Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из математике -

Семереди–Тротер теорема

Ученица:
Катарина Кривокућа IVд

Ментор:
Лука Милићевић

Београд, јун 2019.

Садржај

1

Увод

Намера овог рада је да покаже неколико тврђења из области комбинаторне геометрије, чији се докази ослањају на неке занимљиве и неочекиване методе и тврђења из различитих области математике, а нарочито на Семереди–Тротер теорему.

У овом раду нећемо показати првобитни доказ Семередија и Тротера [11] из 1983, већ доказ који је објавио Секели [10] 1997. Секели је овај проблем из области дискретне геометрије повезао са тврђењима о пресечном броју графа. Овај приступ даје доста краће и једноставније доказе од претходних.

Доказ неједнакости пресечног броја у графу, показан у другом поглављу, представља леп пример једне занимљиве комбинаторне технике, вероватносног метода, који је такође описан у том поглављу.

Поред теореме Семереди–Тротера, у трећем поглављу овог рада показаћемо неке њене последице. У неким од њих је природно приступити проблему применом ове теореме, али у другим, поготово у проблему сума и производа, одговарајућа конфигурација правих и тачака у равни није очигледна.

У последњем поглављу представљамо доказе два проблема које је Ердош [3] поставио 1946. у вези са растојањима између тачака у равни. Један приступ оваквим проблемима је постављање кружница са центрима у датим тачкама и неким одређеним полупречницима, јер је инциденција кружнице са центром у једној тачки и неке друге тачке еквивалентна томе да је растојање између те две тачке једнако полупречнику конструисане кружнице. Докази ова два тврђења имају сличну идеју као доказ Семереди–Тротер теореме, у смислу да се конфигурације тачака и кругова посматрају као графови и посматра се пресечни број посматраног графа.

1.1 Нотација

Сада ћемо увести нотацију за асимптотско понашање функције, коју ћемо користити у остатку рада.

Дефиниција 1.1.1. За реалне функције $f(x)$ и $g(x)$ кажемо да $f(x)$ припада $O(g(x))$ ако постоје константе c и x_0 такве да важи:

$$(\forall x > x_0)\, f(x) \leqslant c \cdot g(x)$$

и пишемо $f(x) = O(g(x))$.

Дефиниција 1.1.2. За реалне функције $f(x)$ и $g(x)$ кажемо да $f(x)$ припада $\Omega(g(x))$ ако постоје константе c и x_0 такве да важи:

$$(\forall x > x_0)\, f(x) \geqslant c \cdot g(x)$$

и пишемо $f(x) = \Omega(g(x))$.

Дефиниција 1.1.3. За реалне функције $f(x)$ и $g(x)$ кажемо да $f(x)$ припада $\Theta(g(x))$ ако постоје константе c и x_0 такве да важи да $f(x)$ припада $O(g(x))$ и $\Omega(g(x))$. Пишемо $f(x) = \Theta(g(x))$.

2

Пресечни број

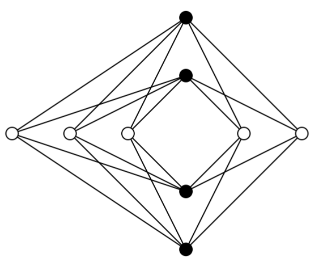
Интуитивно, пресечни број графа је најмањи могућ број пресека грана графа при његовом цртању у равни. Надаље ћемо за неки граф G овај број означавати са $cr(G)$. У појмовима ћемо овај број формално дефинисати.

Испоставља се да је веома тешко ограничити овај број. Асимптотска вредност му се не зна ни за једну класу графова, а камоли у општој форми.

Појам пресечног броја графа је први увео Пол Туран, у проблему познатом као Туранов проблем фабрике цигли. Туран је за време Другог светског рата био приморан да ради у фабрици цигли, где је, гурајући колица са циглама од фабрике до складишта преко мреже шина, приметио да је теже гурати колица на местима где се шине пресецају. Тада је поставио питање како се могу поставити шине, фабрике и складишта тако да се што мање шина пресеца. Формално, питање је који је пресечни број комплетног бипартитног графа.

Показано је да постоји цртање комплетног бипартитног графа $K_{m,n}$ за који важи $cr(K_{m,n}) \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$.

Поставимо m чворова на x осу тако да ни један није у координатном почетку и са леве и десне стране y осе има једнак број чворова (или се разликује за 1). Поставимо на сличан начин n тачака на y осу.



Слика 2.1: Пример цртања $K_{5,4}$ са најмањим познатим бројем пресека

Позната хипотеза тврди да је пресечни број комплетног бипартитног графа тачно овај, али још увек није доказано да је ова оцена оптимална.

У општем случају, једна од оцена за пресечни број графа, позната као лема о пресечном броју или неједнакост пресечног броја, даје нам доње ограничење овог броја. Показаћемо доказ за ту оцену касније у овом поглављу.

2.1 Појмови

У овом одељку ћемо увести појмове из теорије графова потребне за формално дефинисање пресечног броја, а потом ћемо га дефинисати. Такође ћемо увести и појмове и тврђења за доказивање неједнакости пресечног броја.

Дефиниција 2.1.1. **Прост граф** је онај граф у ком никоја два чвора нису повезана са више од једне гране и не постоји грана која повезује један чвор сам са собом.

Дефиниција 2.1.2. **Мултиграф** је онај граф у ком могу да постоје два чвора повезана са више грана и сме постојати грана која повезује чвор сам са собом. Број грана између два чвора у мултиграфу називамо **вишеструкошћу** гране између та два чвора.

Дефиниција 2.1.3. **Мост** је свака грана графа G чијим брисањем би се повећао број повезаних компоненти графа G.

Дефиниција 2.1.4. **Лук** је слика непрекидне инјективне функције $[0,1] \to \mathbb{R}^2$.

Дефиниција 2.1.5. **Цртање графа** је функција која пресликава сваки чвор графа у једну тачку равни, тако да никоја два различита чвора немају исту слику, и сваку грану графа пресликава у неки лук који повезује тачке у равни које одговарају чворова између којих је грана, тако да никоја два различита лука немају исту слику (у случају мултиграфа).

Дефиниција 2.1.6. **Пресек** је тачка заједничка за барем два лука, не рачунајући тачке које представљају слике чворова графа.

Дефиниција 2.1.7. **Пресечни број цртања графа** је број пресека посматраног цртања графа, где се пресек који је инцидентан са $k \geqslant 2$ лука броји $\binom{k}{2}$ пута. Дозвољено је да је пресечна вредност неког цртања графа буде $+\infty$
Напомена: За сваки граф постоји цртање са коначним бројем пресека, нпр. тачке у општој позицији и дужи између њих.

Дефиниција 2.1.8. Пресечни број графа је најмањи могући пресечни број цртања посматраног графа. Пресечни број графа G означавамо са $cr(G)$. Графове чији је пресечни број 0 називамо планарним.

Теорема 2.1.1 (Ојлерова формула)**.** За прост повезан планаран граф без мостова G са e ивица, v чворова, f пљосни, који формира c повезаних компоненти, важи:

$$v - e + f - c = 1.$$

Конкретно, важи $v - e + f \geqslant 2$.

Последица 1. За прост граф G са e ивица, $v \geqslant 3$ чворова без мостова важи:

$$e \leqslant 3v - 6.$$

Доказ. Сума броја ивица свих пљосни графа је $2e$, јер свака ивица припада тачно две пљосни (зато што граф нема мостове, а то су једине гране које припадају само једној пљосни), а сваку пљосан одређује барем 3 ивице, под условом да је $v \geqslant 3$.
Стога, $2e \geqslant 3f$, и убацивањем овога у Ојлерову формулу се добија:

$$e \leqslant 3v - 6.$$

□

Подсетник: За функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ кажемо да је конвексна ако важи:

$$(\forall x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R})\,(\forall t \in [0,1])\, f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2) \leqslant t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2).$$

Теорема 2.1.2 (Јенсенова неједнакост за очекиване вредности)**.** За случајну промењиву x и конвексну функцију f важи:

$$\mathbb{E}[f(x)] \geqslant f(\mathbb{E}[x]).$$

2.2 Вероватносни метод

Вероватносни метод (енг. probabilistic method) је комбинаторни алат чији је пионир Ердош. У основи, метод се заснива на томе да се постојање неке одређене комбинаторне структуре са одређеним својством не доказује тако што се пронађе конкретан пример, већ се доказује да „није да не постоји”. Ако желимо да докажемо да постоји нпр. граф са неким својством S, посматрајмо простор вероватоће у ком су сви графови елементарни догађаји који имају исту вероватноћу. Посматрајмо очекивање од случајне вредности X која је 1 ако граф има својство S, а у супротном је 0 (индикатор својства S). Ако је вероватноћа да случајно изабрани елемент има својство S ненула, тада постоји граф са својством S.

Показивањем овога је стварно доказано тврђење, јер ако не постоји објекат из посматраног простора вероватноће који има тражено својство, вероватноћа да случајно изабрани елемент има тражено својство мора бити 0.

Други начин употребе вероватносног метода је посматрање очекиваних вредности неких случајних величина. Ако је очекивана вредност неке случајне величине X мања од неке вредности K, тада постоји елемент простора вероватноће који постиже вредност мању од K.

2.3 Неједнакост пресечног броја

Прво ћемо показати једну наивну оцену за пресечни број графа, коју ћемо затим користити у доказу неједнакости пресечног броја.

Лема 2.3.1. За сваки прост граф G са $v \geqslant 3$ чворова и e грана важи:

$$cr(G) \geqslant e - 3v + 6.$$

Доказ. Ако неко конкретно цртање графа G има $cr(G)$ пресека, сваки од ових пресека се може елиминисати уклањањем највише једне гране.
Дакле, постоји планаран подграф G' графа G који има барем $e - cr(G)$ грана.
По последици Ојлерове формуле за G' тада, под условом $v \geqslant 3$ важи:

$$e - cr(G) \geqslant 3v - 6 \Rightarrow cr(G) \geqslant e - 3v + 6.$$

□

Вероватносни метод се често користи у теорији графова и један од примера примене овог метода је показивање доњег ограничења пресечног броја у графу. Овај доказ користи други споменут начин коришћења вероватносног метода. Интуиција иза тога је та да ми знамо да ограничимо пресечни број графа помоћу Леме 2.3.1 , али нам она не даје асимптотску оцену. Такође ова оцена не делује довољно јако.

Бирањем сваке гране са неком конкретном вероватноћом и посматрањем очекиваних вредности у оцени коју нам даје Лема 2.3.1, добијамо додатан степен слободе (изабрану вероватноћу) и погодним избором ње добијамо добру оцену за пресечни број графа. Услов за однос броја чворова и грана у Теореми 2.3.1 је потребан да би вероватноћа изабрана у доказу била невећа од 1, тј. да би била вероватноћа.

Теорема 2.3.1. За сваки прост граф G са v чворова и $e \geqslant 4v$ грана важи:

$$cr(G) = \Omega\left(\frac{e^3}{v^2}\right).$$

Доказ. Конструишимо граф H тако што за сваки чвор из G бирамо са вероватноћом p . Нека он има v_H чворова и e_H грана.
Приметимо да важе следеће једнакости:

- $\mathbb{E}[v_H] = pv$, јер сваки чвор из G бирамо независно са вероватноћом p,
- $\mathbb{E}[e_H] = p^2 e$, јер свака грана из G постоји у H само ако су оба њена крајња чвора из G такође у H,
- $\mathbb{E}[cr(H)] \leqslant p^4 cr(G)$, јер је сваки пресек из G одређен са две гране које немају заједничке чворове, које су одређене са 4 чвора који сви морају припадати, те да би неки пресек из G био пресек и у H, сва 4 чвора која га одређују морају припадати и H.

Лема 2.3.1 примењена на H даје неједнакост:

$$cr(H) \geqslant e_H - 3v_H + 6.$$

Посматрајмо очекивану вредност овог израза. Будући да је $\mathbb{E}$ линеарно, важи $\mathbb{E}[e_H - 3v_H + 6] = \mathbb{E}[e_H] - 3\mathbb{E}[v_H] + 6$.

$$\mathbb{E}[cr(H)] \geqslant \mathbb{E}[e_H - 3v_H + 6] = \mathbb{E}[e_H] - 3\mathbb{E}[v_H] + 6$$

$$\Rightarrow p^4 cr(G) \geqslant p^2 e - 3pv + 6.$$

Добрим одабиром вероватноће p можемо добити добро ограничење за $cr(G)$. Циљ је да у овој неједнакости фигуришу само $cr(G)$, v, e и константе. Такође, било би пожељно да се $E(e_H)$ и $E(v_H)$ разликују за константу, тј. да је $p = c \cdot \frac{v}{e}$, за неку константу c, да би десна страна неједнакости била хомогена и да бисмо добили што оштрију оцену.

Такође, да неједнакост не би била бесмислена, желимо да важи $p^2 e > pv$ (јер би у том случају десна страна неједнакости била негативна).
За вредност $p = \frac{4v}{e}$ (ова вредност јесте вероватноћа, тј. није већа од 1 и није негативна због услова теореме $e \geqslant 4v$), овај израз се своди на:

$$\frac{256v^4}{e^4} \cdot cr(G) \geqslant \frac{16v^2}{e} - \frac{12v^2}{e} + 6$$

$$\Rightarrow cr(G) \geqslant \frac{e^3}{64v^2} + \frac{3e^4}{128v^4}$$

Пошто је $e \geqslant v-1$, важи $\frac{3e^4}{128v^4} = O(\frac{e^3}{v^2})$ и стога

$$\Rightarrow cr(G) = \Omega\left(\frac{e^3}{v^2}\right).$$

□

Напомена: У општем случају, ако не знамо да ли важи $e \geqslant 4v$, можемо рећи да је $cr(G) = \Omega\left(\frac{e^2\cdot(e-4v)}{v^2}\right)$, јер у случају да услов није испуњен, десна страна је негативна и стога ова једнакост сигурно важи.

2.4 Доње ограничење пресечног броја у мултиграфу

Пошто претходни доказ важи само за просте графове, природно се поставља питање шта се дешава са пресечним бројем у случају мултиграфа?

Овом проблему такође може да се приђе вероватносним методом. Идеја је изабрати одговарајући простор вероватноће и из њега случајно изабрати прост подграф посматраног мултиграфа, а затим очекивање пресечног броја мултиграфа изразити у функцији од пресечног броја изабраног подграфа, који можемо ограничити неједнакошћу пресечног броја.

Теорема 2.4.1. За сваки мултиграф G са v чворова, e грана и највише k грана између два чвора важи:

$$cr(G) = \Omega\left(\frac{e^3 - 4e^2kv - 4ek^2v}{kv^2}\right).$$

Доказ. Посматрајмо неко цртање графа G за које се постиже пресечни број.

Конструишимо његов подграф G' на следећи начин:

1. Сваку грану из G бришемо независно са вероватноћом $1-\frac{1}{k}$.

2. Ако су нека два чвора после овог брисања повезана са више од једне гране, бришемо све гране између њих.

Нека G' има e' грана и v чворова (број чворова остаје исти јер смо брисали гране).

Нека је p_g вероватноћа да конкретна грана g графа G постоји у графу G'. Ако је g једна од $k' \leqslant k$ грана које повезују нека два чвора, вероватноћа да је она једина остала необрисана је $\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k'-1}$, што је веће или једнако од $\frac{1}{3k}$, јер je $\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-1} \geqslant \frac{1}{3}$.

Стога, очекивана вредност броја грана у графу G' je:

$$\mathbb{E}[e'] \geqslant \frac{e}{3k}.$$

Пошто не знамо да ли je $e' \geqslant 4v$, применом другог облика Теореме 2.3.1. за граф G' (који je по конструкцији прост) добијамо:

$$cr(G') = \Omega\left(\frac{e'^2 \cdot (e-4v)}{v^2}\right).$$

Посматрајмо очекивану вредност овог израза.

$$\mathbb{E}[cr(G')] = \Omega\left(\frac{\mathbb{E}[e'^3] - \mathbb{E}[e'^2 \cdot 4v)]}{v^2}\right).$$

Пошто je функција $f(x) = x^3$ конвексна, Јенсенова неједнакост примењена на ову очекивану вредност даје:

$$\mathbb{E}[e'^3] \geqslant \mathbb{E}[e']^3$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[e'^3] = \Omega\left(\frac{e^3}{k^3}\right).$$

Сада још треба ограничити $\mathbb{E}[e'^2]$ одозго. Ово представља суму по свим паровима чворова (u,v) и (w,z) :

$$\mathbb{E}[e'^2] - \mathbb{E}[e']^2 = \sum_{uv,wz} p_{uv,wz} - p_{uv} - p_{wz}$$

Ови парови грана су независни, осим ако je иста грана поновљена два пута. Тако да се све скрати и остаје нам само:

$$\mathbb{E}[e'^2] - \mathbb{E}[e']^2 \leqslant \sum_{uv} p_{uv} = \mathbb{E}[e']$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[e'^2] \leqslant \mathbb{E}[e']^2 + \mathbb{E}[e'].$$

Сада можемо да ограничимо $\mathbb{E}[cr(G')]$:

$$\mathbb{E}[cr(G')] = \Omega\left(\frac{e^3}{k^3v^2}\right) - 4v\left(O\left(\frac{e^2}{k^2v^2}\right) + O\left(\frac{e}{kv^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[cr(G')] = \Omega\left(\frac{e^3 - 4e^2kv - 4ek^2v}{k^3v^2}\right)$$

Пошто је сваки пресек је одређен са две гране, важи:

$$\mathbb{E}[cr(G')] \leqslant \frac{cr(G)}{k^2}$$

$$\Rightarrow cr(G) = \Omega\left(\frac{e^3 - 4e^2kv - 4ek^2v}{kv^2}\right).$$

$\square$

Напомена: Ако је $e \geqslant 8kv$, тада је $\Omega\left(\frac{e^3-4e^2kv-4ek^2v}{kv^2}\right) = \Omega\left(\frac{e^3}{kv^2}\right)$.

3

Семереди–Тротер теорема

3.1 Проблем инциденција

Једна класа питања у дискретној геометрији односи се на то колико инциденција може да постоји између нека два скупа објеката. Једно од основних питања овог типа је то колико инциденција може имати скуп тачака са скупом правих у равни, у зависности од броја тачака и правих, и оно је једно од ретких које је решено.

Ердош је за свако n и l конструисао скуп од n тачака и скуп од l правих у равни које имају $\Theta(n^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}} + n + l)$ инциденција. Ердош и Пурди су поставили хипотезу да не постоји конфигурација n тачака и l правих у равни која има асимптотски већи број инциденција, тј. да је број инциденција $O(n^{\frac{2}{3}}l^{\frac{2}{3}} + n + l)$.

Семереди и Тротер [11] су ову хипотезу доказали 1983. Секели [10] је 1997. поново доказао њихов резултат, али на другачији начин, тако што ју је повезао са доњим ограничењем пресечног броја у графу и на два начина пребројао број пресека конструисаног графа.

Тиме што је доказано да постоје конфигурације са $\Theta(n^{\frac{2}{3}}l^{\frac{2}{3}} + n + l)$ инциденција, и да је број инциденција $O(n^{\frac{2}{3}}l^{\frac{2}{3}} + n + l)$ добијамо да је ова оцена оштра до на мултипликативну константу.

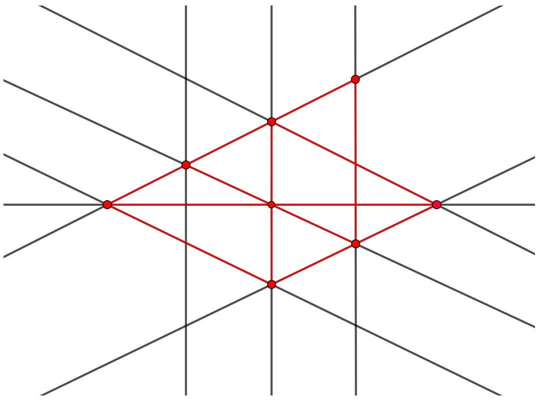
Оптимална константа се и даље не зна, али најбољу познату константу за горње ограничење нашли су Радоичић, Тардос, Тот и Пах [7], тј. доказали су да је број инциденција ограничен одозго са $2,5 \cdot n^{\frac{2}{3}}l^{\frac{2}{3}} + n + l$, а Пах и Тот [6] су показали да $0,42 \cdot n^{\frac{2}{3}}l^{\frac{2}{3}} + n + l$ није горње ограничење.

3.2 Семереди–Тротер теорема

Теорема 3.2.1. За n тачака и l правих у равни, број њихових инциденција је $O\left(n^{\frac{2}{3}}l^{\frac{2}{3}}+n+l\right)$.

Доказ. Без умањења општег, можемо рећи да је свака права инцидентна барем са једном тачком, јер ако је нека функција припада $O\left(n^{\frac{2}{3}}(l-1)^{\frac{2}{3}}+n+l\right)$, тј. није већа од $c\cdot(n^{\frac{2}{3}}(l-1)^{\frac{2}{3}}+n+l)$ онда важи и да није већа од $c\cdot(n^{\frac{2}{3}}l^{\frac{2}{3}}+n+l)$, стога припада и $O\left(n^{\frac{2}{3}}l^{\frac{2}{3}}+n+l\right)$, с тим да је очувана константа.

Посматрајмо граф чији су чворови n датих тачака и између два чвора постоји грана ако су одговарајуће тачке суседне на некој од датих l правих.



Слика 3.1: Граф који формирају дате тачке и праве

У овако конструисаном графу важи $cr(G)\leqslant\frac{l(l-1)}{2}$ јер је то највећи број пресека међу l правих.

Број тачака на једној правој је по конструкцији за један већи од броја грана између тих тачака, стога ако број грана овог графа означимо са e, а број инциденција између тачака и правих означимо са I, важи:

$$I\leqslant e+l.$$

Према Теореми 2.3.1, важи једно од следећа два тврђења:

1. $4n\geqslant I-l$, тј. $I\leqslant 4n+l$
   $\Rightarrow I=O(n+l)$.

2. $cr(G)=\Omega\left(\frac{(I-l)^3}{n^2}\right)$, тј. $cr(G)\geqslant c\cdot\frac{(I-l)^3}{n^2}$ за неку константу c
   $\Rightarrow \frac{l^2}{2}\geqslant cr(G)\geqslant c\cdot\frac{(I-l)^3}{n^2}$

$\Rightarrow I - l \leqslant \frac{1}{c} l^{\frac{2}{3}} n^{\frac{2}{3}}$
$\Rightarrow I = O(n^{\frac{2}{3}} l^{\frac{2}{3}} + l).$

Стога, $I = O(n^{\frac{2}{3}} l^{\frac{2}{3}} + n + l)$. □

3.3 Последице Семереди–Тротер теореме

3.3.1 Праве инцидентне са више тачака

Теорема 3.1. За n тачака у равни, постоји $O\left(\frac{n^2}{k^3} + \frac{n}{k}\right)$ правих које су инцидентне са барем k тачака. Број инциденција тих правих и тачака је $O\left(\frac{n^2}{k^2} + n\right)$.

Доказ. Посматрајмо граф сличан оном из доказа Семереди–Тротер теореме, осим што су укључене само праве које су инцидентне са барем k тачака. Нека таквих правих има l.

Приметимо да је број грана овог графа $e \geqslant l(k-1)$. Према Теореми 2.3.1. важи једно од следећа два:

1. $l(k-1) < e < 4n$
   $\Rightarrow l < \frac{4n}{k-1} = O\left(\frac{n}{k}\right)$.

2. $l^2 = O\left(\frac{e^3}{n^2}\right) = O\left(\frac{l^3(k-1)^3)}{n^2}\right)$
   $\Rightarrow l = O\left(\frac{n^2}{(k-1)^3}\right) = O\left(\frac{n^2}{k^3}\right)$.

Из овога следи да важи $l = O\left(\frac{n^2}{k^3}\right)$.

Применом Семереди–Тротер теореме на овај граф, добијамо да број инциденција између ових тачака и правих које су инцидентне са барем k припада

$$O\left(\frac{n^{\frac{4}{3}}}{k^2} \cdot n^{\frac{2}{3}} + \frac{n^2}{k^3} + n\right) = O\left(\frac{n^2}{k^2} + \frac{n^2}{k^3} + n\right) = O\left(\frac{n^2}{k^2} + n\right).$$

□

Напомена. Ако важи $k \leqslant \sqrt{n}$, тада $O\left(\frac{n^2}{k^3} + \frac{n}{k}\right) = O\left(\frac{n^2+nk^2}{k^3}\right) = O\left(\frac{n^2}{k^3}\right)$. Слично, $O\left(\frac{n^2}{k^2} + n\right) = O\left(\frac{n^2}{k^2}\right)$.

3.3.2 Проблем сума и производа

Напомена. За сваки скуп A користимо ознаке $A + A = \{x + y | x, y \in A\}$ и $A \cdot A = \{x \cdot y | x, y \in A\}$.

Посматрајмо скупове $A+A$ и $A \cdot A$, где је A скуп фиксне (коначне) кардиналности n. Није тешко наћи скуп такав да важи $|A+A| = \Theta(n)$, нпр. аритметичка прогресија. Слично, ако је A геометријска прогресија важи $|A \cdot A| = \Theta(n)$. Видимо да можемо појединачно да контролишемо ове две вредности, али проблеми настају када покушамо да истовремено минимизујемо обе вредности $|A+A|$ и $|A \cdot A|$.

Ердош и Семереди[12] су поставили следећу хипотезу:

Хипотеза 3.3.1. За свако $\varepsilon > 0$, постоји n_0 такво да сваки скуп A природних бројева чија је кардиналност $n > n_0$ задовољава:

$$\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} = \Omega(n^{2-\varepsilon}).$$

Ова хипотеза може да се тумачи као тврђење да је немогуће да се велики скуп истовремено понаша као аритметичка и као геометријска прогресија, што се често назива ,,феномен сума и производа”.

Ердош и Семереди су успели да нађу малу позитивну константу c (универзалну за свако n) такву да постоји скуп A за који је $\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} = \Omega(n^{1+c})$.

Тренутно најбоље горње ограничење је доказао Шакан[8], који је показао да ε може бити произвољно близу $c = \frac{1}{3} + \frac{5}{5277}$.

Елекеш[2] је помоћу Семереди-Тротер теореме показао да тврђење важи за $c = \frac{1}{4}$.

Теорема 3.2. Нека је A коначан скуп реалних бројева различитих од 0 и нека је $|A| = n$. Тада важи:

$$\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} = \Omega\left(n^{\frac{5}{4}}\right).$$

Доказ. Нека је $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Дефинишимо за свако $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ реалну функцију $f_{i,j}$ као:

$$f_{i,j}(x) = a_i \cdot (x - a_j).$$

Преведимо ово на језик Семереди–Тротер теореме:

Функције $y = f_{i,j}$ су линеарне, те представљају наш скуп правих и има их

n^2. Скуп тачака који ћемо посматрати је $(A+A)\times(A\cdot A)$.

Приметимо да за свако $k\in\{1,2,...,n\}$ важи:

$$f_{i,j}(a_k+a_j)=a_i\cdot(a_k+a_j-a_j)=a_i\cdot a_k,$$

тј. за свако $k\in\{1,2,..,n\}$ тачка $(a_k+a_j,a_i\cdot a_k)$ припада правој одређеној са $f_{i,j}$. Стога, имамо n^2 правих у равни, од којих је свака инцидентна са барем n тачака из скупа са $m=|(A+A)\times(A\cdot A)|=|A+A|\cdot|A\cdot A|=m$ елемената. Пошто важи $|A+A|,|A\cdot A|\geqslant n$, тада је $m\geqslant n^2$, те за m тачака и n^2 правих инцидентних са барем n тачака, а $n\leqslant\sqrt{m}$ према Теореми 3.1 важи:

$$n^2=O\left(\frac{m^2}{n^3}\right)$$

$$\Rightarrow m^2=\Omega\left(n^5\right)$$

$$\Rightarrow m=\Omega\left(n^{\frac{5}{2}}\right)=|A+A|\cdot|A\cdot A|$$

$$\Rightarrow max\{|A+A|,|A\cdot A|\}=\Omega\left(n^{\frac{5}{4}}\right).$$

□

3.3.3 Троуглови јединичне површине

Теорема 3.3. Број троуглова јединичне површине које образује n тачака у равни је $O(n^{\frac{7}{3}})$.

Доказ. Приметимо да две различите тачке p и q формирају троугао јединичне површине са неком тачком r ако и само ако r припада једној од две праве паралелне са pq, на растојању $\frac{2}{|pq|}$. Нека су то праве $l_{p,q}$ и $l'_{p,q}$.

Нека је P фиксиран скуп од n тачака у равни. За тачку $p\in P$ означимо са L_p скуп правих на којима може да лежи нека тачка која учествује у формирању троугла јединичне површине са p. Формалније, за свако $p\in P$ дефинишемо:

$$L_p=\{l_{p,q},l'_{p,q}|q\in P,q\neq p\}.$$

Приметимо да за фиксно p, свака од ових правих може бити одређена са највише две различите тачке q (да би праве $l_{p,q}$ и $l_{p,q'}$ биле исте, мора да важи $|pq|=|pq'|$ и $pq||pq'$, и за сваку тачку $q\in P$ постоји највише једна тачка $q'\in P$ са тим својством). Стога за сваку тачку $p\in P$ важи $n-1\leqslant|L_p|\leqslant 2n-2$, тј. $L_p=\Theta(n)$.

Применом Семереди–Тротер теореме на P и L_p добијамо да је њихов број инциденција $O\left(n^{\frac{2}{3}}n^{\frac{2}{3}}+n+n\right)=O(n^{\frac{4}{3}})$. Свака инциденција између P и L_p

одређује тачно један троугао јединичне површине чије је једно теме p а друга два припадају P.

Сумирањем ових израза за свако $p \in P$ добијамо да је број троуглова јединичне површине $n \cdot O(n^{\frac{3}{4}}) = O(n^{\frac{7}{3}})$. $\square$

4

Слична тврђења

4.1 Проблем јединичних растојања

Ердош је 1946. поставио питање колико највише парова из скупа тачака у равни може бити на јединичном растојању. Тада је доказао да овај број припада $\Omega\left(n^{1+\frac{c}{\log\log n}}\right)$ и $O(n^{\frac{3}{2}})$. Доње ограничење је доказао тако што је навео конструкцију за њега, $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ решетку.

Спенсер, Семереди и Тротер [13] су 1984. појачали горње огрничење на $O(n^{\frac{4}{3}})$ и ово је за сада најбоља позната оцена, а јаче доње ограничење још увек није нађено.

Ердош је поставио хипотезу да је право горње ограничење $O(n^{1+\varepsilon})$ за било које $\varepsilon > 0$, што је и даље отворен проблем. Ово показује колико се заправо мало зна о инциденцијама. Иако је проблем инциденција правих и тачака у равни решен већ деценијама, већ кад се пређе на јединичне кругове настају већи проблеми и питање је већ више од 50 година отворено.

Људи су покушавали да реше овај проблем посматрајући и друге норме и примећено је да одговор на ово питање доста зависи од изабране норме. Валтр [14] је показао да постоји норма у којој је могуће достићи $\Omega(n^{\frac{4}{3}})$ јединичних растојања. Матушек [15] је показао да постоји доста норми у којима сваки скуп од n тачака формира $O(n \log n \log\log n)$ јединичних растојања.

Вратимо се на почетни проблем. Доказ оцене $O(n^{\frac{4}{3}})$ такође подсећа на доказ Семереди–Тротер теореме, пошто је услов да су две тачке на јединичном растојању еквивалентан услову да су једна тачка и јединични круг са центром у другој тачки инцидентни, те је овај проблем сведен на ограничавање броја инциденција јединичних кружница и тачака у равни.

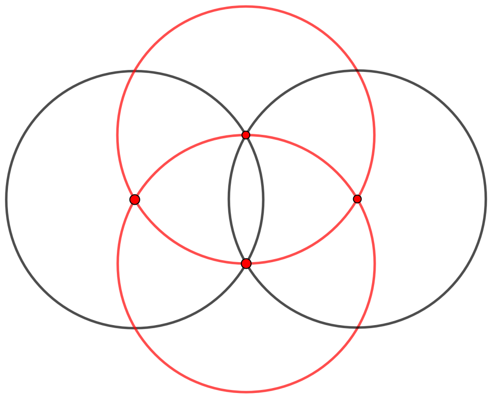
Теорема 4.1.1. Највећи број јединичних растојања између n тачака у равни је $O(n^{\frac{4}{3}})$.

Доказ. Нека је P фиксан скуп од n тачака у равни и $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ скуп од n кружница јединичног полупречника са центрима у тачкама из скупа P.

Свака инциденција P и C одређује тачно један пар тачака у који је на јединичном растојању и пребројавањем тих инциденција, сваки пар тачака пребројимо тачно 2 пута. Стога, ако докажемо да број инциденција P и C припада $O(n^{\frac{4}{3}})$, тада број тачака на јединичном растојању из P припада $O(n^{\frac{4}{3}})$, чиме је тврђење теореме доказано.

Означимо за свако $1 \leqslant i \leqslant n$ са m_i број инциденција кружнице c_i са P. Очигледно је да је број инциденција P и C једнак $\sum_{i=1}^{n} m_i$. Брисањем свих кружница које су инцидентне са највише две тачке број инциденција смањујемо највише за $2n = O(n)$, што смемо да радимо ако покушавамо да докажемо да овај број припада $O(n^{\frac{4}{3}})$ (на слици 4.1. црне кружнице не формирају ни једну грану у графу јер су инцидентни само са две тачке).

Поучени доказом Семереди–Тротер теореме, конструишимо мултиграф G са чворовима у тачкама из скупа P и гранама таквим да између нека два чвора постоји грана ако су њима одговарајуће тачке суседне на некој кружници из C. Пошто две тачке могу да припадају само двема различитим кружницама јединичног полупречника, највећа вишеструкост неке гране овог мултиграфа није већа од 2.



Слика 4.1: Граф који формирају дате кружнице и тачке

Приметимо да сваки круг c_i одговара тачно m_i грана у овом графу, и да свака грана може потицати од највише два јединична круга.

Из конструкције, овај граф има n чворова и барем $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i$ грана.

Важи доње ограничење пресечног броја у мултиграфу, и ако број инциденција означимо са x, важи:

$$cr(G) = \Omega\left(\frac{x^3}{2 \cdot n^2}\right)$$

(смемо да користимо овај облик Теореме 2.4.1 зато што овај мултиграф испуњава услов за број чворова, грана и највећу вишеструкост).

$$\Rightarrow x^3 = O(cr(G) \cdot n^2)$$

Пошто сваки пресек у овом графу одговара пресеку две јединичне кружнице, а сваке две кружнице се секу у највише две тачке, онда важи:

$$cr(G) \leqslant 2\binom{n}{2} = O(n^2)$$

$$\Rightarrow x = O(n^{\frac{4}{3}}).$$

□

4.2 Ердошев проблем различитих растојања

После процене броја јединичних растојања међу тачкама у равни, следеће логично питање би било да ли се може проценити број различитих растојања међу њима. Горње ограничење је очигледно, пошто сваке две тачке могу бити на различитом растојању простим постављањем тачака на праву и тако што је свака следећа удаљеност суседних тачака дупло већа од претходне. Испоставља се да је доње ограничење много суптилније.

Ердош је, такође 1946, поставио питање колико најмање различитих растојања мора постојати између n тачака у равни. Он је тада овај број ограничио са $\Omega(n^{\frac{1}{2}})$ и $O\left(\frac{n}{\sqrt{\log n}}\right)$, где је горње ограничење такође показано конструкцијом $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ решетке.

Ердош је тада поставио хипотезу да је овај број $\Omega(n^{1-o(1)})$.

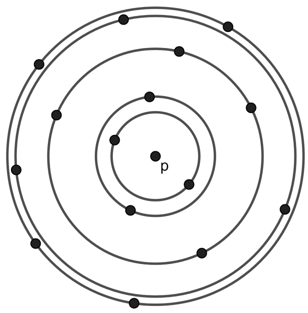
Оцена за доње ограничење је доста побољшана од када је овај проблем постављен и тренутну најбољу оцену су 2010. доказали Гут и Кац [4], и она је $\Omega\left(\frac{n}{\log n}\right)$.

Секелијева [10] оцена $\Omega(n^{\frac{4}{5}})$ из 1993. није најјача, али се води сличним начином размишљања као доказ Семереди–Тротер теореме, тако што проблем своди на инциденције скупа кружница и скупа тачака.

Теорема 4.2.1. Најмањи број различитих растојања између n тачака у равни припада $\Omega(n^{\frac{4}{5}})$.

Доказ. Нека је P фиксан скуп n тачака у равни и нека је t број различитих растојања између њих.

За сваку тачку $p \in P$ важи да су све остале тачке скупа P на кружницама са центром у p чији су полупречници ових t растојања.



Слика 4.2: Посматране кружнице са центром у тачки p

Ових tn кружница имају $n(n-1)$ инциденција са тачкама из скупа P, јер је свака тачка инцидентна са тачно једним кругом са центром у свакој другој тачки из P.

Конструишимо све кругове осим оних који садрже мање од 3 тачке из P. Овиме смо број инциденција смањили највише за $2nt$, стога преосталих инциденција има барем $n(n-2t-1)$.

Посматрајмо граф G чији су чворови тачке скупа P и чије су гране лукови између суседних тачака ових кружница.

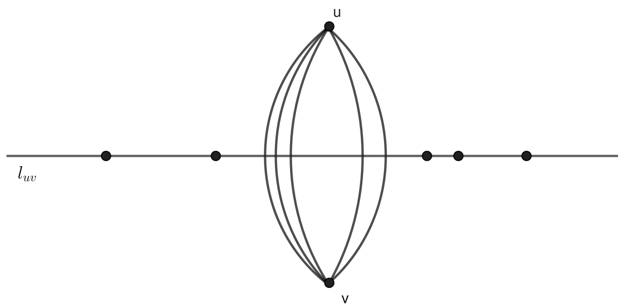
Ако на некој кружници има k тачака, грана које формира та кружница има k. Стога, број инциденција кругова и тачака једнак је броју грана овог графа, тј. барем $n(n-2t-1)$. Када би t било реда величине n, тврђење би сигурно важило. Стога, посматрамо случај у ком је t довољно мање од n, тј. граф има скоро n^2 грана (за ово је довољно ограничење нпр. $t \leqslant \frac{n}{100}$). Формалније, број грана је $\Omega(n^2)$.

Из сваке тачке излази не више од t кружница, и оне са преосталих не више од $(n-1)t$ кружница имају не више од $2(n-1)t^2$ пресека, тј. укупно има не више од $n(n-1)t^2$ пресека. Дакле, број пресека припада $O(n^2t^2)$.

Највећа вишеструкост у овом графу не може бити већа од $2t$ (јер постоји највише $2t$ различитих кругова који имају један од ових полупречника а садрже неке две тачке).

Када бисмо одмах применили доње ограничење за пресечни број у мултиграфу, добили бисмо слабију оцену од тражене (оцена која би се тиме добила је $t = \Omega(n^{\frac{2}{3}})$). Приметимо да нам у Теореми 2.4.1 оцена доста слаби када је вишеструкост графа велика, стога би било природно да покушамо да на неки начин елиминишемо гране велике вишеструкости и тиме добијемо јачу оцену.

Посматрајмо одвојено гране велике вишеструкости. Ако грана uv има вишеструкост k, тј. између тачака u и v има k лукова. Центри тих лукова морају припадати симетрали дужи uv. Нека је то права l_{uv}. Онда је права l_{uv} инцидентна са k тачака из P. Према Теореми 3.1, праве инцидентне са барем k тачака из P имају $O\left(\frac{n^2}{k^2} + n\right)$ инциденција са тачкама из P.



Слика 4.3: Грана вишеструкости 5 у посматраном графу

Нека је M скуп парова чворова $\{u, v\}$ из G таквих да је вишеструкост гране uv барем k, и нека је E скуп грана (лукова) који спајају ове парове тачака. Сваки лук из E који повезује пар тачака $\{u, v\}$ одговара тачно једној тачки из P инцидентној са l_{uv}.

С друге стране, инциденција неке симетрале l_{uv} и тачке p може да одговара највише $2t$ грана из E, јер постоји највише t кругова са центром у p. Стога важи:

$$|E| = O\left(\frac{tn^2}{k^2} + tn\right)$$

Погодним избором k и брисањем свих грана са вишеструкошћу барем k добијамо тврђење теореме.

Што је број грана већи, а највећа вишеструкост неке гране мања, то је јача оцена коју даје Теорема 2.4.1. Стога, желимо да важи $|E| \leqslant \frac{1}{2}n^2$, да би број грана мултиграфа добијеног брисањем грана из E и даље био $\Omega(n^2)$. Довољан услов за ово је $k = O(\sqrt{t})$ за неку константу c.

Обришимо из посматраног мултиграфа гране из E. За овај мултиграф знамо доње ограничење пресечног броја, и оно је $\Omega\left(\frac{\Omega(n^2)^3}{O(\sqrt{t})n^2}\right) = \Omega\left(\frac{n^4}{\sqrt{t}}\right)$ (смемо да користимо овај облик Теореме 2.4.1 зато што овај мултиграф испуњава услов за број чворова, грана и највећу вишеструкост).

Пошто не можемо имати више од t^2n^2 пресека, важи:

$$t^2n^2 \geqslant cr(G) = \Omega\left(\frac{n^4}{\sqrt{t}}\right)$$

$$\Rightarrow t^{\frac{5}{2}} = \Omega(n^2)$$

$$\Rightarrow t = \Omega(n^{\frac{4}{5}})$$

□

Иако је овај проблем већински решен, тј. до на грешку реда величине $\sqrt{\log n}$, неке модификације су и даље отворени проблеми:

- Уопштење овог проблема у већим димензијама је и даље отворено. Ердош је конструисао скуп од n тачака у $\mathbb{R}^d$ који формира $\Theta(n^{\frac{2}{d}})$ различитих растојања и поставио је хипотезу да не постоји скуп од n тачака који формира мањи број различитих растојања.

- Конструисање примера у равни са n тачака које образују $O\left(\frac{n}{\log n}\right)$ различитих растојања је такође један од тежих проблема у комбинаторној геометрији и у последњих пар деценија постављено је неколико хипотеза на ову тему, али резултата скоро да нема.

5

Закључак

У овом раду се могу видети неке занимљиве идеје и приступи различитим проблемима који испрва не изгледају толико сродно.

У првом делу рада смо се упознали са појмом пресечног броја графа и доказом оцена за њега помоћу вероватносног метода. Затим смо доказом Семереди–Тротер теореме и два Ердошева проблема из дискретне геометрије показали како пресечни број графа може да има битну улогу у ограничавању броја инциденција међу геометријским објектима.

Такође, показали смо да примене Семереди–Тротер теореме не морају нужно да буду формулисане геометријски, тако што смо заправо у проблему сума и производа као тачке посматрали погодне уређене парове бројева, а као праве смо посматрали линеарне функције.

Циљ овог рада је био да читаоца упозна са овим методама и прикаже пресек одређених резултата добијених у области инцидентне геометрије.

Овом приликом бих волела да се захвалим свом ментору, Луки Милићевићу, на томе што ме је увео у ову област математике када сам присуствовала додатној на којој је показао доказ неједнакости пресечног броја, на томе што ми је пружио помоћ када је била потребана, давао ми предлоге како да наставим са радом и подржавао и подстицао сваку моју идеју.

Такође бих волела да се захвалим свим професорима Математичке гимназије који су ми предавали математику, јер сам у овој школи много научила и развила љубав према математици.

Литература

[1] N. Alon, J. H. Spencer, *The Probabilistic Method*, John Wiley & Sons Inc. (1992)

[2] G. Elekes, *On the number of sums and products*, Acta Arithmetica **81** (1997), 365–367.

[3] P. Erdős, *On sets od distances of n points*, American Mathematical Monthly **53** (1946), 248-250.

[4] L. Guth, N. H. Katz, *On the Erdős distinct distance problem in the plane*, arXiv preprint (2010), arXiv:1011.4105

[5] J. Matoušek, *Lectures on Discrete Geometry*, Springer Universitext (2002)

[6] J. Pach, G. Tóth, *Graphs Drawn with Few Crossings per Edge*, Combinatorica **17** (1997), 427-439.

[7] J. Pach, R. Radoičić, G. Tardos, G. Tóth, *Improving the Crossing Lemma by Finding More Crossings in Sparse Graphs*, Discrete Computational Geometry **36** (2006), 527–552.

[8] G. Shakan, *On higher energy decompositions and the sum-product phenomenon*, arXiv preprint (2018), arXiv:1803.04637

[9] A.Sheffer, *Incidence Theory with a Focus on the Polynomial Method*, http://faculty.baruch.cuny.edu/ASheffer/000book.pdf

[10] L. Székely, *Crossing Numbers and hard Erdős Problems in Discrete Geometry*, Combinatorics, Probability and Computing **11** (1993), 1–10.

[11] E. Szemerédi, W. T. Trotter, *Extremal problems in discrete geometry*, Combinatorica **3** (1983), 381–392.

[12] E. Szémeredi, P. Erdős, *On sums and products of integers*, Studies in Pure Mathematics. To the memory of Paul Turán (1983)

[13] E. Szémeredi, W. T. Trotter, J. Spencer, *Unit distances in the Euclidian plane*, Graph Theory and Combinatorics (1988), 253-278.

[14] P. Valtr, *Strictly convex norms allowing many unit disances and related touching questions*, unpublished manuscript (1005)

[15] J. Matoušek, *The number of unit distances is almost linear for most norms*, Advances in Mathematics **226** (2011), 2618–2628.