Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из анализе са алгебром -

Теорија игара

Ученик
Милоје Јоксимовић 4а

Ментор
др Борислав Гајић

Београд, јун 2017.

Садржај

1

Увод

Теорија игара проучава математичке моделе конфликата и сарадње међу учесницима који имају сукобљене интересе. Њен циљ је да пронађе стратегије за играче, односно да се алгоритмом проучи конфликтна ситуација и одреде њихови избори тако да извуку највећу корист из ситуације.

Игру посматрамо као ситуацију делимичног или потпуног конфликта, а они који доносе одлуке су играчи. Сва правила која одређују ток игре и понашање играча представљају игру.

Примена теорије игара није строго математичка, већ се користи и у другим наукама као што су економија, биологија, психологија, политичке науке, компјутерске науке, итд. Сваког играча сматрамо рационалним и интелигентним, односно да доноси своје одлуке да му добитак буде највећи могући као и да је свестан последица свог избора и свестан је да и остали играчи размишљају исто као и он. Такође, подразумевамо да играча занима само просечан добитак, што на први поглед није мала претпоставка, мада узимајући у обзир вредности које се улажу, на основу теорије добитка, претпоставка је разумна. Теорија добитка укратко каже да под оваквом претпоставком играч суди о добитку само на основу просечног добитка.

Идеја овог рада је да упозна читаоца са приступом решавања одређених игара и представи одређене игре. Рад ће се претежно бавити играма у којима учествују два играча, док ће игре са више играча због комплексније анализе бити мање покривене. Све игре које су поменуте, су игре са потпуном информацијом које ћемо детаљније дефинисати у одељку 1.2 овог рада. Такође, осврнуће се и на примену теорије игара у другим областима.

1.1 Основни појмови

Чиста стратегија представља одређену опцију играча, док употребу сваке од чистих стратегије са одређеном вероватноћом називамо мешовитом стратегијом. Чисту стратегију можемо посматрати као могући потез у одређеном моменту у игри. У наставку рада под стратегијом ћемо подразумевати чисту стратегију.

Најједноставнији облик представљања игре је облик нормалне форме. Игра нормалне форме је представљена са n непразних скупова, $X_1, X_2, ..., X_n$, и функцијама са реалним вредностима дефинисаним на $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, $u_i(x_1, x_2, ...x_n)$, где X_i садржи све стратегије играча i, где $i \in \{1, 2, ..., n\}$, а $u_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ представља добитак играча i, ако играчи изаберу стратегије $x_i \in X_i$. Функцију u_i називамо функцијом добитка играча i. Постоји и екстензивни облик представљања игре у облику графа, али нећемо га користити у овом раду.

1.2 Подела игара

Игре делимо у зависности од више фактора. Главне поделе су у односу на број играча, стратегија, врсту функције плаћања, међусобни однос играча и информисаност играча.

Према броју играча игре делимо на игре са два лица, три лица или игре са n лица. Ако не постоје два играча не постоји ни конфликт ни сарадња. Док ако постоји више од два играча у игри могуће је стварање коалиција, односно договарање између више играча при одабиру стратегије.

Уколико је број играча коначан, као и број стратегија сваког играча, игру називамо коначном. У супротном игра је бесконачна.

Према врсти функције плаћања игре делимо на игре са нултом сумом и игре са ненултом сумом. Игре са нултом сумом су оне у којима је укупан добитак једног или више играча у збиру исти као губитак осталих играча. Другим речима, у играма нулте суме је збир функција плаћања једнак нули. Типичан пример овакве игре је покер. С друге стране за игре са ненултом сумом не важи да је збир функција плаћања нула и типични примери су затвореничка дилема и игра кукавице.

Зависно од међусобног односа учесника игре делимо на кооперативне и некооперативне. Кооперативне игре представљају игре у којима постоји међусобна комуникација пре игре међу играчима било у облику коалиције, уцене или обећања. Појам уцене и обећања нема потребе додатно објашњавати. У некооперативним играма не постоји било који вид комуникације пре игре и сви играчи делују независно од других фактора изван правила игре.

За игру кажемо да је игра потпуне информације ако сви играчи знају све могуће стратегије свих играча, све могуће завршетке, колико свака комбинација стратегија играча утиче на завршетак и увид у то која је стратегија најбоља за сваког играча. Код таквих игара одлуке код играча су истовремене. У супротном игру називамо игром непотпуне информације и у њима су одлуке наизменичне.

1.3 Историјат

Дискусија о теорији игара се појавила доста пре напретка модерне математичке теорије игара. Прво познато проучавање игре је учињено 1713. године, када је Џејмс Волдгрејв анализирао карташку игру у два играча. Он тада приказује решење употребом *minimax* стратегије, иако она тада није била позната.

Касније, у 19. веку Курно и Бертран разматрају моделе дуопола, који се односе на анализу производње и цена у економији.

Немачки математичар Ернстје 1913. године објављује књигу "О употреби теорије скупова у теорији шаховске игре". Моменат када теорија игара настаје као засебно поље за изучавање је 1928. година када Џон фон Нојман објављује рад "Ка теорији друштвених игара" у коме дефинише неке од појмова теорије игара. Рад је испраћен књигом "Теорија игара и економско понашање", коју је објавио заједно са економистом Оскаром Моргенштерном. У књизи је приказано да се многи проблеми из економије могу моделирати помоћу игара. Нојман доказује *minimax* теорему.

Након Другог светског рата теорија игара доживљава екстремну експанзију. Игра, "Затвореникова дилема" коју су смислили Мерил Флад и Мелвин Дрешер појављује се 1950. године. Годину дана касније Џон Неш доказује постојање стратешке равнотеже у свакој некооперативној игри са ненултом сумом и n играча. У његову част стратешка равнотежа је названа Нешова равнотежа. Због идеја које су допринеле развоју теорије игара и анализи економских појава он 1994. добија Нобелову награду за економију.

2

Некооперативна теорија игара

Прва тема коју ћемо пробати што детаљније да анализирамо у овом поглављу биће игре нулте суме. Након тога ћемо анализирати игре ненулте суме. Како ће већина игара бити са 2 играча, обележаваћемо их са I и II за првог, односно другог играча.

2.1 Игре нулте суме

Ради лакшег обележавања у овом делу ћемо игру представљати у облику (X, Y, G) где X садржи скуп стратегија играча I, Y скуп стратегија играча II, а G представља матрицу $u_1(x, y)$ из одељка 1.1 овог рада. Другим речима, G представља матрицу $|X| \times |Y|$ која у (x, y) где $x \in X$ и $y \in Y$ представља вредности добитка играча I за изабране стратегије x и y. Одавде је јасно да је добитак играча II једнак $-G^T$, јер је из дефиниције игре нулте суме за 2 играча $u_2(y, x) = -u_1(x, y)$, за сваку $x \in X$ и $y \in Y$.

Почећемо са анализирањем игре "Пар и непар". Играчи I и II бирају између бројева 1 и 2. Уколико је збир одабраних бројева, S, паран I губи S новчића, док у случају да је непаран добија S новчића. Прво ћемо представити игру у нормалној форми. Назовимо матрицу којом представљамо игру G и то ћемо надаље користити као устаљену ознаку.

$$G = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

На први поглед се можда не чини да неки од играча има победничку стратегију. У ствари, I има начин да себи осигура добитак. Приметимо да константно бирање једног од бројева 1 и 2 не може осигурати добитак играчу I, јер II може да предвиди после неког времена потез и одабере број исте парности. Када причамо о добитку, подразумевамо да се игра довољно пута. Сада нам је јасно интуитивно да играч I треба да узима некад 1, некад 2. Међутим, колико често треба да одабере 1, а колико често 2? Анализирајмо случај да I бира 1 са вероватноћом $\frac{3}{5}$, а 2 са вероватноћом $\frac{2}{5}$. У случају да II одабере 1 просечни добитак I је $(-2) \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = 0$. У супротном је просечни добитак $3 \cdot \frac{3}{5} + (-4) \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$. Дакле, у случају да II бира 1, I остаје на нули и није себи осигурао добитак. Најоптималније за I је да нађе вероватноћу p којом треба да одабере 1, односно $1-p$ којом треба да одабере 2, тако да ма шта II одабере има увек исти просечни добитак. Нађимо то p. У случају да II бира 1 просечан добитак је $p \cdot (-2) + (1-p) \cdot 3$, док у случају одабира 2 износи $p \cdot 3 + (1-p) \cdot (-4)$. Изједначавањем ова два добитка добијамо да је $p = \frac{7}{12}$. Сада је просечни добитак играча I: $\frac{7}{12} \cdot (-2) + (1 - \frac{7}{12}) \cdot 3 = \frac{1}{12}$. Оваква стратегија која омогућава исте просечне добитке ма шта противник уради назива се стратегија изједначавања. Сада се поставља питање може ли I да има већи добитак? Одговор је не, ако II игра како треба. Користећи исти принцип II мозе да минимизира свој губитак бирајући 1 са вероватноћом $\frac{5}{12}$. Највећи добитак који I може увек да оствари зовемо вредност игре, $V(G)$, и у овом случају износи $\frac{1}{12}$. Ако је та вредност једнака нули кажемо да је игра фер. С друге стране, принцип којим одређујемо како долазимо до те вредности зове се *minimax* стратегија о којој ће бити више речи у наставку.

Уведимо сада појам превојне тачке матрице.

Дефиниција 2.1.1. Превојна тачка матрице G је поље те матрице a_{ij} за које важи да је минимум i-тог реда и максимум j-те колоне.

Јасно је да бирањем чисте тактике i-тог реда I добија најмање a_{ij} док II губи највише толико бирањем j-те колоне. Дакле, бирањем тих чистих стратегија смо решили игру чија је вредност превојна тачка.

Пример 1. Наведимо пример превојне тачке:

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Како је 2 минимум другог реда и максимум друге колоне, закључујемо да је то превојна тачка у овој игри. Одавде закључујемо да оба играча треба да одаберу своју другу стратегију како би осигурали највећи могући добитак за себе.

Игре 2×2. Позабавимо се принципом решавања 2×2 матричних игара. У општем случају матрица изгледа овако:

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

Наравно при томе су a, b, c и d реални бројеви. Принцип решавања је следећи:

1. Проверимо да ли постоји превојна тачка.
2. Ако она не постоји, решавамо игру *minimax* стратегијом.

Нађимо начин решавања том стратегијом. Да би услов непостојања превојне тачке био испуњен за $a \geq b$, онда је $b < c$, па је $c > d$. Даље је $d < a$ и $a > b$. Другим речима за $a \geq b$ важи $a > b < c > d < a$. Због симетрије, у случају $a < b$ важи $a < b > c < d > a$.

Прво докажимо да је вероватноћа p заправо најбољи избор за играча I уколико важи да је добитак исти било да II одабере прву или другу колону, односно стратегију. Нека су $f_1 = p \cdot a + (1-p) \cdot d = (a-d)p + d$ и $f_2 = p \cdot b + (1-p) \cdot c = (b-c)p + c$

и $0 < p < 1$ добици у случају да II одабере i-ту стратегију. Пошто смо успоставили поредак међу бројевима a,b,c,d закључујемо да су $(a-d)$ и $(b-c)$ различитог знака, па линеарне функције f_1 и f_2 имају коефицијенте различитог знака. Фиксирајмо p које I бира. Права $y = p$ сече f_1 и f_2 у по једној тачки. Ако је p' вероватноћа у којој се секу ове две функције, за $p \neq p'$ једна од тачака пресека , $f_1(p)$ и $f_2(p)$, ће увек бити мање вредности од $f_1(p') = f_2(p')$. Дакле, ако II одабере ту стратегију за које је мања вредност просечног добитка од $f_1(p')$, добитак I ће бити мањи од те вредности. Одатле закључујемо да је највећи добитак I за $p = p'$ и тада је $V(G) = f_1(p')$.

Као при решавању игре "Пар непар" тражимо p, односно вероватноћу бирања прве стратегије за I тако да се за ма који избор II добије исти просечни добитак, потребно је пронаћи p тако да задовољава:

$p \cdot a + (1-p) \cdot d = p \cdot b + (1-p) \cdot c$

Једноставним рачуном добијамо да је $p = \frac{c-d}{a+c-b-d}$. Потребно је да је $0 < p < 1$. Из тога што превојна тачка не постоји или је $c < d$ и $a < b$ или је $c \geq d$ и уједно $a \geq b$, па закључујемо да је $p > 0$. Очигледно је $p = 1 - \frac{a-b}{a+c-b-d}$, а из малопређашње дискусије следи да је израз мањи од 1. Дакле, $0 < p < 1$.

Јасно је да вредност игре сада износи: $V(G) = \frac{ac-bd}{a+c-b-d}$ што је ако пажљиво погледамо $\frac{detG}{a+c-b-d}$. Слично, за II добијамо да је оптимална вероватноћа бирања прве стратегије $\frac{c-d}{a+b-c-d}$.

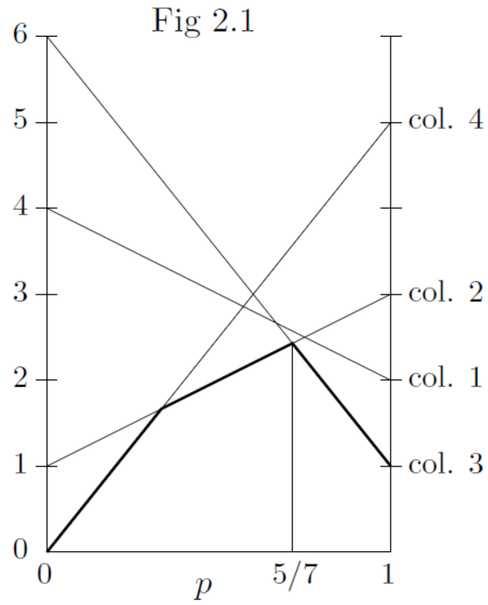
Игре $\mathbf{2 \times n}$ и $\mathbf{n \times 2}$. Следећа тема коју је логично дискутовати након решавања игара облика 2×2 је решавање игара облика $2 \times n$ и $n \times 2$. Јасно је да ћемо при решавању оваквих игара користити проширенију варијанту решавања коју смо користили у играма 2×2. Оне су углавном решиве графичком методом што ћемо управо приказати. Посматрајмо следећу игру:

Пример 2. $G = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Јасно је да овде не можемо користити идентичан принцип решавања као у случају 2×2, јер не знамо које функције треба изједначити међутим сличним размишљањем можемо наћи принцип решавања оваквих игара. Нађимо опет функције f_1, f_2, f_3, f_4 које представљају опет добитке за одређену вероватноћу p, $0 < p < 1$, којом I бира прву стратегију и II-тов одабир i-те колоне, односно стратегије. Оне износе $f_1 = 2 \cdot p + 4 \cdot (1-p) = -2p + 4$,$f_2 = 3 \cdot p + 1 \cdot (1-p) = 2p + 1$, $f_3 = 1 \cdot p + 6 \cdot (1-p) = -5p + 6$, $f_4 = 5 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = 5p$. Скицирајмо ове функције. За одређено p, I увек може да обезбеди себи најмање добитак од $min\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Те вредности на графику представљају доњу коверту игре.

Како I жели максимум од тих тачака, са графика закључујемо да је та тачка у пресеку друге и треће стратегије од II. Самим тим смо проблем свели на решавање игре $G' = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{smallmatrix}\right)$ за коју важи $V(G') = \frac{17}{7}$ и $p = \frac{5}{7}$, па је оптимална стратегија за I $(\frac{5}{7}, \frac{1}{7})$. Даље, оптимална стратегија за II у G' је иста као за I, па је за G његова оптимална стратегија $(0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0)$.

Аналогно решавамо и игре облика $n \times 2$.



Фигуре 2.1: Доња коверта је подебљана.

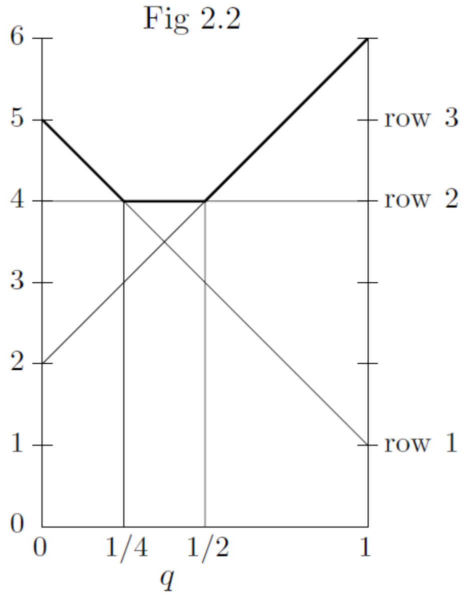
Пример 3. $G = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

Њен график је на слици 2.2 и на њему нас занима, анолагно са случајем $2 \times n$, горња коверта игре и тачка у којој је испуњен њен минимум, док је у претходној игри био потребан максимум доње коверте:

Занимљива ствар коју примећујемо на графику прве посматране игре је да колона1 не утиче на доњу коверту, односно потпуно би исто било као да ње нема у графику. Кажемо да је она доминирана стратегија и управо појам доминације је следећи који ћемо објаснити.

Дефиниција 2.1.2. Кажемо да i-ти ред игре $G = (a_{ij})$ доминира k-ти ред уколико важи $a_{ij} \geq a_{kj}$ за свако j. У случају да важи строга неједнакост свуда, кажемо да i-ти ред строго доминира k-ти. За k-ти ред кажемо да је доминиран од i-тог, ако важи дати услов (односно строго доминиран ако важи строга неједнакост).

Све што I може да добије бирањем доминираног реда, може бар једнако постићи бирањем доминантног реда. Самим тим можемо избрисати доминирани ред из игре и нећемо променити вредност игре. Исто важи и за доминиране колоне, само што је знак доминације обрнут, с обзиром да су то стратегије играча II. С друге стране, њиховим уклањањем ако нису строго доминирани може се изгубити оптимална стратегија (увек ће преостати бар још једна). У случају уклањања строго доминираних стратегија скуп оптимланих стратегија остаје непромењен. Особине уклањања важе



Фигуре 2.2: Горња коверта је подебљана.

и ако постоји мешовита стратегија за коју више редова (колона) доминирају k-ти ред (колону). Односно, ако за скуп $p_{i_1}, p_{i_2}, ...p_{i_l}$ важи $p_{i_1}a_{i_1j} + p_{i_2}a_{i_2j} + \cdots + p_{i_l}a_{i_lj} \geq a_{kj}$ за $j = 1, 2...$ и $p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots p_{i_l} = 1$ и наравно бројеви $i_1, i_2, \cdots i_l$ су међусобно различити. Конкретно, у примеру 2 важи да колоне 2 и 3 доминарају колону 1 са вероватноћама по $\frac{1}{2}$. Позабавимо се уклањањем редова (колона) у играма.

Пример 4. $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Друга колона стриги доминира трећу, па сводимо матрицу на:

$G' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Сада је први ред строго доминиран од стране трећег (обратимо пажњу да то није случај у оригиналној матрици) и добијамо следећу ситуацију:

$G'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Како не постоји превојна тачка ове иге, према изведеној формули знамо да је $V(G'') = \frac{7}{4}$ и стратегија за први ред за I износи $\frac{3}{4}$, док за прву колону играча II износи $\frac{1}{4}$, па су оптималне стратегија за I и II: $(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ и $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0)$, редом.

Следеће је уклањање мешовитим стратегијама.

Пример 5. $G = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Друга колона је доминирана од стране прве и друге са вероватноћама од по $\frac{1}{2}$. Њеним уклањањем добијамо игру:

$G' = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

Сада је други ред доминиран од стране првог и трећег са вероватноћама $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, редом. Следећа добијена игра је:

$G'' = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

Како не постоји превојна тачка, знамо да је $V(G) = V(G'') = \frac{54}{12} = \frac{9}{2}$.

Коначне игре. Следеће је решавање игара $m \times n$ и то је тема коју ћемо анализирати. Да бисмо то урадили морамо прво да дефинишемо одређене појмове.

Нека је игра означена са $G = (a_{ij})$ и нека је облика $m \times n$. Њу одређују следеће значајне ставке. Скупови $X = \{1, 2, ...m\}$ и $Y = \{1, 2, ...n\}$ које представљају опције I и II, редом. Означићемо скуп $X^* = \{p = (p_1, p_2, ..., p_m)^T : p_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m; \sum_{i=1}^{m} p_i = 1\}$ и он представља све мешовите стратегије играча I. Аналагно означимо и све мешовите стратегије II са $Y^* = \{q = (q_1, q_2, ..., q_n)^T : q_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots n; \sum_{i=1}^{n} q_i = 1\}$. То је увод што се тиче обележавања.

Најбољи одговори. Нека је II одабрао произвољну колону са вектором вероватноће q. Очекивани добитак играча I износи:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = (Gq)_i$, i-та компонента вектора Gq (1)

Слично, ако I одабере $p \in X^*$ и II одабере j-ту колону онда је просечан добитак I:

$\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} = (p^T G)_j$, j-та компонента вектора $p^T G$. (2)

Генералније, ако I одабере $p \in X^*$ и II одабере $q \in Y^*$ просечан добитак I је:

$\sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j) p_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j = p^T G q$ (3)

Претпоставимо да II бира $q \in Y^*$. Тада I бира ред i тако да максимизује (1) или, еквивалентно, $p \in X^*$ да максимизује (3). Просечан добитак I је:

$\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \max_{p \in X^*} p^T G q$. (4)

Објаснимо зашто важи једнакост у претходном реду. Лева стране је максимум од $p^T G q$ у односу на $p \in X^*$, а како је $X \subset X^*$ то је лева страна мања или једнака од десне. С друге стране, пошто је (3) просек вредности из (1), то је десна страна мања или једнака од максимума из (1), односно од леве стране.

Свака стратегија за коју се достиже максимум се зове најбољи одговор или Бајесова стратегија за I против стратегије q. Сваки ред који постиже максимум у (1) је чиста Бајесова стратегија и она увек постоји у коначним играма за свако $q \in Y^*$.

Слично дефинишемо и Бајесову стратегију за II. Ако се зна да ће I одабере одређену стратегију, $p \in X^*$, онда ће II да одабере колону j која минимизује (2), односно $q \in Y^*$ које минимизује (3). Тада ће просечан добитак II бити:

$$\min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i = \min_{q\in Y^*} p^T Gq \ (5)$$

Било које $q \in Y^*$ које задовољава минимум је Бајесова стратегија за II против p.

Бирање најбољих одговора је посебан начин играња игре. Играч треба да процени стратегију коју ће противник да одабере и затим искористи најбољи одговор. Међутим, то предвиђање није увек једноставно.

Горња и доња вредност игре. Претпоставимо да II мора да објави свој избор мешовите стратегије $q \in Y^*$ пре него што I направи избор. Ово чини, наизглед, игру у корист I. Ако II одабере q, јасно је да ће I одабрати Бајесову стратегију против q и II би изгубио вредност (4) у просеку. Зато ће II одабрате q које минимизује (4). Минимум од (4) за свако $q \in Y^*$ је горња вредност игре и обележава се са $\overline{V}$

$$\overline{V} = \min_{q\in Y^*} \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j = \min_{q\in Y^*} \max_{p\in X^*} p^T Gq \ (6)$$

Свако q које задовољава минимум зове се *minimax* стратегија за II. Она увек постоји у коначним играма и $\overline{V}$ је најмањи просечни губитак за II шта год I да изабере.

Слична анализа се може извести и када играч I објави своју тактику пре почетка игре. Ако I одабере p, онда ће II одабрати колону са најмањим просечним добитком, односно $q \in Y^*$ да минимизује (5). Имајући у виду да је (5) просечан добитак за I ако изабере p, то он бира такво p да је тај добитак максималан. На тај начин постиже просечан добитак од:

$$\underline{V} = \max_{p\in X^*} \min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} = \max_{p\in X^*} \min_{q\in Y^*} p^T Gq. \ (7)$$

Вредност $\underline{V}$ представља доњу вредност игре и представља минималан добитак који I може да оствари без обзира на II. Свако $p \in X^*$ које задовољава максимум у претходној једначини зове се *minimax* стратегија за I и она такође увек постоји у коначним играма.

Лема 2.1.1. Доња вредност игре је мања или једнака од доње, односно $\underline{V} \leq \overline{V}$.

Јасно је да I може да обезбеди себи бар $\underline{V}$. У том случају, губитак II не може бити мањи од тога, па је онда то случај и за најмањи губитак,$\overline{V}$, па је $\underline{V} \leq \overline{V}$.

Ако је $\underline{V} < \overline{V}$, просечан добитак би требао да буде између $\underline{V}$ и $\overline{V}$, јер очигледно I може да оствари најмање $\underline{V}$, а II може да га спречи да оствари више од $\underline{V}$.

Дефиниција 2.1.3. У случају да је $\underline{V} = \overline{V}$ кажемо да вредност игре постоји и да износи $\underline{V}$, односно $\overline{V}$ или у заједничкој ознаци само $V(G)$ или V. У том случају *minimax* стратегије зовемо оптималне стратегије.

Minimax теорема. Свака коначна игра са нултом сумом у два играча има вредност и постоје оптималне стратегије за оба играча.

Последица 1. Приметимо да из ове теореме можемо закључити да је потпуно небитно да ли ће играч објавити своју стратегију пре почетка игре.

Последица 2. Занимљива последица је и то да ако посматрамо игре $G = (a_{ij})$ и $G' = (ca_{ij} + b)$, где је $c > 0$, а b произвољан реалан број, тада важи да је $V(G') = cV(G) + b$ при чему *minimax* стратегије за оба играча су исте у G и G'.

2.2 Игре генералне(ненулте) суме

За разлику од игара нулте суме, у играма ненулте суме не важи да победник или победници односе цео улог. Самим тим је анализирање оваквих игара комплексније. Као и до сада, бавићемо се играма са 2 играча.

Када посматрамо овакве игре, њих је такође могуће представити у матрици, само што ће свако поље матрице одређено врстом x и колоном y, заправо бити уређен пар чији је први члан $u_1(x, y)$, а други $u_2(x, y)$ где u_1 и u_2 представљају функције добитака играча I и II, редом, док $x \in X$ и $y \in Y$ представљају чисте стратегије за које су се определили играчи. У случају игара са два играча, можемо поделити игру на две матрице, $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, где оне представљају добитке једног, односно другог играча при изборима i-тог реда и j-те колоне.

Најпознатији пример овакве игре је, сигурно, "Затвореникова дилема". У складу с тим, то ће бити прва игра генералне суме коју ћемо анализирати.

Затвореникова дилема. Двоје осумњичених је добило казну од по годину дана због поседовања оружја. Полиција је сигурна да су они опљачкали банку, али нису успели да пронађу довољно доказа да би их осудили. Зато се осумњиченима нуди погодба. Ако само један призна пљачку допуштајући тиме хапшење другог оптуженог, он ће бити пуштен на слободу, док ће његов партнер бити осуђен на двадесет година. У случају да оба осумњичена признају добијају казне од по пет година. У случају да ниједан не проговори, казне им остају по годину дана због поседовања оружја.

$$G = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,-1) & (-20,0) \\ (0,-20) & (-5,-5) \end{pmatrix} \end{array}$$

Овде смо ћутање обележили као стратегију 1, а признавање као стратегију 2. Одредимо прво стратегију за I, а након тога и за II. Ако I зна да ће II да одабере ћутање њему је боље да призна и буде пуштен на слободу, него да и он ћути и добије годину дана у затвору. С друге стране, ако I зна да ће II одабрати признање, за I је опет боље да призна и он, јер ће тако добити казну од пет уместо од двадесет година затвора. Закључујемо да је за I боље да призна у сваком случају. Јасно је да исту анализу можемо применити и за II. Дакле, најбоље за оба гирача је да признају, иако је случај када обоје ћуте свеукупно бољи. Проблем је што би мењањем избора стратегије сваки од играча могао себи да побољша ситуацију.

Модел ове игре има примену у економији. Када две фирме треба да одлуче да ли да повећавају производњу одређеног артикла(истог), имају опције да то ураде или не. У случају да једна компанија повећа производњу, а друга не, њој се профит осетно повећава, док ако обе компаније одлуче да повећају производњу, профит им остаје исти као и у случају да производња остане на истом.

Осврнимо се сада на најбоље одговоре и доминацију које смо споменули у играма са нултом сумом. Јасно је да исте дефиниције могу да се примене при чему посматрамо добитке II одвојено у потпуности од добитака I. Међутим, и даље се исти принципи рачунања користе, као што је био случај у играма нулте суме.

Нивои безбедности. Концепт игара са нултом сумом који проналази значајну примену у играма се генералном сумом су безбедносни нивои, односно добици које играчи могу себи да обезбеде у просеку. У играма са два играча облика $m \times n$ где су A и B подељене матрице добитака за I и II, редом, I себи може да обезбеди просечни добитак од најмање:

$$v_I = \max_p \min_j \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} = V(A).$$

Ово се назива безбедносним нивоом I. По дефиницији је ово доња вредност игре A, па је по *minimax* теореми то заправо вредност игре A, па је $v_1 = V(A)$. Играч I може ово да обезбеди без обзира на матрицу добитака II, B. Стратегија p за коју се достиже једнакост називамо *maxmin* стратегијом за I.

Слично, безбедносни ниво за II је:

$$v_{II} = \max_q \min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = V(B^T).$$

Толико II може да обезбеди у просеку да добије. Свако q за које се достиже максимум је *maxmin* стратегија за II. Приметимо да је v_{II} вредност од B^T, а не од B. Разлог је то што смо вредност игре дефинисали као добитке играча који бира редове и губитак играча који бира колоне, а за B важи обрнути распоред. Да бисмо то разјаснили посматрајмо следећи пример:

Посматрајмо следећу игру: $G = \begin{pmatrix} (2{,}0) & (1{,}3) \\ (0{,}1) & (3{,}2) \end{pmatrix}$

Одавде можемо да видимо вредности A и B:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Из матрице A закључујемо да је *maxmin* стратегија за I $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ и безбедносни ниво је $v_I = \frac{3}{2}$. Из матрице B закључујемо да друга колона доминира прву. Играч II жели да максимизује своје добитке, па бирањем друге колоне гарантује ниво безбедности, $v_{II} = 2$, што је заправо $V(B^T)$, док је $V(B) = 1$.

Приметимо да ако оба играча користе своје *maxmin* стратегије, I добија само v_I, док II добија $3(\frac{3}{4}) + 2(\frac{1}{4}) = \frac{11}{4}$. С друге стране, ако I обрати пажњу на матрицу B закључиће да ће II врло вероватно изабрати другу колону због доминације, па би бирањем другог реда себи обезбедио добитак од 3 јединице, док би II завршио са $v_{II} = 2$. Добитак $(3, 2)$ је поприлично стабилан. Ако било који од играча верује да ће други одабрати другу стратегију, онда ће и он одабрати другу стратегију. То је један од главних приступа некооперативне теорије игара, где се такав пар стратегија зове стратешка равнотежа о којој ће бити више речи касније. Следећа занимљива игра коју ћемо анализирати је "Борба полова", која је модел уобичајеног животног конфликта.

Борба полова. Момак и девојка су олучили да изађу. Међутим, не могу да се договоре где. У исто време се изводи представа на коју би девојка желела да оде, као и фудбалска утакмица која је момкова жеља. Ако оду на различите догађаје биће једнако незадовољни, јер нису једно са другим.

$$G = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} (2{,}1) & (0{,}0) \\ (0{,}0) & (1{,}2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Овде је играч I момак, а II девојка и 1 представља утакмицу, док 2 представља одабир представе. Одредимо матрице A и B.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Одавде видимо да су безбедносни нивои за играче $v_I = v_{II} = \frac{2}{3}$. $Maxmin$ стратегија за I је $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, док је за II $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Стратешка равнотежа. Подсетимо се обележавања из увода овог рада. Стратешку форму игре представљамо преко n непразних скупова $X_1, X_2, ...X_n$ где X_i представља скуп чистих стратегија играча i, и помоћу функција $u_1, u_2, \cdots, u_n$ на $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, где $u_i(x_1, x_2, ...x_n)$ представља функцију добитка играча i где играчи бирају чисте стратегије $x_1, x_2, \cdots x_n$ и $x_j \in X_j$, $j = 1, 2 \cdots n$

Дефиниција 2.2.1. Вектор чистих стратегија, $(x_1, x_2, ...x_n)$ где $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, ...n$ зове се чиста стратешка равнотежа ако за свако $i = 1, 2, ...n$ и $x \in X_i$ важи:

$$u_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots x_n) \geq u_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots x_n)$$

Оно што нам каже ова дефиниција је да у случају да сви играчи осим i одреде своје стратегије унапред, најбољи одговор који i може да пружи је x_i. Другим речима, одређени избор стратегија је чиста стратешка равнотежа ако сваки играч користи најбољи одговор на стратегије осталих играча.

Објаснимо сада принцип којим можемо да пронађемо све чисте стратешке равнотеже у играма са два играча. Посматрајмо следећу игру:

$$G = \begin{pmatrix} (1{,}2) & (2{,}1) & (1{,}0) \\ (2{,}1) & (0{,}1) & (0{,}0) \\ (0{,}1) & (0{,}0) & (1{,}2) \end{pmatrix}$$

Пролазимо кроз сваку чисту стратегију коју може сваки од играча да одабере. Онда одредимо најбољи одговор(одговоре) на ту стратегију и у матрици обележимо звездицом добитак употребом најбољег одговора. Она поља која садрже звездице уз исплате оба играча су стратешке равнотеже.

Ако I одабере:

1. Први ред. Најбољи одговор за II је прва колона, у ознаци поље постаје $(1, 2^*)$.

2. Други ред. Најбољи одговор за II су прва и друга колона, због истог добитка. У ознаци поља постају $(2, 1^*)$ и $(0, 1^*)$.

3. Трећи ред. Најбољи одговор за II је трећа колона, у ознаци поље постаје $(1, 2^*)$.

Ако II одабере:

1. Прву колону. Најбољи одговор за I је други ред, у ознаци поље постаје $(2^*, 1^*)$.

2. Другу колону. Најбољи одговор за I је први ред, у ознаци поље постаје $(2^*, 1)$.

3. Трећу колону. Најбољи одговор за I су трећи и први ред, због истог добитка. У ознаци поља постају $(1^*, 0)$ и $(1^*, 2^*)$.

Игра после ових провера постаје:

$$G = \begin{pmatrix} (1,2^*) & (2^*,1) & (1^*,0) \\ (2^*,1^*) & (0,1^*) & (0,0) \\ (0,1) & (0,0) & (1^*,2^*) \end{pmatrix}$$

Ова игра има две стратешке равнотеже и то су поља $i = 2, j = 1$, са вредностима $(2, 1)$ и $i = 3, j = 3$, са вредностима $(1, 2)$.

Обратимо пажњу да је у "Затворениковој дилеми" присутна само једна равнотежа, односно поље са добицима $(-5, -5)$. То смо само формализовали након познавања стратешкре равнотеже, иако смо исту дискусију спровели и без познавања стратешке равнотеже.

Игра кукавице Два момка се боре за наклоност девојке. Како би одлучили ко ће је питати да изађу, они играју следећу игру. Обојица седају у аутомобил и залећу се један према другом. У случају да тачно један од њих скрене, други добија право да пита девојку за излазак док први добија статус кукавице у друштву. С друге стране, ако обојица скрену, мања је срамота него да ниједан није скренуо, али и даље испадају кукавице, само у мањој мери. И у случају да ниједан од њих не скрене долази до судара, што је очигледно најгора опција по обојицу.

$$G = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} (-100,-100) & (1,-1) \\ (-1,1) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

У овој игри смо стратегијом 1 означили вожњу право, а стратегијом 2 смо означили скретање. Када извршимо исту анализу као у претходној игри добијамо следећу ситуацију:

$$G = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} (-100,-100) & (1^*,-1^*) \\ (-1^*,1^*) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Овде имамо две стратешке равнотеже. Јасно је да играч треба да направи процену како да се постави да би извукао равнотежу која њему одговара. Односно, ако се зна да му је противник изразито храбар, играч треба да скрене и обрнуто, у случају да је познато да му је противник кукавица, играч иако можда сам није толико храбар ће вероватно покушати да вози право у нади да ће противник скренути.

Следећа тема коју ћемо покрити је стратешка равнотежа, необавезно чиста стратешка равнотежа.

Нека је m_i број чистих стратегија које има играч i, односно то је кардиналност скупа X_i. Скуп свих мешовитих стратегија играча i обележимо са X_i^*. Нека су стратегије i-тог играча $X_i = \{1, 2, ..., m_i\}$. Нека играч i користи мешовиту стратегију $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{im_i}) \in X_i^*$ за $i = 1, 2, ..., n$. Тада је просечан добитак играча j:

$$g_j(p_1, p_2, ..., p_n) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} p_{1i_1} \cdots p_{ni_n} u_j(i_1, i_2, ..., i_n)$$

Сада можемо да дефинишиемо стратешку равнотежу која узима у обзир и мешовите стратегије.

Дефиниција 2.2.2. Вектор $(p_1, p_2, ..., p_n)$ где $p_i \in X_i^*$ за $i = 1, 2, ..., n$ зове се стратешка равнотежа ако за свако $i = 1, 2, ..., n$ и $p \in X_i^*$ важи:

$$g_i(p_1, p_2, ..., p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, ..., p_n) \geq g_i(p_1, p_2, ..., p_{i-1}, p, p_{i+1}, ..., p_n).$$

Свако p_i које задовољава једнакост је најбољи одговор играча i на мешовите стратегије осталих играча. Дакле, за комбинацију мешовитих стратегија кажемо да је стратешка равнотежа акко сваки играч користи најбољи одговор на мешовите стратегије осталих играча. Одавде јасно закључујемо да је чиста стратешка равнотежа специјалан случај стратешке равнотеже.

Питање које се поставило након увођења појма стратешке равнотеже је да ли она увек постоји. Одговор на ово питање је обезбедио Џон Неш који је 1951. године доказао да у свакој коначној игри са n играча постоји стратешка равнотежа. У његову част, стратешка равнотежа се често назива и Нешовом равнотежом.

3

Кооперативне игре

У некооперативним играма међу играчима нису постојали никакви обавезујући договори, уговори и сличне обавезујуће комуникације. Једини вид који је обавезивао играче је Нешова равнотежа, која је самоиндикујућа, односно играчима иде у корист да се придржавају Нешове равнотеже. С друге стране, у кооперативним играма постоје механизми који ван игре утврђују међусобне договоре међу играчима. Такви договори мењају игре у потпуности. На пример, у "Затворениковој дилеми" смо видели да је Нешова равнотежа достигнута када оба играча проговоре и издају овог другог. Међутим, ако би постојала међусобна комуникација, они би могли да постигну договор такав да ниједан од њих не ода другог и тада би оба играча завршила у бољој позицији него у некооперативној верзији игре.

Кооперативна теорија игара је подељена у две групе у зависности од тога да ли постоји механизам који преноси добитак једног играча на другог. Уколико постоји такав механизам, јединицу која се пребацује можемо сматрати новцем.

Остварљиви скупови вектора плаћања. Главна особина кооперативних игара је слобода играча да имају заједничку стратегију. То омогућава било какву комбинацију вероватноћа вектора плаћања. На пример у "Борби полова", момак и девојка могу да се договоре да баце новчић и у зависности од тога на коју страну падне оду на утакмицу или представу. Могли су то да ураде и у некооперативној верзији игре, али тада су могли да промене одлуку и након бацања новчића. Скуп вектора плаћања које играчи могу да остваре када сарађују назива се остварљив скуп. Када играчи могу да изврше плаћање са стране онда говоримо о преносивом добитку, док када то није случај, реч је о непреносивом добитку.

Када играчи сарађују у игри са два играча са матрицама $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ које су описане у некооперативним играма са генералном сумом, они могу да остваре добитак било које од mn тачака, (a_{ij}, b_{ij}) за $i = 1, 2, ..., m$ и $j = 1, 2, ..., n$. Они такође могу постићи било какву комбинацију мешања ових тачака. Скуп свих таквих добитака је конвексни омотач од тих mn тачака у равни. Без преносивог добитка, то су све могућности које играчи могу да постигну.

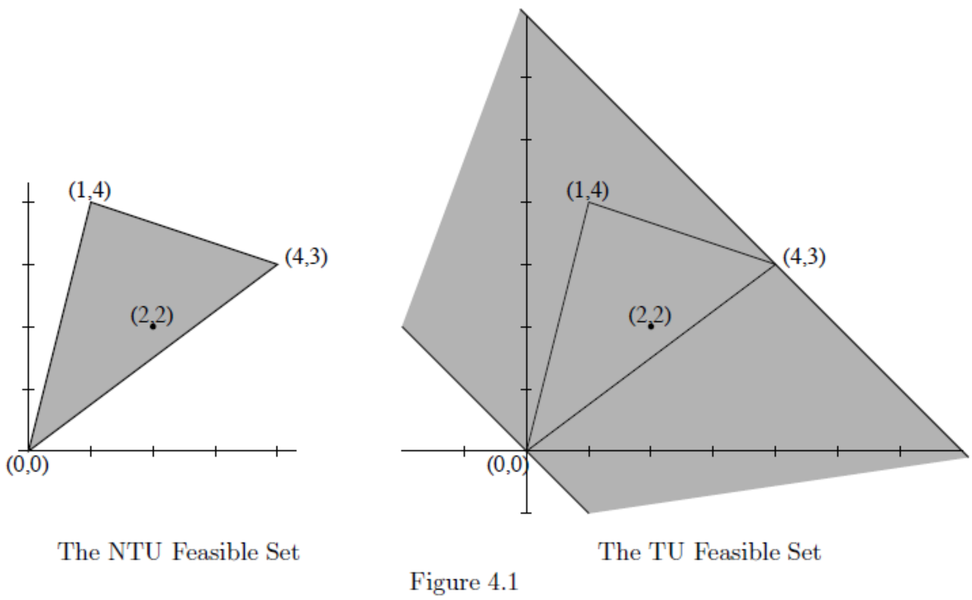
Дефиниција 3.0.1. Остварљив скуп плаћања непреносивог добитка је конвексни омотач mn тачака, (a_{ij}, b_{ij}) за $i = 1, 2, ..., m$ и $j = 1, 2, ..., n$

У случају да постоји пренос новца са стране, вектор плаћања, (a_{ij}, b_{ij}) се мења у вектор плаћања $(a_{ij} + s, b_{ij} - s)$ за реалан број s. У случају да је s позитиван представљен је пренос новца од II на I, док у случају да је s негативан представљен је пренос новца са стране, од I на II.

Дефиниција 3.0.2. Остварљив скуп плаћања преносивог добитка је конвексни омотач вектора облика $(a_{ij} + s, b_{ij} - s)$ за $i = 1, 2, ..., m$ и $j = 1, 2, ..., n$ где је s произвољан реалан број.

Као пример претходно уведених појмова посматрајмо следећу игру и графике које представљају скуп плаћања када је игра преносивог и непреносивог добитка. Лева слика представља игру са непреносивим, док десна представља игру са преносивим добитком.

Пример 6. $G = \begin{pmatrix} (4{,}3) & (0{,}0) \\ (2{,}2) & (1{,}4) \end{pmatrix}$



Фигуре 3.1: Осенчани су остварљиви скупови вектора плаћања.

Ако је договор у кооперативној игри постигнут, било да је она преносивог или непреносивог добитка, очекивано је да ниједан играч не може да постигне бољу ситуацију за себе, без да бар једном од преосталих играча ситуација постане лошија. Такав завршетак се назива Парето оптималан.

Дефиниција 3.0.3. За остварљив вектор плаћања, (v_1, v_2) кажемо да је Парето оптималан у случају да је једини вектор, (v_1', v_2') за који важи $v_1' \geq v_1$ и $v_2' \geq v_2$ заправо $(v_1', v_2') = (v_1, v_2)$.

У претходном примеру, Парето остварљиви завршеци за непреносиви добитак су вектори на правој, која спаја тачке $(1,4)$ и $(4,3)$. С друге стране, Парето оптимални завршеци у примеру где постоји преносиви добитак су вектори са праве која садржи тачку $(4,3)$ и има коефицијент правца -1.

У играма претпостављамо да постоји период пре почетка игре у ком се играчи договарају око заједничке стратегије, начина плаћања и шта се догађа ако не могу да дођу до договора. Тада се постављају претње међусобне које би наштетиле противнику. Ако играчи дођу до договора, може се претпоставити да је вектор плаћања Парето оптималан, јер би иначе играч предложио договор који ће њему донети већи добитак, а при томе неће наштетити другим играчима. Уз договор о преносу новца, сви играчи, како су рационални, ће пристати на промену вектора плаћања.

Споменуте претње ће играч користити само ако више штете неком од осталих играча него њему, али оне у суштини служе само да би обезбедиле поштену прерасподелу новца. Претпоставља се да ће играчи увек доћи до договора и да неће бити потребе за испуњењима претњи, јер се већи добитак може остварити сарадњом.

Решење игара са преносивим добитком за два играча. Ако играчи дођу до договора, логично је да ће остварити највећи могући заједнички добитак, σ,

$\sigma = \max_i \max_j (a_{ij} + b_{ij})$ и то је вектор плаћања који ће бити подељен међу њима.

Они ће се договорити да користе неки ред i_0 и колону j_0 за коју је $a_{i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} = \sigma$. Тај заједнички избор, (i_0, j_0) зове се кооперативна стратегија. Они такође морају да се договоре око финалног вектора плаћања, (x^*, y^*) који представља коначну расподелу добитка, па је $x^* + y^* = \sigma$. Таква подела захтева расподелу новца једног играча ка другом. Ако је $x^* > a_{i_0 j_0}$ то значи ће I примити плаћање са стране од II у износу од $x^* - a_{i_0 j_0}$. У случају да је $x^* < a_{i_0 j_0}$, то значи да ће II примити плаћање са стране од I у износу од $a_{i_0 j_0} - x^*$.

Претпоставимо сада да су играчи одабрали своје стратегије претње, p за I и q за II. Ако договор није постигнут, вектор плаћања постаје:

$D = D(p,q) = D(p^T Aq, p^T Bq) = D(D_1, D_2)$, где A и B представљају матрице добитака I и II редом, као и до сада.

Тај вектор плаћања се налази и у верзији игре са непреносивим добитком и назива се тачка несугласице или тачка претње. Онда када је одређена тачка несугласице, играчи морају да се сложе око тачке (x,y) на $x + y = \sigma$ која ће бити кооперативно решење. Јасно је да I неће прихватиити мање од D_1, а II мање од D_2, јер толико могу да остваре и ако не постигну договор. Када су одређене дате тачке несугласице, $(D_1, \sigma - D_1)$ и $(\sigma - D_2, D_2)$, играчи се договарају око тога коју тачку на тој дужи да одаберу. Матрице A и B више не улазе у разматрање када се доноси ова одлука. Средиште дужи се намеће као логичан компромис, јер ће оба играча подједнаку жртву имати ако не дође до договора. Према томе, дата тачка је:

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) = (\frac{\sigma - D_2 + D_1}{2}, \frac{\sigma - D_1 + D_2}{2})$

Одавде закључујемо да I жели да максимизује $D_1 - D_2$ док II жели да минимализује ту вредност. То је у ствари игра са нултом сумом, јер је: $D_1 - D_2 = p^T Aq - p^T Bq = p^T(A - B)q$. Нека су p^* и q^* оптималне стратегије за I и II, редом у игри $A - B$, и нека је δ вредност те игре: $\delta = V(A - B) = (p^*)^T (A - B) q^*$. Ако I користи p^* као своју претњу најбоље што II може да уради је да искористи q^*. Онда тачка несугласице постаје $D^* = (D_1^*, D_2^*) = D(p^*, q^*)$. Како је $\delta = D_1^* - D_2^*$ имамо да је решење са преносивим добитком заправо:

$\varphi^* = (\varphi_1^*, \varphi_2^*) = (\frac{\sigma+\delta}{2}, \frac{\sigma-\delta}{2})$.

Претпоставимо да су се I и II договорили око избора (i_0, j_0), где је $a_{i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} = \sigma$. Да би се остварила малопређасња исплата, D^*, потребно је плаћање са стране од II ка I у износу од $\frac{\sigma+\delta}{2} - a_{i_0 j_0}$ или у случају да је тај износ негативан, онда је плаћање од I ка II.

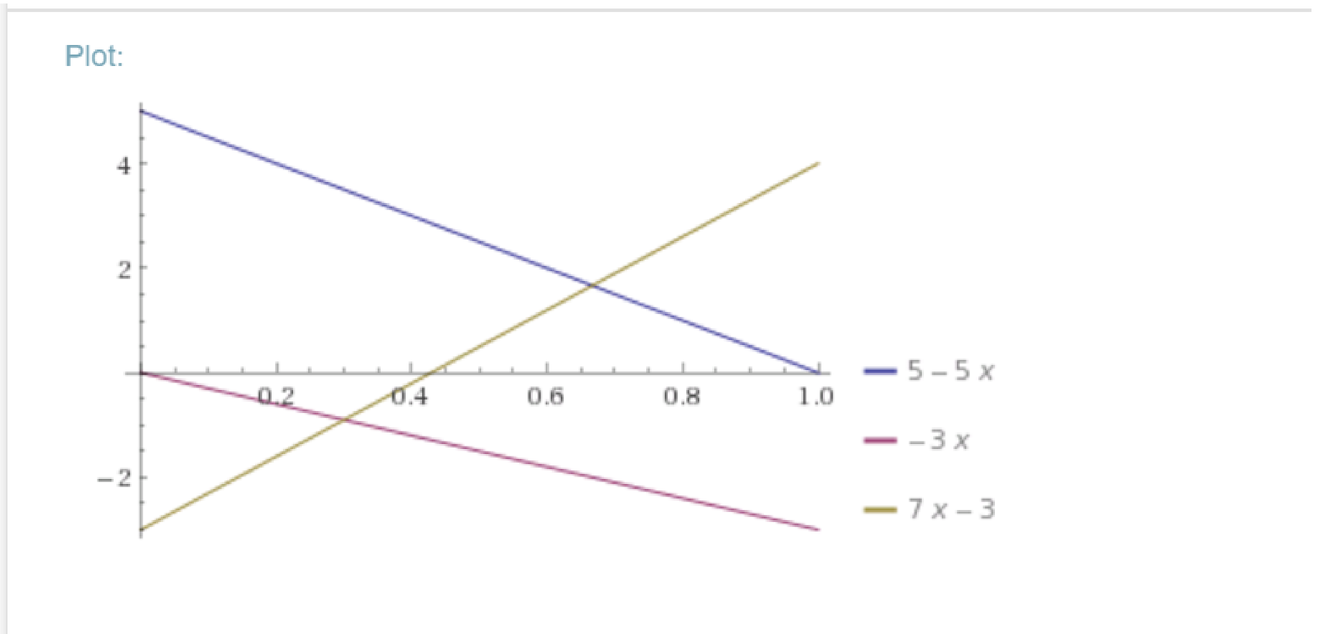
Пример 7. Посматрајмо игру :

$G = \begin{pmatrix} (0,0) & (6,2) & (-1,2) \\ (4,-1) & (3,6) & (5,5) \end{pmatrix}$

Одавде знамо и матрице A и B:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Максимум од $a_{ij} + b_{ij}$ се достиже у пољу $(2, 3)$ и $\sigma = 10$. Ако се договоре, одабраће други ред и трећу колону, међутим остало је да се договоре око исплате са стране. Посматрајмо игру нулте суме, $A - B$: $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ Лако одређујемо стратегије претње, $p^* = (\frac{3}{10}, \frac{7}{10})^T$ и $q^* = (0, \frac{3}{10}, \frac{7}{10})^T$ помоћу класичног начина решавања игара $2 \times n$.



Фигуре 3.2: На слици су функције које граде доњу коверту, као у делу када смо анализирали игре $2 \times n$.

Такође, лако одређујемо и $\delta = V\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-9}{10}$. Одавде знамо коначне добитке играча, и они износе:

$\varphi^* = (\frac{10-0.9}{2}, \frac{10+0.9}{2}) = (4.45, 5.45)$ и закључујемо да да би се сложили играчи на вектор плаћања $(5,5)$ потребно је извршити плаћање са стране од I ка II у износу од 0.45.

Можемо да одредимо и $D = (D_1, D_2)$, тачку несугласице:
$D_1^* = (p^*)^T Aq^* = 0.3(6 \cdot 0.3 - 0.7) + 0.7(3 \cdot 0.3 + 5 \cdot 0.7) = 3.41$
$D_2^* = (p^*)^T Bq^* = 0.3(2 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.7) + 0.7(6 \cdot 0.3 + 5 \cdot 0.7) = 4.31$
Одавде је јасно да $varphi \in D_1^* D_2^*$, јер је $D_2^* - D_1^* = 0.9 = \varphi_2^* - \varphi_1^*$.

Приметимо да у играма може да постоји више стратегија којима је σ збир добитака и да плаћање са стране зависи од тога која комбинација стратегија је одабрана. Исто тако, може постојати више тачака несугласица, јер може да постоји више оптималних стратегија у игри $A - B$.

Јасно је да исти принцип решавања игара може да се примени и у разним економским моделима где се компаније договарају око поделе новца поводом међусобне сарадње.

4

Закључак

Теорија игара, иако је била првобитно осмишљена за економске моделе она је нашла, због своје једноставне прилагодљивости и јединственог начина моделирања различитих ситуација, у разним сферама и области света каквог данас познајемо.

Многи конфликти из области политчких наука се могу моделирати теоријом игара. Било да су то ратни сукоби, одабир новог премијера условљен коалицијама или најобичније гласање грађана.

Такође је нађена и широка примена у биологији. Еволуција је поље које најбоље може бити представљено преко теорије игара, узимајући у обзир прилагођеност врсте околини и ресурсе којима располаже.

Ова област математике, поред већ огромне експанзије се очекује да доживи још већу популарност и развој него што је то случај до сада. Многи математичари се управо баве овом граном математике, јер је њена будућа примена неизбежна.

5

Литература

1. *Guillermo Owen*, *Game Theory*, *Academic press*, 1968. година
2. *Thomas S. Ferguson*, *Game Theory*, *University of California at Los Angeles*, *Second Edition*, 2014. година;
3. Душан Павловић, Теорија игара: Основне игре и примене, Факултет политичких наука Универзитета у Београду, Друго издање, 2015. година;
4. *https : //en.wikipedia.org/wiki/Gametheory*