} = p_{i_{n-1}, i_n}.$$

□



Слика 3: Илустрација ланца Маркова са стањима $s_1, s_2, ..., s_7$ као усмерени тежински граф. Стања ланца представљена су чворовима графа, док гране графа представљају вероватноће преласка из извирућег у увируће стање. На пример, вероватноћа преласка из стања s_1 у стање s_2 је 0.2.

2.1.1 Правила конструкције графа и својства

Правила конструкције:

1. Стања ланца Маркова преводе се у чворове графа.
2. Усмерена грана $g_{i,j}$ узима вредност $p_{i,j}$ из матрице преласка ланца Маркова, с тим што гране тежине 0 не цртамо.

Посматрајмо објекат који се креће по чворовима нашег графа у одређеном редоследу тако да у свакој итерацији времена (осим прве итерације) прође кроз тачно једну грану графа. У првој итерацији времена објекат заузима насумични чвор.

Нека је вероватноћа да се објекат у првој итерацији нађе у одређеном чвору дефинисана расподелом вероватноће λ посматраног ланца Маркова.

Нека је вероватноћа да објекат који се налази у одређеном чвору пређе у други чвор (не нужно различит од првог) у следећој итерацији једнака тежини гране која их у одговарајућем смеру повезује.

Погледајмо сада својства која наш граф треба да задовољава:

1. Вероватноћа да ће објекат у било којој итерацији отићи кроз неку грану графа је 1.
2. Вероватноћа да ће објекат проћи кроз одређени пут једнака је производу свих грана на том путу и вредност иницијалне расподеле почетног чвора (директна последица теореме 1.3.)

2.2 Матрица преласка n-тог реда

Дефиниција 2.3. $(\forall i, j, k \in I) P_i(X_k = j) := P(X_k = j | X_0 = i)$
Видимо на пример да је $P_i(X_1 = j) = P_{i,j}$.

Теорема 2.2.

$$P(X_n = j) = (\lambda P^n)_j$$

Доказ. Применом теореме 1.3. закључујемо:

$$\begin{aligned} P(X_1 = j) &= \sum_{i \in I} \lambda_i P_i(X_1 = j) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i p_{i,j} \end{aligned}$$

Слично,

$$\begin{aligned} P_i(X_2 = j) &= \sum_{k \in I} P_i(X_1 = k, X_2 = j) \\ &= \sum_{k \in I} p_{i,k} p_{k,j} = (P^2)_{i,j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2 = j) &= \sum_{k,i \in I} \lambda_i P_i(X_1 = k, X_2 = j) \\ &= \sum_{k,i \in I} \lambda_i p_{i,k} p_{k,j} = (\lambda P^2)_j \end{aligned}$$

Даље се индукцијом може доказати да за произвољно $n \in \mathbb{N}$ важи

$$P(X_n = j) = (\lambda P^n)_j$$

$\square$

Дефиниција 2.4. Матрица P^n се назива **матрица преласка n-тог реда**, а члан ове матрице у пресеку i-тог реда и j-те колоне обележава се са $p_{i,j}^{(n)}$

Дефиниција 2.5. Очигледна законитост између овако дефинисаних вредности изражена је у **једначини Колмогоров-Чапмана**:

$$p_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{k \in I} p_{i,k}^{(n)} p_{k,j}^{(m)}$$

где су $m, n \geq 0$ и $i, j \in I$.

Доказ. Доказ изводимо користећи се основним релацијама теорије вероватноће:

$$\begin{aligned}
p_{i,j} &= P(X_{m+n} = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in I} P(X_{m+n} = j, X_n = k | X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in I} P(X_{m+n} = j | X_n = k, X_0 = i) P(x_n = k | X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in I} P(X_{m+n} = j | X_n = k) P(x_n = k | X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in I} p_{i,k}^{(n)} p_{k,j}^{(m)}
\end{aligned}$$

□

Враћајући се на претходно споменуте графове, примећујемо да је директна последица 2. својства да вредност $(\lambda P^{(n)})_j$ представља вероватноћу да ће се објекат након n итерација налазити у чвору j.

2.3 Класификација ланаца Маркова

Дефиниција 2.6. Унутар ланца Маркова, кажемо да је стање i **могуће достићи** из стања j ако је $p_{i,j}^{(n)} > 0$ за неко $n \geq 0$.

Дефиниција 2.7. За стања i и j кажемо да **комуницирају** и пишемо $i \leftrightarrow j$ ако је могуће достићи i из j и j из i.

Теорема 2.3. Релација комуницирања је *релација еквиваленције.*

Доказ. Да бисмо доказали да је релација комунијације релација еквиваленције потребно је и довољно да докажемо да је рефлексивна, симетрична и транзитивна:

1. Рефлексивност:
$$p_{i,i}^{(0)} = 1 > 0.$$

2. Симетричност је последица саме дефиниције релације.

3. Транзитивност:

$$(\forall i, j, k)|i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k$$

$$(\exists n, m \in \mathbb{N})(p_{i,j}^{(n)} > 0, p_{j,k}^{(m)} > 0)$$

$$\Longrightarrow 0 < p_{i,j}^{(n)} p_{j,k}^{(m)} \leq \sum_{j \in I} p_{i,j}^{(n)} p_{j,}^{(m)} = p_{i,k}^{(n+m)}.$$

□

Дефиниција 2.8. Класе еквиваленције комуницирања називају се **класе комуникације**.

Дефиниција 2.9. За дати Марковљев ланац кажемо да је **нерастављив** уколико релација комуникације над њим има тачно једну класу еквиваленције.

Дефиниција 2.10. Кажемо да је стање i **посећено** у n-тој итерацији ако важи $X_n = i$.

Дефиниција 2.11. Нека је f_i вероватноћа да ће стање i бити посећено у некој итерацији након прве уколико је већ било посећено у првој итерацији. Стање ланца Маркова називамо **повратном тачком** уколико је $f_i = 1$.

Дефиниција 2.12. Стање које није повратна тачка називамо **пролазном тачком**.

Теорема 2.4. Стање ланца Маркова је повратна тачка ако и само ако:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty$$

Доказ. Докажимо да је, прецизније:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_i^n.$$

Узмимо ланац Маркова чије је почетно стање једнако i. Посматрајмо случајну величину

$$V_i = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n = i\}}$$

која пребројава број повратака ланца Маркова у стање i. Онда имамо:

$$P\{V_i \geq k\} = f_i^k, k \in \mathbb{N}.$$

Одакле је очекивање случајне величине V_i

$$[V_i] = \sum_{k=1}^{\infty} P\{V_i \geq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} f_i^k.$$

С друге стране

$$[V_i] = \left[\sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{X_n=i\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1_{\{X_n=i\}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} p_{i,i}^{(n)}.$$

□

Леви смер теореме имплицира да свака пролазна тачка бива посећена само коначан број пута. Одавде закључујемо да не могу сва стања ланца бити пролазне тачке, јер у бесконачном ланцу (проласку кроз граф) нека стања морају бити посећена бесконачан број пута. Из претходне теореме следи и следећа:

Теорема 2.5. У коначном Марковљевом ланцу, уколико пролазна тачка i комуницира са стањем j онда је и j пролазна тачка.

Доказ. По условима теореме знамо да

$$(\exists s, r \in \mathbb{N}_0)(p_{i,j}^{(s)} > 0, p_{j,i}^{(r)} > 0)$$

Применом једначине Колмогоров-Чапман можемо закључити

$$p_{i,i}^{(n+r+s)} \geq p_{i,j}^{(s)} p_{j,j}^{(n)} p_{j,i}^{(r)}.$$

Стога је

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{j,j}^{(n)} \leq \frac{1}{p_{i,j}^{(s)} p_{j,i}^{(r)}} \sum_{n=1}^{\infty} p_{i,i}^{(n+r+s)} \leq \frac{1}{p_{i,j}^{(s)} p_{j,i}^{(r)}} \sum_{n=1}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} < \infty.$$

□

Дефиниција 2.13. За стање i каже се да има **период** d уколико је d највећи природан број такав да $(\forall n \in \mathbb{N}) d \not| n \Rightarrow P_{i,i}^{(n)} = 0$.

Теорема 2.6. Стање i ланца Маркова има период d ако и само ако важи:

$$d = (\{m \in Z | p_{i,i}^{(m)} > 0\}).$$

Доказ. Приметимо да је

$$((\forall n \in \mathbb{N}) d \not| n \Rightarrow P_{i,i}^{(n)} = 0) \iff ((\forall n \in \mathbb{N}) P_{i,i}^{(n)} > 0 \Rightarrow d | n)$$

Односно

$$(\forall a \in \{m \in Z | p_{i,i}^{(m)} > 0\}) d | a. \tag{1}$$

тј., да би d био период стања i мора бити заједнички делилац свих бројева из скупа $\{m \in Z | p_{i,i}^{(m)} > 0\}$. С обзиром да је период стања дефинисан као највећи могући број за који је задовољено својство (1) онда је период стања i баш највећи заједнички делилац бројева из скупа $\{m \in Z | p_{i,i}^{(m)} > 0\}$. □

Дефиниција 2.14. Стање називамо **апериодичним** ако је његов период 1.

Дефиниција 2.15. Стање i назива се **понављајућим** уколико је понављајуће и уколико је математичко очекивање броја корака између две посете стања i коначан број.

Дефиниција 2.16. Стање се назива **ергодичним** ако је понављајуће.[1]

Дефиниција 2.17. Вектор $\pi = (\pi_0, \pi_1, ..., \pi_{k-1})^T$је **стационарна расподела** коначног Марковљевог ланца ако задовољава следеће услове:

(i) $$\sum_{i=0}^{k-1} \pi_i = 1., \pi_i \geq 0$$

(ii) $$P\pi = \pi$$

Ако важи још и
$$\lim_{n\to\infty} ||X^{(n)} - \pi|| = \lim_{n\to\infty} ||P^n X^{(0)} - \pi|| = 0$$
онда је π **стабилна расподела вероватноће**.

Теорема 2.7. Ако нерастављив и коначан ланац Маркова има стационарну расподелу, онда је она јединствена.

Доказ. Нека је π стационарна расподела посматраног нерастављивог коначног ланца Маркова. Докажимо да је она јединствена. Раздвојимо доказ ове теореме на два случаја:

Први случај:

Матрица преласка нема нулу у себи.

Знамо да је π стационарна расподела ако задовољава услов $P\pi = \pi$, односно, π представља сопственни вектор трансформације P сопствене вредности 1. Тврдимо да сваки сопствени вектор сопствене вредности 1 има све чланове истог знака.

Претпоставимо супротно. Нека су неки чланови неког сопственог вектора сопствене вредности 1 позитивни, а неки негативни. Посматрајмо једначину $\pi P = \pi$. Посматрајмо сада конкретан члан вектора који се налази у j-тој врсти вектора π, односно $\pi(j)$. Знамо да важи:
$$\sum_i \pi(i) P_{i,j} = \pi(j).$$

Нека је π' вектор који има чланове који су једнаки апсолутној вредности одговарајућих чланова вектора π, односно $(\forall i)\pi'(i) = |\pi(i)|$. Очигледно је $|\sum_i \pi(i)P_{i,j}| < \sum_i |\pi(i)| p_{i,j}$, с обзиром на то да се на левој страни израза скраћују у суми чланови

[1] Историјски се ергодична стања ланца Маркова дефинишу као стања која су уједно и понављајући и апериодични. Међутим, данас се појам ергодичности у математици користи у много ширем смислу и дефинисан је теоријом ергодичности. Дакле, по теорији ергодичности стање ланца Маркова је ергодично ако и само ако је понављајуће, док је историјски стање било називано ергодичним само ако је понављајуће и апериодично.

различитог знака док су с десне стране сви чланови збира строго позитивни. Сада имамо

$$\pi'(j) = |\pi(j)| = \Big|\sum_i \pi(i)P_{i,j}\Big| < \sum_i |\pi(i)|P_{i,j} = \sum_i \pi'(i)P_{i,j}.$$

Односно,

$$\sum_j \sum_i \pi'(i)P_{i,j} > \sum_j \Big|\sum_i \pi(i)P_{i,j}\Big| = \sum_j |\pi(j)|.$$

Међутим

$$\sum_j \sum_i \pi'(i)P_{i,j} = \sum_i \pi'(i)\Big[\sum_j P_{i,j}\Big] = \sum_i \pi'(i) = \sum_i \pi'(i) = \sum_i |\pi(i)|.$$

Што доводи почетну претпоставку у контрадикцију са условима теореме.

Закључујемо да сваки сопствени вектор π матрице сопствене вредности 1 има све чланове истог знака. Сада, с обзиром да матрица преласка има искључиво позитивне чланове, то следи да матрица π има све позитивне чланове, па стога све позитивне чланове има и π.

Покажимо сада да је овакав вектор јединствен тако што ћемо претпоставити супротно. Нека су и два различита сопствена вектора матрице са сопственом вредношћу 1. Онда се може конструисати не-нула вектор z такав да је бар један његов члан једнак 0 и да се z може представити као линеарна комбинација вектора x и y. Међутим, вектор z мора онда бити сопствени вектор матрице сопствене вредности 1, те, с обзиром на горе наведену претпоставку да матрица преласка нема ни један члан једнак 0, не сме ни z имати ни један члан једнак 0. Овако смо добили контрадикцију.

Сада можемо закључити да је стацинарна расподела на нерастављивом и коначном ланцу Маркова јединствена.

Други случај:

Матрица преласка ланца Маркова има бар један члан једнак нули. Посматрајмо следећу матрицу:

$$Q = \frac{I + P}{2},$$

ако ову матрицу посматрамо као транзициону, видимо да је ланац Маркова транзиционе матрице Q исти као онај транзиционе матрице , осим што свако стање добија самоусмерену грану тежине 1/2, док је тежина свих осталих грана из старог ланца преполовљена. Стога видимо да и у новом ланцу имамо усмерене путеве између свака два чвора, те је новодобијени ланац Маркова такође нерастављив.

Приметимо да је $Q^n(i,i) \neq 0$ за свако n и i. Користећи једначину Колмогорова и нерастављивост ланца Маркова транзиционе матрице Q за свако jи i постоји неко n такво да је $Q^n(i,j) > 0$, тачније да је $Q^{n+k}(i,j) \geq Q^k(i,i)Q^n(i,j) > 0$. Дакле, за довољно велики природан број m сви чланови матрице Q^m биће позитивни. Приметимо да је Q^m валидна матрица преласка ланца Маркова, те и да је сваки сопствени вектор сопствене вредности једнаке 1 почетне матрице преласка уједно и сопствени вектор сопствене вредности једнаке 1 ланца Маркова матрице преласка Q^m. Специјално, свака стационарна расподела на је стационарна и на Q^m. Из првог случаја знамо да је стационарна расподела на Q^m јединствена ако постоји, те је то нужно случај и за . □

Теорема 2.8. Свака стационарна расподела на нерастављивом, апериодичном и коначном ланцу Маркова је стабилна расподела.

Доказ ове теореме превазилази градиво елементарне теорије верованоће, те неће бити овде наведен. Најелегантнији доказ ове теореме спроведен је крајем тридесетих година 20-тог века од стране математичара Волфганга Деблина.

Теорема 2.9. Ланац Маркова у ком су сви чворови понављајући има бар једну стационарну расподелу и то такву да важи

$$\pi_j = \frac{1}{E(\tau_{j,j})}$$

за свако стање j, при чему је $\tau_{j,j}$ број итерације до прве посете ланца стању j. Још прецизније, ако је стање ланца пролазна тачка или пак повратна али не и понављајућа тачка онда је $\pi_j = 0$

Доказ. Без губљења општости претпоставимо да је $X_0 = j$. Дефинишимо $t_0 = 0, t_1 = \tau_{j,j}, t_2 = \min k > t_1 : X_k = j, ..., t_{n+1} = \min k > t_n : X_k = j, n \geq 1$. Дакле, t_n је време n-те посете стања j. Даље дефинишимо $Y_n = t_n - t_{n-1}$. Ове дефиниције служе да разбију путању ланца Маркова на циклусе, где сваки нови циклус почиње новом посетом стању j. Сваки нови циклус започиње се на исти начин (у смислу вероватноће) као и сваки претходни због Марковљевог својства. Одавде закључујемо да је $(Y_n) = E(\tau_{j,j})$ за свако n.

Сада приметимо да је очекивање броја посета стању j једнак тачно n након времена $t_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ те је укупан однос посета стању j по јединици времена у лимесу једнак:

$$\begin{aligned}
\pi_j &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} I X_k = j \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} Y_i} \\
&= \frac{1}{E(\tau_{j,j})},
\end{aligned}$$

при чему је последња једнакост последица јаког закона великих бројева.

Очигледно је да ово тврђење важи и за $X_0 \neq j$, јер из чињенице да су сви чворови понављајући знамо да ће ланац доћи у стање j у коначном времену, те да ћемо онда моћи да применимо исти поступак као горе. Стога, овај поступак може да се спроведе за сваки чвор ланца и тиме је тврђење теореме доказано. □

Теорема 2.10. Сваки чвор сваког нерастављивог и коначаног ланца Маркова је понављајући.

Доказ. Директна последица теореме 2.5 је да су сва стања нераставњивог и коначног ланца Маркова повратна (с обзиром да су вероватноће преласка између било која два стања након коначног времена веће од нула). Потребно је само још доказати да су сва стања понављајућа.

Из претходне теореме закључујемо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}P_{i,j}^{m}=0$$

Ако даље сумирамо по свим j имамо

$$\sum_{j}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}P_{i,j}^{m}=0$$

С обзиром да је простор стања коначан, лимес може да изађе испред суме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j}\sum_{m=1}^{n}P_{i,j}^{m}=0$$

сада приметимо да је по дефиницији матрице преласка

$$\sum_{j}P_{i,j}^{m}=\sum_{j}P_{i,j}=1,$$

те долазимо до контрадикције:

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j}\sum_{m=1}^{n}P_{i,j}^{m}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j}P_{i,j}^{m}=1.$$

Сада можемо закључити да је свако стање понављајуће. □

Дефиниција 2.18. На векторском простору $V=\mathbb{R}^n$ норма $||\cdot||$ је функција која слика из скупа $\mathbb{R}^n$ у скуп ненегативних реалних бројева и има следеће особине:

(i) $$(\forall x\in V)x\neq 0\Rightarrow ||x||>0$$

(ii) $$(\forall x\in V,\lambda\in\mathbb{R})||\lambda x||=|\lambda|||x||$$

(iii) $$(\forall x,y\in V)||x+y||\leq ||x||+||y||$$

Теорема 2.11. За $p\geq 1$, следећа функција је добро дефинисана норма векторског простора $\mathbb{R}^n$:

$$||x||=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

2.3.1 Случајан ход по правој

Нека је $\{X(k), k \in \mathbb{N}_0\}$ хомогени ланац Маркова са вероватноћом преласка

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, |i-j| = 1 \\ 0, |i-j| \neq 1. \end{cases}$$

При чему је $X(0) = 0$. Нека су m и n природни бројеви. Дефинишимо следеће величине:

$$U = \min_{X(k)=-m} k, V = \min_{X(k)=n} k, A = V < U$$

Доказати да је

$$P(A) = \frac{m}{m+n}$$

Доказ. Нека је $a_{ij} = P(A_{ij})$, где A_{ij} представља догађај у ком се у низу $X(0), X(1), ...$ j појави пре него i. Дакле, $P(A) = a_{mn}$. Примећујемо да важе следеће једнакости:

$$a_{1,m+n-1} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} a_{2,m+n-2}$$

$$a_{2,m+n-2} = \frac{1}{2} a_{1,m+n-1} + \frac{1}{2} a_{3,m+n-3}$$

такође:

$$a_{m+n-1,1} = \frac{1}{2} a_{m+n-2,2} + \frac{1}{2} \times 1$$

Нека је $y_k = a_{k,m+n-k}$. Користећи се овим ознакама видимо да:

$$2y_1 = 0 + y_2$$

$$2y_2 = y_1 + y_3$$

$$2y_3 = y_2 + y_4$$

$$y_{m+n-1} = y_{m+n-1} + 1$$

Те сабирањем једначина из система видимо да:

$$y_1 + y_{m+n-1} = 1,$$

и индукцијом закључујемо:

$$y_2 = 2y_1, y_3 = 2y_2 - y_1 = 3y_1,$$

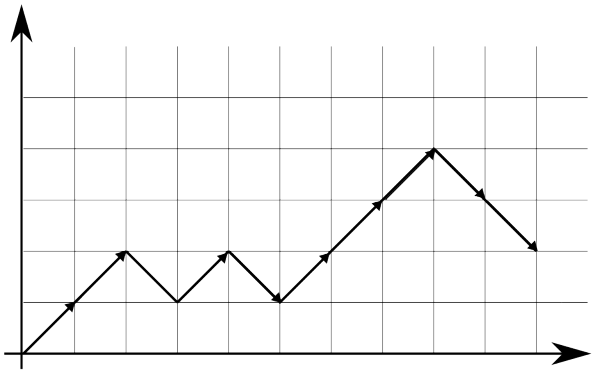
$$y_4 = 2y_3 - y_2 = 4y_1, ..., y_{m+n-1} = (m+n-1)y_1$$

одакле је

$$y_1 + y_{m+n-1} = y_1 + (m+n-1)y_1 = 1, y_1 = \frac{1}{m+n}$$

$$y_2 = \frac{2}{m+n}, ..., y_m = \frac{m}{m+n} = a_{mn} = P(A).$$

□



Слика 4: Илустрација проблема у координатном систему

2.3.2 Модел инвентара

Посматрајмо ситуацију у којој се намирница излаже на регал у продавници. Претпоставимо да се регал пуни производом у преодређеним тренуцима $t_1, t_2, ..., t_n$. Претпоставимо такође да је потражња за намирницу унутар временског интервала (t_n, t_{n+1}) случајна величина ξ_n чија функција расподеле не зависи од временског интервала, односно:

$$P\{\xi_n = k\} = a_k, \xi_i \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$$

за $\sum_{k=0}^{\infty} a_i = 1$. Број производа на полици се установљава у тренуцима $t_1, t_2, ..., t_n$. Полиса инвентара дефинисана је са бројем s и бројем $S > s$, а правила полисе су следећа:

Ако на полици нема више од s производа онда се на полицу ставља потребан број производа да на њој буде S производа. У супротном на полицу се не стављају додатни производи.

Нека X_n означава број производа на полици у тренутку t_n пре него што дође до евентуалног додавања нових проивода. Према полиси инвентара сваке две суседне величине X_n и X_{n+1} повезане су релацијом:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - \xi_{n+1}, s < X_n \leq S, \\ S - \xi_{n+1}, X_n \leq s \end{cases} \tag{2}$$

Примећујемо да $\{X_n\}_{n\geq 0}$ чини ланац Маркова, помоћу кога ћемо моћи да нађемо оптималне вредности времена $t_1, t_2, ..., t_n$.

3

Непрекидни ланци Маркова

До сада смо се бавили такозваним дискретним хомогеним ланцима Маркова у којима се промене стања дешавају у дискретним итерацијама и у којима матрица преласка не зависи од броја итерација. Сад ћемо се осврнути на непрекидне хомогене ланце Маркова, док ћемо се касније позабавити и непрекидним нехомогеним ланцима Маркова.

У многим реалним ситуацијама не долази до моменталних промена стања, већ до континуалног смењивања два стања. Дакле, у многим моделима природније је посматрати дужину коју објекат проведе у одређеном стању као непрекидну случајну величину. Поасонови процеси показали су се као врло корисни за проучавање понашања непрекидних Марковљевих ланаца те ћемо прво изложити дефиницију и особине ових процеса.

3.0.1 Поасонови процеси

Дефиниција 3.1. Процес се назива **Поасоновим** ако је:

1. Вероватноћа да се догоди одређени догађај у временском интервалу $(t, t + \delta t)$ једнака $\lambda\delta t + o(\delta t)$, где је λ позитивна константа, а $o(\delta t)$ функција таква да
$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{o(\delta t)}{\delta t} = 0.$$
2. Вероватноћа да се неће догодити ниједан догађај унутар временског интервала $(t, t + \delta t)$ једнака $1 - \lambda\delta t + o(\delta t)$.
3. Вероватноћа да ће се унутар интервала $(t, t + \delta t)$ десити бар два догађаја једнака $o(\delta t)$.

Овде догађај може бити било која предефинисана промена тренутног стања.

Примећене су многе примене Поасонових процеса у реалном свету. Број типографских грешака у датом тексту, број фабричких дефеката на аутомобилима, број рупа на аеродромским пистама, број мутација једног ДНК ланца, број сервисираних клијената у сваком услужном послу, број хитних амбулантних позива само су неки од примера процеса који прате законитости Поасонових процеса.

Нека је вероватноћа да се деси n догађаја у временском интервалу $[0, t]$ једнака $P_n(t)$. Претпоставимо да је $P_n(t)$ диференциабилна по t. Можемо успоставити везу између $P_n(t)$ и $P_{n-1}(t)$ тако што ћемо посматрати вероватноће $P_n(t+\delta t)$ и $P_{n-1}(t)$:

$$P_n(t+\delta t) = P_n(t) \cdot (1 - \lambda\delta t - o(\delta t)) + P_{n-1}(t) \cdot (\lambda\delta t + o(\delta t)) + o(\delta t)$$

Дакле, вероватноћа $P_n(t+\delta t)$ једнака је збиру вероватноћа да се десило $n-1$ догађаја у временском интервалу $[0,t]$, а уједно с тим ниједан догађај у интервалу $[t, t+\delta t]$ и вероватноћа да се десило $n-1$ догађаја у временском интервалу $[0,t]$, а уједно с тим један догађај у интервалу $[t, t+\delta t]$. Односно

$$\frac{P_n(t+\delta t) - P_n(t)}{\delta t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (P_{n-1}(t) + P_n(t))\frac{o(\delta t)}{\delta t}$$

Узмемо лимес с обе стране и добијамо:

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{P_n(t+\delta t) - P_n(t)}{\delta t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \lim_{\delta t \to 0} (P_{n-1}(t) + P_n(t))\frac{o(\delta t)}{\delta t};$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + 0,$$

Решимо ову диференцијалну једначину.

С обзиром да је $P_{-1}(t) = 0$, добијамо иницијалне вредности проблема:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

уз услов $P_0(0) = 1$ јер је вероватноћа да се не деси ниједан догађај једнака 1. Ова диференцијална једначина има следеће решење:

$$\begin{aligned} &P_0'(t) + \lambda P_0(t) = 0 \\ \Longrightarrow &e^{\lambda t} P_0'(t) + \lambda e^{\lambda t} P_0(t) = 0 \\ \Longrightarrow &\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_0(t)) = 0 \\ \Longrightarrow &e^{\lambda t} P_0(t) = C \\ \Longrightarrow &P_0(t) = Ce^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Из услова имамо $C = 1$ па је

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

и представља вероватноћу да се неће десити ниједан догађај у интервалу $[0,t]$. Стога је $1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ вероватноћа да се десио бар један догађај у интервалу $[0,t]$. Одавде можемо да изведемо густину вероватноће $f(t)$ за време t које треба да прође да се деси први догађај:

$$f(t) = \frac{d(1 - e^{-\lambda t})}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

Докажимо сада да је

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Доказ. Посматрајмо следећи систем диференцијалних једначина

$$\begin{cases} \frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), n = 1, 2, ... \\ P_0(t) = e^{-\lambda t} \\ P_n(0) = 0, n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Очигледно је базни случај $n = 0$ већ доказан. Приметимо следеће

$$\begin{aligned} &P_n'(t) + \lambda P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) \\ \Longrightarrow &e^{\lambda t} P_n'(t) + \lambda e^{\lambda t} P_n(t) = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \\ \Longrightarrow &\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_n(t)) = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \\ \Longrightarrow &\frac{d}{dt}\int_0^t (e^{\lambda u} P_n(u))du = \lambda \int_0^t e^{\lambda u} P_{n-1}(u)du \\ \Longrightarrow &e^{\lambda t} P_n(t) = \lambda \int_0^t e^{\lambda t} P_{n-1}(t)dt + C \\ \Longrightarrow &P_n(t) = \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda t} P_{n-1}(t)dt \\ \Longrightarrow &P_n(t) = \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda t} P_{n-1}(t)dt \end{aligned}$$

Уз индуктивну претпоставку да важи

$$P_{n-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

добијамо

$$\int_0^t \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)dt = \int_0^t \lambda e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} dt$$

тј.

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

□

Уведимо сада неке односе између Поасонових процеса, Поасонове расподеле и експоненцијалне расподеле.

Следећа тврђења су међусобно еквивалентнта:

1. Догађаји се дешавају по моделу Поасонових процеса са срењом брзиноом λ^{-1}.

2. Нека је $N(t)$ број дешавања у временском интервалу $[0, t]$, онда важи

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, n = 0, 1, 2, ...$$

3. Време између два дешавања је случајна величина са експоненцијалном расподелом средње вредности λ^{-1}.

3.0.2 Пример непрекидног бинарног ланца Маркова

Посматрајмо систем у ком корисници шаљу упите на сервер. Сервер може бити у два стања: 0(слободан) и 1(заузет). Претпоставимо да се упити корисника дешавају као Поасонови процеси са средњом брзином λ и да трајање сервисирања по упиту на серверу има експоненцијалну расподелу средње дужине μ. Нека је $P_1(t)$ вероватноћа да је сервер заузет у тренутку t и нека је $P_0(t)$ вероватноћа да је сервер слободан у тренутку t. Као и у извођењу Поасонове расподеле можемо да направимо следећи закључак:

$$\begin{cases} P_0(t+\delta t) = (1-\lambda\delta t - o(\delta t))P_0(t) + (\mu\delta t + o(\delta t))P_1(t) + o(\delta t) \\ P_1(t+\delta t) = (1-\lambda\delta t - o(\delta t))P_1(t) + (\mu\delta t + o(\delta t))P_0(t) + o(\delta t) \end{cases}$$

Узимањем лимеса и решавањем диференцијалних једначина долазимо до закључка:

$$P_0(t) = \frac{1}{\lambda+\mu}(\mu - \mu e^{-(\lambda+\mu)t})$$

$$P_1(t) = \frac{1}{\lambda+\mu}(\mu e^{-(\lambda+\mu)t} + \lambda)$$

Узимањем лимеса долазимо до решења стабилног стања:

$$\lim_{t\to\infty} P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\lim_{t\to\infty} P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

3.0.3 Обрнуте диференцијалне једначине Колмогорова

Прелазне вероватноће процеса рађања и умирања ($P_{ij}(t)$) морају да задовољавају систем једначина који се зове **обрнуте диференцијалне једначине Колмогорова**, које имају следећи облик:

$$P'_{0j}(t) = -\lambda_0 P_{0j}(t) + \lambda_0 P_{1j}(t),$$

$$P'_{ij}(t) = \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)P_{ij}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t), i \geq 1,$$

уз услов $P_i j(0) = \delta_{ij}$.

Ове једначине изводимо користећи једначину Колмогорова и формују потпуне вероватноће:

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h)P_{kj}(t)$$

$$= P_{i,i-1}(h)P_{i-1,j}(t) + P_{i,i}(h)P_{ij}(t) + P_{i,i+1}(h)P_{i+1,j}(t) + \sum_{k} P_{ik}(h)P_{kj}(t),$$

где у последњој суми сабирамо по свим $k \neq i-1, i, i+1$. Даље добијамо:

$$\begin{aligned} P_{ik}(h)P_{kj}(t) &\leq \sum_k P_{ik}(h) \\ &= 1 - [P_{ii}(h) + P_{i,i-1}(h) + P_{i,i+1}(h)] \\ &= 1 - [1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) + \mu_i h + o(h) + \lambda_i h + o(h)] \\ &= o(h), \end{aligned} \tag{3}$$

стога је

$$P_{ij}(t+h) = \mu_i h P_{i-1,j}(t) + (1 - (\lambda_i + \mu_i)h)P_{ij}(t) + \lambda_i h P_{i+1,j}(t) + o(h).$$

Узимајући лимес кад h тежи 0 и сређивањем закључујемо:

$$P'_{ij}(t) = \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)P_{ij}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t).$$

Овај резултат добија се дељењем интервала $(0, t+h)$ где је h бесконачно мало на интервале $(0, h)$ и $(h, t+h)$. Међутим, другачији резултат добијамо посматрањем интервала $(0, t)$ и $(t < t+h)$ уместо $(0, h)$ и $(h, t+h)$. Оваквим моделом добијамо следећи систем једначина:

$$P'_{i0}(t) = -\lambda_0 P_{i,0}(t) + \mu_1 P_{i,1}(t),$$

$$P'_{ij} = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_{ij}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t), j \geq 1,$$

са истим почетним условом $P_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Овај систем познат је под називом **предње једначине Колмогорова**. Довољан услов да важи је да

$$\frac{P_{kj}(h)}{h} = o(1), k \neq j.$$

3.0.4 Примена непрекидних ланаца Маркова у проучавању демографских промена

У популационој математици, процес рађања и умирања назива се процесом линеарног раста уколико $\lambda_n = \lambda n + a$ и $\mu_n = \mu n$ где важи $\lambda > 0, \mu > 0$, и $a > 0$. Овакви процеси се могу наћи у природи. Уколико број n означава тренутну популацију неког система онда је просечан тренутни раст популације $\lambda n + a$. Такође, вероватноћа да ће доћи до смањења популације у неком малом временском интервалу је $\mu n t + o(t)$. Члан λn представља природни прираштај популације који је условљен њеном тренутном величином, док други члан a представља повећан прираштај као последица неког спољашњег услова, попут миграције. Слични закључак изводимо за члан μn који описује брзину одумирања чланова популације. Ако заменимо чланове λ_n и μ_n у једначину примећујемо:

$$P'_{i0}(t) = -aP_{i0}(t) + \mu P_{i1}(t),$$

$$P'_{ij}(t) = (\lambda(j-1)+a)P_{i,j-1}(t) - ((\lambda+\mu)j+a)P_{ij}(t) + \mu(j+1)P_{i,j+1}(t), j \geq 1.$$

Ако j-ту једначину помножимо са j и сумирамо све једначине по j добијамо израз за математичко очекивање:

$$EX(t) = M(t) = \sum_{j=1}^{\infty} jP_{ij}(t)$$

које задовољава диференцијалну једначину

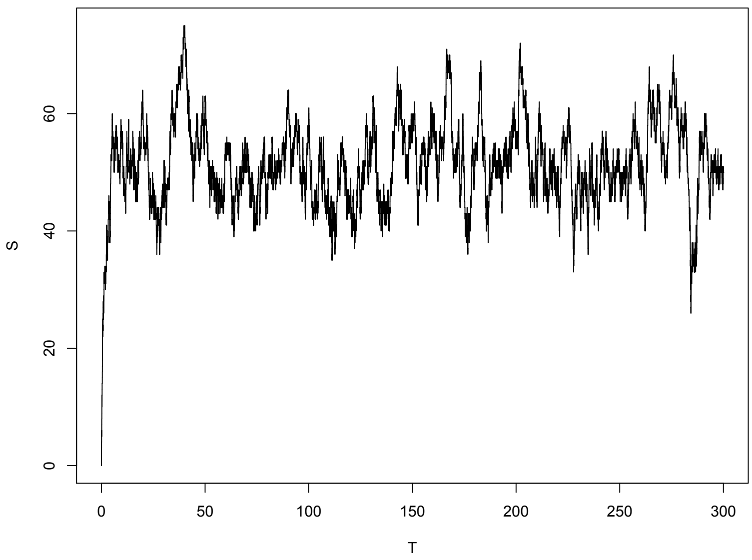
$$M'(t) = a + (\lambda - \mu)M(t),$$

почетних услова $M(0) = X(0)$. Решења ове једначине су

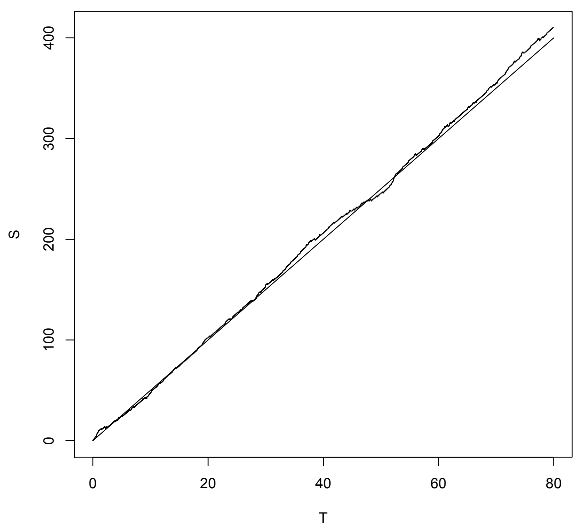
$$M(t) = \begin{cases} at + i & ,\lambda = \mu \\ \frac{a}{\lambda-\mu}e^{(\lambda-\mu)t} - 1 + ie^{(\lambda-\mu)t} & ,\lambda \neq \mu \end{cases}$$

Занимљиво је и уочити како се $M(t)$ понаша у граничним случајевима:

$$\lim_{t\to\infty} M(t) = \begin{cases} \infty & ,\lambda \geq \mu \\ \frac{a}{\mu-\lambda} & ,\lambda < \mu \end{cases}$$



Слика 5: График зависности величине популације од времена за случај $\lambda < \mu(\lambda = 3, \mu = 7)$. Може се видети да очекивање бројности популације конвергира.



Слика 6: График зависности величине популације од времена за случај $\lambda = \mu = 5$. очигледно прати праву која је теоретски изведена изнад.

4

Претраживачи

Алгоритам који данас Гугл користи као део свог претраживача користи ланце Маркова. Овај алгоритам представља један од најбољих доказа примењивости ланаца Маркова на реалне моделе.

При претраживању интернета претраживач има задатак да кориснику врати веб странице које највише одговарају упиту који је корисник поставио. С обзиром да страница које одговарају упиту корисника обично има више хиљада, непоходно је приказати одговарајуће странице у неком уређеном поретку у односу на то колико одговарају упиту. Дакле, неопходно је направити брз алгоритам који налази релевантне странице и притом их сортира по релевантности.

Лари Пејџ и Сергеј Брин, оснивачи Гугла, заслужни су за смишљање и реализацију алгоритма **PageRank**. На сајту Гугла може се наћи следећа изјава:

"*The heart of our software is PageRank, a system for ranking web pages developed by our founders Larry Page and Sergey Brin at Stanford University. And while we have dozens of engineers working to improve every aspect of Google on a daily basis, PageRank continues to provide the basis for all of our web search tools.*"

Сличан алгоритам за ранкирање важности чланака био је већ у употреби и на основу овог алгоритма установљавају се утицајности многих научних чланака а самим тим и њихових аутора. Важност одређеног чланка мерена је преко просечног броја цитата из тог чланка по скоро објављеним радовима. Посматрајући сваку веб страницу као чланак, Лари и Сергеј развили су PageRank алгоритам.

PageRank је дефинисан на следећи начин: Нека је N укупан број страница унутар мреже. Дефинишимо матрицу Q коју ћемо да називамо **матрица везе**:

$$Q_{j,i} = \begin{cases} \frac{1}{k}, i \to j \\ 0, i \mapsto j \end{cases}$$

где $i \to j$ значи да на страници i постоји линк на страницу j, а $i \mapsto j$ да такав линк не постоји. k је број веза на страници j. Узимамо и $Q_{i,i} > 0$.

Сада правимо ланац Маркова тако што узимамо веб странице за стања и матрицу везе за транзициону матрицу ланца Маркова. Претпоставићемо да је овако конструисан ланац нерастављив. Дакле, постоји стабилна расподела вероватноће

$$(p_1, p_2, ..., p_N)^T$$

свих стања. Испоставља се да је p_i део времена које корисник проведе на страници i. Што је p_i веће то је страница i релевантнија.

У правој имплементацији алгоритма од матрице Q конструише се нова матрица на следећи начин

$$P = \alpha \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1N} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{N1} & Q_{N2} & \dots & Q_{NN} \end{bmatrix} + \frac{1-\alpha}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

за $0 < \alpha < 1$. Матрица P је нерастављива и апериодична одакле следи да је стабилна расподела вероватноће јединствена. У имплементацији, за α се уобичајно користе вредности 0.85 и $1 - 1/N$. Важно је приметити да избор вредности α може утицати на крајње ранкирање веб страница. Матрицу P можемо посматрати на следећи начин. Свака страница има почетну важност $(1-\alpha)/N$. Ако страница P_i има важност p_i, онда ће странице за које постоји линк унутар странице p_i добити укупну важност αp_i од странице p_i. Важност одређене странице може се израчунати решавањем система једначина:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1N} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{N1} & Q_{N2} & \dots & Q_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix} + \frac{1-\alpha}{N} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

С обзиром да је

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1,$$

Систем једначина можемо записати и као

$$(p_1, p_2, ..., p_N)^T = P(p_1, p_2, ..., p_N)^T.$$

4.1 Решавање система из PageRank-a

Најпопуларнији начин решавања PageRank проблема користи итеративну методу која налази највећу сопствену вредност и њој одговарајући сопствени вектор. Погледајмо ближе ову методу.

Нека је матрица димензија и нека важе следећа тврђења:

1. Сопствена вредност највећег модула матрице је јединствено одређена. Притом, обележимо сопствене вредности са $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ тако да важи

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$$

2. Постоји скуп линеарно независних јединичних сопствених вектора $\{u^{(1)}, ..., u^{(n)}\}$. Притом, означимо ове векторе тако да важи $Au^{(i)} = \lambda_i u^{(i)}$ за свако i.

Почевши од иницијалног вектора $x^{(0)}$, можемо написати

$$x^{(0)} = a_1 u^{(1)} + a_2 u^{(2)} + ... + a_n u^{(n)}.$$

Даље итерирамо на вектору $x^{(0)}$

$$\begin{aligned} A^k x^{(0)} &= a_1 A^k u^{(1)} + ... + a_n A^k u^{(n)} = a_1 \lambda_1^k u^{(1)} + ... + a_n \lambda_n^k u^{(n)} \\ &= \lambda_1^k \Big\{ a_1 u^{(1)} + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k u^{(2)} + ... + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k u^{(n)} \Big\}. \end{aligned}$$

С обзиром да је за свако i

$$\frac{|\lambda_i|}{|\lambda_1|} < 1$$

добијамо да за свако i

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|\lambda_i|}{|\lambda_1|} = 0$$

и закључујемо

$$A^k x^{(0)} \approx a_1 \lambda_1^k u^{(1)}$$

Да бисмо апроксимирали $u^{(1)}$ уводимо нормализатор у итерацију

$$r_{k+1} = \frac{A^{k+1} x^{(0)}}{||A^k x^{(0)}||_2}$$

да бисмо добили

$$\lim_{k \to \infty} r_{k+1} = \lim_{k \to \infty} \frac{a_1 \lambda_1^{k+1} u^{(1)}}{||a_1 \lambda_1^k u^{(1)}||_2} = \lambda_1 u^{(1)}.$$

Испоставља се да је за PageRank највећа сопствена вредност матрице P једнака 1 и да је њој одговарајући сопствени вектор у нормализованом облику PageRank вектор. Највише процесорског времена при извршавању ове методе троши се на израчунавање прозвода матрица и вектора. Брзина конвергенције метода зависи од односа $|\lambda_2|/|\lambda_1|$. Хавеливала и Камвар нашли су горње ограничење за $|\lambda_2|$

$$|\lambda_2| \leq \alpha,$$

дакле, метод конвергира брзином α. Узимајући $\alpha = 0.85$ итеративна метода конвергира за 50 итерација на ланцу Маркова који садржи 80 милиона страница.

5

Коришћен код у програму *R*

Доле наведена је функција написана у програмском језику *R*. Ова функција графички представља зависност бројности популације од времена у зависности од параметара дефинисаних у подпоглављу *Примена непрекидних ланаца Маркова у проучавању демографских промена.*

```
puasonovproces<-function(t,lambda,mi, dt, a)
{
k=0
s=0
S=c(0)
vreme=dt
T=c(0)
l = 1-2.717218281828^(-(lambda*0+a)*dt)
m = 1-2.717218281828^(-mi*0*dt)

while(vreme<t)
{
k=s
l = 1-2.717218281828^(-(lambda*s+a)*dt)
m = 1-2.717218281828^(-mi*s*dt)
pom=runif(1)

if(pom<l) {
s=s+1
}
pom2=runif(1)

if(pom2<m){
s=s-1
}

if(s<0){
s=0
}
```

```
T=c(T,vreme)
S=c(S,(k*vreme/dt+s)/(vreme/dt+1))
vreme=vreme+dt
}

plot(T,S,type="s")
return(S)
}
```

Литература

[1] Kemeny, John G., and James Laurie Snell. *Finite markov chains. Vol. 356.* Princeton, NJ: van Nostrand, 1960.

[2] Isaacson, Dean L., and Richard W. Madsen. *Markov chains, theory and applications.* Vol. 4. New York: Wiley, 1976.

[3] W. N. Venables, B. D. Ripley. *Modern Applied Statistics in S.* Springer books

[4] Wai-Ki Ching, Ximin Huang, Michael K. Ng, Tak-Kuen Siu. *Markov Chains, Second edition.* Springer books

[5] Venables, William N., and Brian D. Ripley. *Modern applied statistics with S-PLUS.* Springer Science Business Media, 2013.

[6] E. T. Jaynes. *Probability Theory.* Cambridge Unversity Press

[7] Purohit, Sudha G., Shailaja R. Deshmukh, and Sharad D. Gore. *Statistics using R.* Alpha Science International, 2015.

[8] `http://www.statslab.cam.ac.uk/ rrw1/markov/M.pdf`

[9] `http://faculty.washington.edu/harin/markovchain_proofs.pdf`

[10] `https://www.math.ucdavis.edu/ gravner/MAT135B/materials/ch15.pdf`

[11] `http://www.columbia.edu/ ks20/stochastic-I/stochastic-I-MCII.pdf`

[12] `http://www.statslab.cam.ac.uk/ rrw1/markov/M.pdf`

[13] `https://en.wikipedia.org/wiki/Markov_chain`