Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

из предмета *Математика*

Геометрије Хилбертових простора

Аутор:
Јован Танасковић, IVa

Ментор:
др Миљан Кнежевић

Београд, јун 2015.

Садржај

1 Увод

Већини нас је интуитивно јасно шта представља један простор, и већина га замишља у оном нама најприближнијем, тродимензионалном смислу - најчешће имамо еуклидско поимање света. Међутим, као и у нижим разредима, како смо откривали нове математике, тако смо и ширили скупове којима смо се бавили, од простог бројања 1,2,3... , то јест скупа природних бројева, до све већих и комплекснијих скупова.

Захтевнија математика захтевала је више ,,простора" за рад, па смо тако и ми сâми почели да дефинишемо нове појмове како бисмо могли да опишемо функционисање у разним околностима.

Како се 19. век приближавао крају, научници, како математичари, тако и физичари, иако упознати са силним генерализацијама еуклидских простора, почињали су да се интересују за нове, апстрактне линеарне просторе.

Ови простори су били састављени од елемената који су могли да се слободно укрштају са скаларима - сабирају и множе, без потребе да их дефинишемо у ,,геометријском" смислу вектора.

Са друге стране, прелаз на 20. век значио је и велики осврт на просторе низова, укључујући и редове, као и просторе функција.

У ово време, током прве деценије 20. века, два математичара дошла су до битног закључка током проучавања интегралних једначина, откривајући просторе који су тема овог рада, што је утрло пут ка разним научним открићима. Реч је о сарадницима Хилберту[1] и Шмиту[2], чије су опсервације закључна тема овог рада.

Слика 1: Давид Хилберт

[1]David Hilbert (1862-1943)
[2]Erhard Schmidt (1876-1959)

2 Нормирани простори

Најпре, дефинисаћемо све структуре које чине темељ за изградњу ове моћне математичке теорије.

2.1 Векторски простори

Започнимо са нечиме што нам је најјасније, и са чиме смо већ претходно били упознати, иако можда нисмо били формално уведени у ту теорију.

2.1.1 Основне структуре

Испрва, дефинисаћемо алгебарску структуру коју називамо *пољем скалара*, коју ћемо обележавати са $\mathbb{K}$, тако да ће нам оно ујединити обележавање поља скалара реалних бројева $\mathbb{R}$ и поља скалара комплексних бројева $\mathbb{C}$. Оваква структура нам је познате аксиоматике, али ће ипак бити наведене неке битне ознаке, као да ћемо неутрале - за сабирање $0_{\mathbb{K}}$ и за множење $1_{\mathbb{K}}$, надаље у запису, једноставно, обележавати са 0 и 1, респективно. Примери оваквих простора су веома познати, мада, ради потпуности, неки од њих ће бити наведени: $\mathbb{Z}_p$ (скуп простих целих бројева), $\mathbb{Q}$ (скуп рационалних бројева), $\mathbb{C}$ (скуп комплексних бројева), итд.

Дефиниција 2.1.1. *Нека је* $\mathbf{V}$ *непразан скуп чије елементе називамо* **векторима** *и* $\mathbb{K}$ *поље скалара такво да је* $\mathbb{K} = (K, +, \cdot)$. *Алгебарску структуру:*

$$\mathbf{V} = (V,\ +,\ \cdot),$$

под условом да је $(V,+)$ *Абелова*[3] *група, називамо* **векторским простором V над пољем** $\mathbb{K}$ *уколико за бинарну операцију сабирања његових елемената* $+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ *и спољашњу операцију* $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ *важи:*

1° $\alpha \cdot_{\mathbb{K}} (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta) \cdot x, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathbf{V};$

2° $\alpha \cdot_{\mathbb{K}} (x + y) = \alpha \cdot_{\mathbb{K}} x + \alpha \cdot_{\mathbb{K}} y, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in \mathbf{V};$

3° $(\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) \cdot x = \alpha \cdot x +_{\mathbb{K}} \beta \cdot x, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathbf{V};$

4° $1 \cdot x = x, \quad 1 \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathbf{V}.$

На овај начин, можемо дефинисати векторски простор који је одређен уређеним паром $(\mathbf{V}, \mathbb{K})$ тако да унутрашња бинарна операција „+” и спољашња бинарна операција „·” не морају стриктно представљати сабирање, тј. множење у виду своје стандардне дефиниције, већ то могу бити било које операције које задовољавају наведене услове. Другим речима, векторски простор $\mathbf{V}$ би био потпуно дефинисан ако је:

(i) $\mathbf{V}$ непразан скуп (чије елементе називамо векторима);

(ii) $\mathbb{K}$ поље (чије елементе називамо скаларима);

[3] Niels Henrik Abel (1802-1829)

(iii) у скупу $\mathbf{V}$ дефинисана бинарна операција $+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \ \rightarrow \ \mathbf{V}$ таква да је $(V,+)$ Абелова група;

(iv) дефинисана спољашња операција $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbf{V} \ \rightarrow \ \mathbf{V}$ таква да важе тачке (1° - 4°).

Иначе, како је већ претходно приказано, уобичајене ознаке скалара су мала слова грчког алфабета $(\alpha, \beta, \lambda, \xi,\ ...)$, а у случају вектора мала слова алфабета $(a, b, k, n, ...)$. Такође, ради лакшег записа, у даљем разматрању ознаке $(+_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$, биће замењене са $(+, \cdot)$, иако ће се чак и „$\cdot$“ изостављати, те ће запис $\alpha +_{\mathbb{K}} \beta \cdot_{\mathbb{K}} \gamma$ бити замењен са $\alpha + \beta\gamma$.

Уколико векторски простор $\mathbf{V}$ узимамо такав да нам је $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$, кажемо да је он **реалан векторски простор**, у ознаци $\mathbf{V}(\mathbb{R})$. Ако је, пак, $\mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$, кажемо да је он **комплексан векторски простор**, у ознаци $\mathbf{V}(\mathbb{C})$.
Коначно, као олакшање при рачунању са векторима, директно из дефиниције векторског простора, имамо следеће:

1. $0 \cdot x = o, \qquad \forall x \in \mathbf{V};$
2. $\xi 0 = 0;$
3. $\xi \neq 0 \wedge x \neq o \Rightarrow \xi x \neq o;$
4. $(-1)x = -x, \qquad \forall x \in \mathbf{V};$
5. $(-\xi x) = -(\xi x) = \xi(-x), \qquad \forall x \in \mathbf{V};$
6. $(\xi - \eta)x = \xi x - \eta x, \qquad \forall x \in \mathbf{V};$
7. $\xi(x - y) = \xi x - \xi y, \qquad \forall x, y \in \mathbf{V},$

тако да важи за све $\xi, \eta \in \mathbb{K}$, и где су $0 \in \mathbb{K}$ и $o \in \mathbf{V}$.

Дефиниција 2.1.2. *Функција $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ између два векторска простора над истим пољем скалара $\mathbb{K}$ се назива* **линеарном** *ако је*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{K},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Често, при случају линеарног пресликавања $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ између векторских простора $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, уместо $A(x)$ користићемо ознаку Ax и уместо израза линеарна функција, тј. линеарно пресликавање, користићемо термин *линеарни оператор*. Уколико важи да је $\mathbf{Y} \equiv \mathbb{K}$, тада говоримо о *линеарном функционалу* или *линеарној функционели* $f^* : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$.

Даље, помоћу овако дефинисаних структура, са $N(A) = \ker(A) \overset{\text{деф}}{=} \{x \in \mathbf{X} \mid Ax = 0\}$ ћемо обележавати *језгро линеарног оператора*, док са друге стране, $R(A) \overset{\text{деф}}{=} \{Ax \mid x \in \mathbf{X}\}$ ће нам представљати другу битну ставку - *слику линеарног оператора*.

Дефиниција 2.1.3. *Нека је $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ произвољан коначан скуп вектора у векторском простору* $\mathbf{X}$*. Суму*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i, \quad a_i \in \mathbb{K}$$

зовемо **линеарном комбинацијом** *вектора тог скупа, а елементе a_i* **коефицијентима** *линеарне комбинације.*

Дефиниција 2.1.4. *За коначан скуп вектора $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ кажемо да је* **линеарно независан** *ако*

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i = 0 \implies i = 0, \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\},$$

то јест ако ниједна линеарна комбинација вектора није идентички једнака нули, осим у случају када су сви коефицијенти нуле. Обратно, скуп је **линеарно зависан** *уколико није линеарно независан, тј. ако постоји колекција коефицијената $a_1, a_2, ..., a_n$ који нису нула, таква да је $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ix_i = 0$.*

Дефиниција 2.1.5. *Бесконачан скуп вектора $\{x_1, x_2, ...\}$ је* **линеарно независан** *уколико је сваки коначан подскуп таквог скупа вектора линеарно независан. Овакав скуп је* **линеарно зависан** *ако није линеарно независан, тј. ако постоји коначан подскуп $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ такав да је он линеарно зависан.*

Свакако, треба имати на уму и чињеницу да је коначан скуп вектора линеарно независан ако и само ако се један од вектора тог скупа може представити у облику линеарне комбинације осталих вектора истог скупа.

Дефиниција 2.1.6. *За произвољан непразан скуп A у векторском простору* $\mathbf{V}$*, скуп свих могућих коначних линеарних комбинација вектора из A, односно*

$$\{x = a_1x_1 + ... + a_nx_n \mid n \in \mathbb{N}; \ \ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}; \ \ x_1, \dots, x_n \in A\}$$

назива се **линеал** *скупа A, и означава са $\mathfrak{Lin}(A)$.*

Дефиниција 2.1.7. *Линеарно независан скуп вектора A назива се* **Хамеловим**[4] **базисом** *векторског простора* $\mathbf{V}$ *ако се линеал $\mathfrak{Lin}(A)$ скупа A поклапа са целим простором* $\mathbf{V}$*, односно ако се сваки вектор $x \in \mathbf{V}$ може приказати као линеарна комбинација вектора скупа A.*

Hamel-ов базис, горе дефинисан, назива се једноставније **база векторског простора V**. То је уређен, линеарно независан скуп вектора из $\mathbf{V}$ који генерише $\mathbf{V}$. Како су појмови еквивалентни, једнако ће бити коришћени у даљем тексту.

Следећу теорему наводимо без доказа.

Теорема 2.1.1. *Ако је* $\mathbf{X}$ *векторски простор, тада за његове две произвољно одабране базе a и b, биле оне коначне или бесконачне, важи да имају исту кардиналност.*

[4] Georg Karl Wilhelm Hamel (1877-1954)

Коначно, можемо дефинисати последњу ставку која обухвата кључне делове векторског простора.

Дефиниција 2.1.8. *Број вектора било које базе коначно димензионалног векторског простора* $\mathbf{V}$ *назива се* **димензија** *тог векторског простора и означава са* $\mathtt{dim}(\mathbf{V})$.

Векторски простор који има коначну базу назива се *коначно димензионални*. Ако је $\dim(\mathbf{V}) = n$, простор се назива *n-димензионални*. Димензија векторског простора који се састоји само од нула-вектора је $\dim(\{0\}) = 0$.

2.1.2 Векторски потпростори

Дефиниција 2.1.9. *Нека је* $\mathbb{K}$ *поље скалара и нека је* $\mathbf{V}$ *векторски простор над* $\mathbb{K}$. *Ако је* $\mathbf{W}$ *векторски простор над* $\mathbb{K}$ *са истим операцијама као и* $\mathbf{V}$ *такав да представља непразан подскуп скупа* $\mathbf{V}$, *тада кажемо да је* $\mathbf{W}$ **потпростор** *векторског простора* $\mathbf{V}$.

Како по дефиницији нула-вектор припада сваком векторском простору, тада за произвољан векторски простор $\mathbf{V}$, под условом да је $\mathbf{V} \neq \{0\}$, важи да има бар два тзв. *тривијална потпростора* - $(\{0\}, +, \cdot)$ и $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, док све његове друге потпросторе називамо *правим потпросторима*.

Теорема 2.1.2. *Непразан подскуп* $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ *одређује векторски потпростор* $\mathbf{W}$ *векторског простора* $\mathbf{V}$ *над пољем скалара* $\mathbb{K}$ *ако и само ако важи:*

$$(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \in \mathbf{W}, \qquad \forall x, y \in \mathbf{W},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Доказ. За први смер, како знамо да је $\mathbf{W}$ потпростор векторског простора, тривијалне су нам тачке $(1^\circ - 4^\circ)$, као и све тачке које укључују постојање поља скалара, јер појам потпростора обухвата исти тип операција над истим скупом елемената, чиме је тај смер еквиваленције јасан.

За обрнути смер довољно је проверити да ли нула-елемент из $\mathbf{V}$ лежи у $\mathbf{W}$ како би и сам инверз сваког елемента из $\mathbf{W}$ лежао у истом.
Уколико је неки елемент $x \in \mathbf{W}$, онда по претпоставци у $\mathbf{W}$ лежи и комбинација $1 \cdot x + (-1) \cdot x = 0$. Из тога, у истом простору лежи и комбинација $0 \cdot x + (-1) \cdot x = -x$, тј. инверз тог елемента, чиме је $\mathbf{W}$ заиста векторски простор. □

Дефиниција 2.1.10. *Уколико у векторском простору (векторском потпростору)* $\mathbf{X}$ *постоји* n *линеарно независних вектора за било који природан број* n, *такав се векторски простор (векторски потпростор) назива* **бесконачно димензионалним**.

Пример 2.1.1. *Уколико посматрамо скуп* $\mathbf{C}[a,b]$ *непрекидних функција на сегменту* $[a,b]$ *такав да се сабирање и множење скаларом уводе на следећи начин*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad f, g \in \mathbf{C}[a,b], \alpha \in \mathbb{K},$$

тада $\mathbf{C}[a,b]$ *постаје бесконачно димензионални векторски простор у коме улогу нула-елемента игра функција идентички једнака нули.*

Доказ. Посматрајмо елементе

$$x_0 = 1,\ x_1 = t,\ x_2 = t^2,\ \dots,\ x_n = t^n$$

простора $\mathbf{C}[a,b]$, у покушају доказивања њихове линеарне независности. Ако би нека линеарна комбинација $P(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i t^i$ била једнака нули на одсечку $[a,b]$, тада бисмо дошли до закључка да би полином $P(t)$ дефинисан на управо овај начин имао барем $(n+1)$-ну нулу на истом одсечку. У било ком пољу, такав полином не може имати више од n нула, сем ако није сâм идентички једнак нули, те добијамо линеарну независност монома $t^i, i \in [0,n]$, у простору $\mathbf{C}[a,b]$. □

2.2 Увод у нормиране просторе

Следећа кључна дефиниција биће представљена на скупу комплексних бројева, тј. у случају када је $\mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$, иако она сâма важи и у случају реалних бројева $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$, када ће, једноставно, ставка конјугованих парова бити изостављена.

Дефиниција 2.2.1. *Нека је* $\mathbf{X}$ *векторски простор над пољем скалара* $\mathbb{K}$ *такав да функција*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \ :\ \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbb{C}$$

за све $x, y, z \in \mathbf{X}$, *и све* $\lambda \in \mathbb{K}$ *има особине*

1° $\langle x + y, z \rangle = \langle x + z \rangle + \langle y + z \rangle$;

2° $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$;

3° $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

4° $\langle x, x \rangle \geq 0$;

5° $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Пресликавање тим путем дефинисано називамо **скаларним производом**, *а векторски простор овако дефинисан називамо* **пред-Хилбертовим** *или* **унитарним простором**.

Међутим, ове особине нису једине важне при дефинисању скаларног производа неког векторског простора. Следеће теореме заокружују основу овако дефинисаног система.

Теорема 2.2.1. *(неједнакост Коши[5]-Шварц[6]-Буњаковског[7] [КШБ]) Нека је* $(\mathbf{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *векторски простор на коме је дефинисан скаларни производ. Тада, за све* $x, y \in \mathbf{X}$ *важи:*

$$\langle x \cdot y \rangle^2 \leq \langle x \cdot x \rangle \langle y \cdot y \rangle,$$

тако да једнакост важи акко су x *и* y *линеарно зависни.*

[5] Augustin Louis Cauchy (1789-1857)
[6] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)
[7] Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804-1889)

Доказ. Прво, посматрајмо скаларни производ елемената

$$\langle x+\lambda y\rangle \cdot \langle x+\lambda y\rangle \geq 0,$$

за који важи да је позитиван за све $x, y \in \mathbf{X}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Дакле, сређивањем добијамо

$$\langle x \cdot x\rangle + 2\lambda\langle x \cdot y\rangle + \lambda^2\langle y \cdot y\rangle \geq 0,$$

те, уколико посматрамо квадратну једначину по λ, тачније њену дискриминанту, имамо:

$$D_\lambda = 4\langle x \cdot y\rangle^2 - 4\langle x \cdot x\rangle\langle y \cdot y\rangle \leq 0,$$

која мора бити непозитивна да би почетна релација била одржива, из чега директно следи доказ тражене неједнакости. □

Теорема 2.2.2. *(неједнакост Минковског[8]) Ако је $(\mathbf{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ унитаран простор, тада за све $x, y \in \mathbf{X}$ важи:*

$$\sqrt{\langle x+y\rangle \cdot \langle x+y\rangle} \leq \sqrt{\langle x \cdot y\rangle} + \sqrt{\langle x \cdot y\rangle}.$$

Доказ. Користећи претходну теорему (неједнакост КШБ), имамо:

$$\begin{aligned}\langle x+y\rangle \cdot \langle x+y\rangle &= \langle x \cdot x\rangle + 2\langle x \cdot y\rangle + \langle y \cdot y\rangle \\ &\leq \langle x \cdot x\rangle + 2\sqrt{\langle x \cdot x\rangle\langle y \cdot y\rangle} + \langle y \cdot y\rangle \\ &= \left\langle \sqrt{x \cdot x} + \sqrt{y \cdot y} \right\rangle^2\end{aligned}$$

одакле, из чињенице да су обе стране неједнакости позитивне, кореновањем долазимо до тражене релације. □

Ове две доказане чињенице омогућују да у векторском простору са скаларним производом уведемо дефиницију која нам је једна од фундаменталних за даљи рад.

Дефиниција 2.2.2. *Нека је $\mathbf{X}$ векторски простор над пољем $\mathbb{K}$. Пресликавање $\|\cdot\| : \mathbf{X} \to [0, +\infty)$, такво да је $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in \mathbf{X}$, које има особине*

1° $\|x\| = 0 \iff x = 0$; *(***недегенерисаност***)*

2° $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$; *(***мултипликативност***)*

3° $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *(***субадитивност / неједнакост троугла***)*

назива се **нормом** *на векторском простору $\mathbf{X}$, а простор $\mathbf{X}$ заједно са датом нормом зове се* **нормиран векторски простор** *или краће* **нормиран простор**.

Некада ћемо термин норме на неком векторском простору $\mathbf{X}$ заменити термином *индуковане норме* тог простора $\mathbf{X}$.

Напомена 2.2.1.

[8] Hermann Minkowski (1864-1909)

Осим уколико се експлицитно не нагласи другачије, под нормом $\mathbb{K}^d$ се подразумева тзв. Еуклидова норма индукована горњим скаларним производом, притом говорећи о пољу скалара $\mathbb{K}$.

Пре него што наставимо са дефинисањем нових појмова, вредело би застати мало и осмотрити следећи интересантан пример.

Пример 2.2.1. *Скуп свих реалних, ограничених низова, често познатији као ℓ^∞, је нормиран векторски простор са нормом*

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Доказ. Како апсолутна вредност представља пресликавање скупа реалних бројева $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, функција $\|\cdot\|_\infty$ је увек позитивна. Даље, уколико за било које $(x_n) \in \ell^\infty$ важи да је $\|(x_n)_\infty\| = 0$, тада би морао и сваки елемент низа (x_n) да буде идентички једнак нули, јер је и супремум, тј. најмања горња граница скупа $\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ једнака нули.

Такође, коришћењем основних особина супремума и апсолутне вредности, можемо показати да за произвољне низове $(x_n), (y_n) \in \ell^\infty$ и произвољан комплексан број $\lambda \in \mathbb{C}$ важи мултипликативност:

$$\begin{aligned}\|(\lambda x_n)\|_\infty &= \sup\{|\lambda x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}\\ &= \sup\{|\lambda|\,|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}\\ &= |\lambda| \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}\\ &= |\lambda|\,\|(x_n)\|_\infty ,\end{aligned}$$

као и субадитивност:

$$\begin{aligned}\|(x_n + y_n)\|_\infty &= \sup\{|x_n + y_n| \mid n \in \mathbb{N}\}\\ &\le \sup\{|x_n| + |y_n| \mid n \in \mathbb{N}\}\\ &\le \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|y_n| \mid n \in \mathbb{N}\}\\ &= \|(x_n)\|_\infty + \|(y_n)\|_\infty .\end{aligned}$$

Како норма $\|(x_n)\|_\infty$ задовољава све потребне критеријуме $(1^\circ - 3^\circ)$, ℓ^∞ је нормиран векторски простор. □

У наставку, сложенији појмови биће базирани на неким дефиницијама које су од кључног значаја за постојање истих. Међутим, дубоко залажење у дефинисање таквих појмова представљало би оштру дигресију, незначајну за даљи ток рада, иако саме појмове морамо објаснити како би наставак био појмљив. Дакле, само грубе ивице ћемо представити у даљем току рада.

Наиме, пример представља следећа веома битна дефиниција.

Дефиниција 2.2.3. *Нека је $\mathbf{X}$ произвољан скуп. Функцију $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to [0, +\infty)$ која задовољава да за све $x, y, z \in \mathbf{X}$ важе следеће особине:*

1^* $d(x, y) \ge 0$;

2^* $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

3^* $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in \mathbf{X}$;

4^* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{X}$ **(неједнакост троугла)**;

називамо **метриком**, *а* $(\mathbf{X}, d)$ **метричким простором** *на датом скупу* $\mathbf{X}$.

Само обележавање метричког простора, из јасноће о којој се метрици d ради, бива упрошћено са уређеног пара на, једноставно: $\mathbf{X}$. Уколико бисмо се подсетили теорије конвергенције у скупу реалних бројева $\mathbb{R}$, наишли бисмо на чињеницу да важну улогу у тој теорији игра Кошијев принцип конвергенције. Сам појам таквог низа се може увести и у произвољном метричком простору, иако тај принцип не ступа на снагу у свим случајевима. Наиме,

Дефиниција 2.2.4. *Низ* (x_n) *у метричком простору* $\mathbf{X}$ *је Кошијев ако за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји неко* $n_0 \in \mathbb{N}$, *такво да је* $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ *за све* $m, n \geq n_0$.

Симболички, низ (x_n) је Кошијев уколико:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon).$$

Ова дефиниција повлачи низ ставова:

Став 2.2.1. *Сваки конвергентан низ је Кошијев.*

Доказ. Довољно је да посматрамо скуп реалних бројева $\mathbb{R}$. Нека је (x_n) произвољан Кошијев низ и нека су $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $x \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ произвољни. Такође, нека је $n_0 \in \mathbb{N}$ изабрано тако да је $d(x_n - x) < \varepsilon/2$ за $n > n_0$. Тада, за све $m, n > n_0$, користећи наведену тачку (4^*), важи:

$$\begin{aligned} d(x_m - x_n) &\leq d(x_m - x) + d(x_n - x) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon \ , \end{aligned}$$

чиме је низ (x_n) заиста Кошијев. □

Став 2.2.2. *Сваки Кошијев низ је ограничен.*

Ради краткости, читаоцу је препуштен доказ овог става, са идејом да се фиксирањем m и повећавањем ε-околине до закључка може доћи лако.

Коначно, долазимо до следеће важне дефиниције.

Дефиниција 2.2.5. *Метрички простор се назива* **комплетним** *уколико у њему сваки Кошијев низ конвергира.*

Јасно је да нама најближа поља $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ представљају основне примере комплетних простора дефинисаних у својој метрици. Ова дефиниција биће основ за теорему да простори дефинисани у следећем поглављу такође бивају комплетни.

Дефиниција 2.2.6. *Комплетан нормиран простор назива се* **Банаховим**[9] *простором.*

Овиме ћемо затворити ово поглавље, укључујући сада могућност да се дефинише појам коме ће бити посвећено цело поглавље овог рада.

[9]Stefan Banach (1892-1945)

3 ℓ^p простори

У овом тренутку, питање које нам природно пада на памет би могло бити: „Да ли су дефиниције метричког, нормираног и унитарног простора еквивалентне?" Или, барем, како смо досад дефинисали, можемо приметити да је:

унитаран простор $\Rightarrow$ нормиран простор $\Rightarrow$ метрички простор,

али да ли се могу ове импликације обрнути? Укратко, не. Узмимо за пример скуп $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Иако овај скуп засигурно представља метрички простор са веома познатом метриком $d(a, b) = |a - b|$, за било које $a, b \in A$, из недостатка адитивног инверза ($0 \notin \mathbb{A}$), он није чак ни векторски простор, а камоли нормиран, или пак, унитаран.

Дакле, још нам је преостало да видимо да ли нормирани простор имплицира унитаран. Поново, свакако то није случај. Како бисмо верификовали овај исказ, потребно је обратити се историјски битном скупу већ поменутих ℓ^p простора.

3.1 Дефиниција и основне особине ℓ^p простора

Започнимо једном веома битном теоремом која представља један веома познат закон.

Теорема 3.1.1. *(Правило паралелограма) Нормиран линеарни простор* $\mathbf{X}$ *је унитаран ако и само ако њему додељена норма* $\|\cdot\|$ *задовољава једнакост паралелограма:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

за све $x, y \in \mathbf{X}$.

Доказ. Претпоставимо да је $\mathbf{X}$ унитаран векторски простор са нормом $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$, за све $u \in \mathbf{X}$. Уколико важи $x, y \in \mathbf{X}$, тада је

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&\quad + \langle x, x\rangle + \langle x, -y\rangle + \langle -y, x\rangle + \langle -y, -y\rangle \\
&= 2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle + (\langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle) \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.
\end{aligned}$$

Дакле, норма $\|\cdot\|$ задовољава једнакост паралелограма. Докажимо сада другу страну еквиваленције. Претпоставимо да је $\mathbf{X}$ нормиран векторски простор са нормом која задовољава једнакост паралелограма. Ако дефинишемо пресликавање $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ тако да важи:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right),$$

за све $x, y \in \mathbf{X}$, онда бисмо желели да покажемо да је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на $\mathbf{X}$. Испрва, уочимо да

$$\langle x, x\rangle = \frac{1}{4}(\|2x\|^2 - \|0\|^2),$$

за све $x \in \mathbf{X}$.

Даље, како је

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2\right)\\ &= \langle y, x\rangle\end{aligned}$$

видимо да је функција $\langle \cdot, \cdot \rangle$ такође и симетрична.

Уколико приметимо да за све $x, y, z \in \mathbf{X}$ из једнакости паралелограма важи:

$$\|(y+x)+z\|^2 + \|(y+x)-z\|^2 = 2\|y+x\|^2 + 2\|z\|^2, \tag{1}$$

као и

$$\|(y-x)+z\|^2 + \|(y-x)-z\|^2 = 2\|y-x\|^2 + 2\|z\|^2. \tag{2}$$

Одузимањем једначине (2) од једначине (1), видимо да је:

$$\begin{aligned}2\left(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2\right) &= \|(y+z)+x\|^2 - \|(y+z)-x\|^2\\ &\quad + \|(y-z)+x\|^2 - \|(y-z)-x\|^2,\end{aligned}$$

што сређивањем доводи до

$$2\langle y, x\rangle = \langle y+z, x\rangle + \langle y-z, x\rangle. \tag{3}$$

Ако је $z = y$, тада је и $2\langle y, x\rangle = \langle 2y, x\rangle$, јер

$$\langle 0, y\rangle = \langle x \cdot 0, y\rangle \Rightarrow \frac{1}{4}(\|0+y\| - \|0-y\|) = 0.$$

Што се тиче мултипликативног својства, користићемо се принципом математичке индукције.

Претпоставимо да постоји неки природан број n, $n > 2$, такав да за сваки природан број k, $1 \leq k \leq n$, важи:

$$k\langle y, x\rangle = \langle ky, x\rangle.$$

Тада, као директну последицу једначине (3), имамо:

$$\begin{aligned}\langle (n+1)y, x\rangle &= \langle ny + y, x\rangle\\ &= 2\langle ny, x\rangle - \langle ny - y, x\rangle\\ &= 2n\langle y, x\rangle - (n-1)\langle y, x\rangle\\ &= (n+1)\langle y, x\rangle.\end{aligned}$$

Стога, функција $\langle \cdot, \cdot \rangle$ задовољава мултипликативни критеријум за све природне бројеве.

Са друге стране, како је:

$$\begin{aligned}\langle -x, y\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\|-x+y\| - \|-x-y\|\Big)\\ &= \frac{1}{4}\Big(\|x-y\| - \|x+y\|\Big)\\ &= -1 \cdot \langle x, y\rangle,\end{aligned}$$

онда функција $\langle \cdot, \cdot \rangle$ такође задовољава критеријум и за сав скуп целих бројева. Покушајмо да видимо шта се дешава за остатак.

Испрва, докажимо једну лему.

Лема 3.1.1. *Нека је* $\mathbf{X}$ *нормирани простор. Функција* $\| \cdot \| : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *која представља норму таквог нормираног простора је непрекидна.*

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно, и бирајмо δ тако да је $\delta = \varepsilon$. Одаберимо сада неку тачку $a \in \mathbf{X}$ такву да за било које $x \in \mathbf{X}$ важи $d(x, a) = \|x - a\|$. Обрнута неједнакост троугла нам тада даје:

$$d\Big(\|x\|, \|a\|\Big) = \Big|\|x\| - \|a\|\Big| \le \|x - a\| < \varepsilon.$$

Дакле, норма $\| \cdot \|$ је непрекидна на $\mathbf{X}$. □

Претпоставимо да је r неки рационалан број. Тада постоје цео број m и природан број n такви да је $r = \dfrac{m}{n}$.

Како је $n\dfrac{m}{n} = m$, тада је

$$m\langle x, y\rangle = n\frac{m}{n}\langle x, y\rangle = \Big\langle n\frac{m}{n}x, y\Big\rangle = n\Big\langle \frac{m}{n}x, y\Big\rangle,$$

што доводи до закључка да је $\dfrac{m}{n}\langle x, y\rangle = \Big\langle \dfrac{m}{n}x, y\Big\rangle$, то јест, прецизније, до $r\langle x, y\rangle = \langle rx, y\rangle$.

Даље, како је скуп рационалних бројева $\mathbb{Q}$ густ у скупу реалних бројева $\mathbb{R}$, онда за било које a из $\mathbb{R}$, можемо наћи низ (r_n) рационалних бројева који конвергира ка a. Уколико узмемо прозивољно $\varepsilon > 0$ и одаберемо $N \in \mathbb{N}$ тако да је $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{\big|\langle x, y\rangle\big| + 1}$ испуњено за све $n > N$, онда, како је кодомен норме $\langle \cdot, \cdot \rangle$ једнак $\mathbb{R}$, примећујемо да за било које $x, y \in X$ важи:

$$\begin{aligned} d\Big(\langle a_n x, y\rangle, a\langle x, y\rangle\Big) &= \Big|\langle a_n x, y\rangle - a\langle x, y\rangle\Big| \\ &= \Big|a_n\langle x, y\rangle - a\langle x, y\rangle\Big| \\ &= \langle x, y\rangle|a_n - a| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Такође, Лема 2.0.1 имплицира да је $lim_{n\to\infty}\langle a_n x, y\rangle = \langle ax, y\rangle$. Због тога, из јединствености граничне вредности, закључујемо да је и $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$.

Финални корак овога доказа би била провера дистрибутивног својства. Уколико одаберемо нека три члана $x, y, z \in \mathbf{X}$ и неке $u, v \in \mathbf{X}$ дате са

$$u = \frac{x+z}{2}\ ; \qquad v = \frac{x-z}{2}\ ,$$

имамо да важи:

$$\begin{aligned} \langle x + z, y\rangle &= \langle 2u, y\rangle \\ &= \langle u + v, y\rangle + \langle u - v, y\rangle \\ &= \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle, \end{aligned}$$

где смо у првом кораку употребили једначину (3).

Коначно, како норма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ задовољава свих пет потребних критеријума закључујемо да је $\mathbf{X}$ заиста унитаран простор. □

Као што се дâ приметити, доказ теореме је примењен и ограничен на скупу реалних бројева. За оне који су мало више заинтересовани, књига *Introduction to Topology and Modern Analysis* под ознаком [9] у литератури приказује доказ теореме паралелограма за скуп комплексних бројева. Стога, остатак овог рада биће ослоњен на чињеницу да је правило паралелограма валидно и за комплексни нормирани векторски простор.

Напокон, време је и за дефинисање сâмог ℓ^p простора као и његових структура.

ℓ^p простори представљају класу нормираних векторских простора који су веома важни у области функционалне анализе.

Дефиниција 3.1.1. *За све $p \in \mathbb{R}$, где је $p > 1$, ℓ^p је скуп свих низова (x_n), таквих да ред*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$$

конвергира.

Дефиниција 3.1.2. *Стандардна норма за ℓ^p је дата са*

$$\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

за све $(x_n) \in \ell^p$.

3.2 Примери и својства ℓ^p простора. ℓ^2 простор

Истраживање ℓ^p простора започећемо врло конкретним примерима када је $p = 1$, то јест $p = 2$. Наиме, испрва ћемо се бавити просторима ℓ^1 и ℓ^2.

Пример 3.2.1. *(ℓ^1 простор)*

Овај пример ће нам показати да неки ℓ^p простори представљају нормирани векторски простор, али не и унитаран.

Прво, лако је приметити да својства апсолутне вредности и сумирања дозвољавају да је норма $\|\cdot\|_1$ ненегативна, као и недегенеративна (поштује тачку (1°)). Са друге стране, како бисмо показали да поштује и тачку (2°), можемо приметити да за било које $\lambda \in \mathbb{C}$ и $(x_n) \in \ell^1$ важи:

$$\|\lambda x_n\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|\ |x_n| = |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = |\lambda|\ \big\|(x_n)\big\|_1.$$

Коначно, тачка (3°) иде, такође, заиста лако, јер из особина функције апсолутне вредности имамо:

$$\big\|(x_n + y_n)\big\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|(x_n)\|_1 + \|(y_n)\|_1,$$

чиме је доказано да је ℓ^1 нормирани векторски простор јер задовољава сва 3 критеријума.

Са друге стране, посматраћемо контрапример за унитаран простор задат са низовима $(x_n) = \left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ и $(y_n) = \left(\dfrac{2}{3^{n-1}}\right)$. Како су и (x_n) и (y_n) геометријски низови, веома простим рачуном долазимо до закључка да је $\|(x_n)\|_1 = 2$, $\|(y_n)\|_1 = 3$, $\big\|(x_n - y_n)\big\|_1 = \frac{4}{3}$, као и $\big\|(x_n + y_n)\big\|_1 = 5$. Даљим квадрирањем, можемо приметити да је

$$2\|(x_n)\|_1^2 + 2\|(y_n)\|_1^2 = 22,$$

што, уколико посматрамо правило паралелограма које нам даје $\big\|(x_n + y_n)\big\|_1^2 + \big\|(x_n - y_n)\big\|_1^2 = \frac{239}{9} \neq 22$ није одрживо, те закључујемо да ℓ^1 није унитаран простор.

Сада је сасвим јасно да појам простора у коме је дефинисан скаларни производ никако није еквивалентан појму нормираног простора, већ представља његов специјалан случај.

Међутим, посматрајмо сада простор у коме је $p = 2$, који ће се испоставити да је најбитнији од ових простора за наш рад.

Пример 3.2.2. *(ℓ^2 простор)*

Прво, како је ℓ^2 простор који припада скупу ℓ^p простора, можемо претпоставити да је то нормиран векторски простор, а затим проверити једнакост паралелограма како бисмо доказали да је он, такође, унитаран.

Нека су дати произвољни низови $(a_n), (b_n) \in \ell^2$. Тада је:

$$\begin{aligned}
\big\|(a_n + b_n)_2^2\big\| + \big\|(a_n - b_n)_2^2\big\| &= \sum_{n=1}^{\infty} \big|a_n + b_n\big|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \big|a_n - b_n\big|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\big|a_n + b_n\big|^2 + \big|a_n - b_n\big|^2\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2 + a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(2a_n^2 + 2b_n^2\right) \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \\
&= 2\|a_n\|_2^2 + 2\|b_n\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Како норма $\|\cdot\|_2$ задовољава правило паралелограма, ℓ^2 је, заиста, унитаран векторски простор.

Интересантан податак је да је сâм појам ℓ^p простора настао ни од кога другог већ од сâмог Хилберта, па како је он умео да говори о тим просторима током својих предавања, из тога да баш ℓ^2 простор „одудара од својих вршњака”, његови ученици су често њега називали Хилбертовим простором, од кога је касније и настала кованица за тему овог рада.

Последњи пример који наводимо такође, у неку руку, представља специјалан случај ових простора, тј. када је $p = +\infty$.

Пример 3.2.3. ℓ^∞ *простор*

Као што је већ било виђено у Примеру 2.2.1, овај простор дефинишемо као нормиран простор код кога улогу норме игра функција:

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Сасвим је лако видети да је конвергенција у ℓ^∞ иста као и равномерна конвергенција у скупу природних бројева $\mathbb{N}$, те је и са̂м ℓ^∞ простор комплетан. Важно је напоменути да ℓ^∞ има два сасвим природна, затворена потпростора $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}_0$, о којима ће бити речи у следећем поглављу.

Време је да се позабавимо својствима ових простора. Испрва, показаћемо да теорема коју смо раније доказали (Теорема 2.2.2), познатија као неједнакост Минковског, представља фундаменталну особину свих ℓ^p простора. Међутим, како бисмо доказали ову неједнакост, дефинишимо прво пар ситница.

Дефиниција 3.2.1. *Функција* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *је* **конкавна** *уколико задовољава неједнакост:*

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq f\left(\lambda x + (1 - \lambda y)\right),$$

за све $x, y \in \mathbb{R}_+$ *и све* $\lambda \in [0,1]$.

Са друге стране, за доказ потребна нам је и

Лема 3.2.1. *Нека је* $g(x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *конкавна функција. Ако за функцију* $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ *важи да је*

$$f(x,y) = y\ g\left(\frac{x}{y}\right),$$

тада је неједнакост

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n y_i\right)$$

тачна за све позитивне реалне бројеве $x_1, x_2, \dots, x_n$ *и* $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Доказ. За доказ ове леме користићемо се индукцијом. Нека је $\lambda = \dfrac{y_1}{y_1+y_2}$. Тада, из тога да је f конкавна, за базу индукције имамо:

$$\begin{aligned}
f(x_1, y_1) &= y_1\ \ g\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + y_2\ \ g\left(\frac{x_2}{y_2}\right) \\
&= (y_1+y_2)\ \ \left[\frac{y_1}{y_1+y_2}\, g\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \frac{y_2}{y_1+y_2}\, g\left(\frac{x_2}{y_2}\right)\right] \\
&= (y_1+y_2)\left[\lambda g\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + (1-\lambda) g\left(\frac{x_2}{y_2}\right)\right] \\
&\leq (y_1+y_2) g\left[\frac{x_1 y_1}{(y_1+y_2)y_1} + \frac{y_2 x_2}{(y_1+y_2)y_2}\right] \\
&= (y_1+y_2)\ g\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right) \\
&= f(x_1+x_2, y_1+y_2),
\end{aligned}$$

јер је $1-\lambda = \dfrac{y_2}{y_1+y_2}$.

Као индукциону хипотезу, претпоставимо да неједнакост

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i,y_i) \le f\left(\sum_{i=1}^{k} x_i, \sum_{i=1}^{k} y_i\right)$$

важи за све природне бројеве k мање од неког природног броја n.

Тада је:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i) &= f(x_n,y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,y_i)\\ &\le f(x_n,y_n) + f\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i, \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)\\ &\le f\left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i, y_n + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)\\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} y_i\right),\end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

Сада смо напокон спремни и да докажемо тражену теорему.

Теорема 3.2.1. *(неједнакост Минковског за низове) За свако $p \ge 1$ и све реалне, односно комплексне низове (x_n) и (y_n) важи*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказ. За доказивање ове неједнакости посматраћемо три случаја:

1° *низови (x_n) и (y_n) садрже само позитивне чланове*

У овом случају, дефинишимо помоћне низове (u_k) и (v_k) са

$$u_k = x_k^p \quad ; v_k = y_k^p ,$$

за све $k \in \mathbb{N}$.

Узмимо сада у обзир функцију дату са $g(u) = (1+u^{1/p})^p$. Како је други извод ове функције негативан $g^{''}(u) < 0$, знамо да је таква функција конкавна.

Са друге стране, дефинишимо нову функцију $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ тако да је $f(u,v) = v \ g\left(\dfrac{u}{v}\right)$, што малим алгебарским сређивањем даје $f(u,v) = (u^{1/p}, v^{1/p})^p$.

Тада, ако искористимо претходно доказану Лему 3.2.1, знамо да је

$$\sum_{k=1}^{n}\left(u_k^{1/p}+v_k^{1/p}\right)\leq\left[\left(\sum_{k=1}^{n}u_k\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}v_k\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{p}. \tag{4}$$

Уколико извучемо p-ти корен из неједнакости (4) уз убацивање низова (x_n) и (y_n) уместо помоћних добијамо:

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p\right]^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

Даље, како су низови (x_n) и (y_n) строго позитивни и како неједнакост (5) важи за све $n\in\mathbb{N}$, са̂ма неједнакост (5) представља неједнакост Минковског за случај 1°:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

2° *чланови низова (x_n) и (y_n) су различити од нуле*

Из неједнакости троугла директно имамо да за све $k\in\mathbb{N}$ важи да је $|x_k+y_k|\leq\big||x_k|+|y_k|\big|$. Одавде следи да је онда и $|x_k+y_k|^p\leq\big||x_k|+|y_k|\big|^p$, па је лако закључити да је тада

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}\big||x_k|+|y_k|\big|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Са друге стране, из неједнакости (5) истим током размишљања имамо да је

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\big||x_k|+|y_k|\big|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

из чега видимо да је и у овом случају заиста задовољена неједнакост Минковског.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

3° *низови (x_k) и (y_k) садрже и нуле*

За доказ овог дела, потребно нам је да конструишемо нове низове $(x_{k,m})$ и $(y_{k,m})$ такве да су:

$$x_{k,m}=\begin{cases}x_k\,, & x_k\neq 0;\\ \frac{1}{km}, & x_k=0,\end{cases}$$

$$y_{k,m}=\begin{cases}y_k\,, & y_k\neq 0;\\ \frac{1}{km}, & y_k=0.\end{cases}$$

Прво што можемо приметити је да како је $\frac{1}{k} \in \ell^p$ за све $p > 1$, тада су и низови $(x_{k,m}), (y_{k,m}) \in \ell^p$. Даље, посматрајмо низове α_m и β_m задате са:

$$(\alpha_m) = \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k,m+}y_{k,m}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

и

$$(\beta_m) = \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k,m}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_{k,m}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

Неједнакост (7) нам даје закључак да за све $m \in \mathbb{N}$ је $\alpha_m \leq \beta_m$. Стога је и

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_m \leq \lim_{m\to\infty} \beta_m.$$

За овако изабране низове, знамо да такође важи

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_m = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} \beta_m = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

из чега коначно закључујемо да неједнакост Минковског важи за било које низове $(x_k), (y_k) \in \ell^p$.

□

Ова неједнакост нам омогућава да заиста олако разрешимо проблем доказивања постојања ℓ^p норме, јер нам Минковски говори да норма $\|\cdot\|_p$ задовољава неједнакост троугла. Што се тиче ненегативности и недегенерисаности (тачке $(1^\circ), (2^\circ)$), својства апсолутне вредности нам гарантују тачност обеју тачака. Дакле, једино је потребно доказати мултпликативна својства норми, што, такође, иде доста лако.

Уколико одаберемо неко $\lambda \in \mathbb{C}$ и неки низ $(x_n) \in \ell^p$, тада је:

$$\begin{aligned}
\|(\lambda x_n)\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^p |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|\lambda|^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \, \|(x_n)\|_p ,
\end{aligned}$$

што представља довољан услов за закључак да су сви ℓ^p простори, заиста, нормирани векторски простори.

Дакле, дошли смо до закључка да сви ℓ^p простори деле заједничку особину - постојање норме. Међутим, то не значи да сви имају и исте особине. Напротив, као што је било већ изречено у анегдоти, један посебан случај се истиче - ℓ^2. Наиме, ℓ^2 је једини ℓ^p простор који је унитаран. Ову појаву описује следећа теорема.

Теорема 3.2.2. *Ако је p реалан број већи од 1, тада је ℓ^p унитаран векторски простор ако и само ако је $p = 2$.*

Доказ. Из Примера 3.2.2. у коме је описан ℓ^2 простор, знамо да је он унитаран. Дакле, остало је још показати да је $p = 2$ једина вредност броја p за које је ℓ^p унитаран простор. Посматрајмо следеће низове:

$$(x_n) = \{1, 0, 0, 0, \ ... \ , 0, 0, ...\} \quad (y_n) = \{0, 1, 0, 0, \ ... \ , 0, 0, ...\}.$$

Примећујемо да се ови низови састоје од једне јединице и осталих нула, распоређених на приказан начин.

Можемо закључити следеће: оба низа (x_n) и (y_n) припадају скупу ℓ^p, и за њих важи да је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|^p = 1$ за свако p. Одатле, путем правила паралелограма, имамо да је:

$$\begin{gathered} 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{2}{p}} + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{2}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{2}{p}} \\ 2 \cdot 1^{\frac{2}{p}} + 2 \cdot 1^{\frac{2}{p}} = 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} \\ 2 = 2^{\frac{2}{p}} \end{gathered}$$

Како је $2 = 2^{2/p}$ само када је $p = 2$, долазимо до траженог закључка, те је ℓ^2 заиста једини ℓ^p простор који је унитаран. $\square$

Као што се дâ приметити, ℓ^p простори могу бити веома занимљиви, те и њихова својства могу бити таква. До сада смо навели већину за овај рад битних тачака, а затворићемо ово поглавље теоремом о комплетности, за коју ће доказ, иако веома интересантан, бити задржан ради краткости.

Теорема 3.2.3. *Сви ℓ^p простори су комплетни.*

На крају овог поглавља схватили смо појам и поенту дефинисања ℓ^p простора, као и чињеницу да нису сви нормирани и унитарни простори комплетни у односу на метрику индуковану нормом. Жеља да разликујемо оне који су комплетни од оних који нису представља мотивацију иза дефиниција Банахових и Хилбертових простора.

4 Банахови простори

У областима савремене математике, конкретно функционалне анализе, нормирани простори комплетни у односу на своју норму су од великог значаја. У првој глави дефинисали смо Банахове просторе управо као оне нормиране просторе који су комплетни у метрици индукованој нормом.

Сâм назив, Банахови простори су добили по пољском математичару који је увео и извршио систематичну студију над њима у периоду од 1920-1922. године заједно са Ханом[10] и Хелијем[11].

4.1 Основе Банахових простора

Као што је и познато, бавили смо се комплетношћу нормираних простора у другом поглављу. Како нам је то веома битна чињеница, обратићемо пажњу на један вид карактеризације комплетности у нормираним просторима. Сâма структура векторског простора нам дозвољава да правимо релацију између понашања Кошијевих низова и конвергентних редова вектора. Наиме, прво ћемо посматрати нешто што нам је већ помало познато.

Дефиниција 4.1.1. *За векторски ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *у Банаховом простору* $\mathbf{X}$ *кажемо да* **конвергира** *ако и низ његових* **парцијалних сума** $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ *такође конвергира.* **Сумом** *таквог реда називамо граничну вредност његових парцијалних сума у ознаци*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overset{\text{деф}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k \, .$$

Уколико притом важи да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ *конвергира, тада кажемо да је ред* **апсолутно конвергентан***.*

Сада можемо повезати ово са следећом лемом, која нам користи за доказивање битне неједнакости која важи за ове просторе.

Лема 4.1.1. *Нормиран простор* $\mathbf{X}$ *је комплетан, тј. Банахов ако и само ако сви његови апсолутно конвергентни редови ковергирају.*

Доказ. Бавићемо се само десним смером импликације, јер је он доста интересантнији, а заинтересовани читаоци могу пробати и да докажу супротан смер.

Претпоставимо да сваки апсолутно конвергентан ред конвергира у $\mathbf{X}$. Затим, нека је (x_n), $n \in \mathbb{N}$ Кошијев низ. Како бисмо показали да је $\mathbf{X}$ комплетан, потребно је доказати да низ (x_n) конвергира.

За свако $k \geq 1$ можемо наћи n_k такво да је

$$\|x_n - x_{n'}\| \leq 2^{-k}$$

за све $n, n' \geq n_k$.

[10] Hans Hahn (1879-1934)

[11] Eduard Helly (1884-1943)

Даље, уколико дефинишемо низ y_k тако да је почетни члан дат са

$$y_1 = x_{n_1},$$

а остали чланови са

$$y_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$$

за $k \geq 2$, онда имамо да је

$$\|y_k\| \leq 2^{-k},$$

и то тако да је ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ апсолутно конвергентан, те и конвергентан по нашој претпоставци.

Такође, имамо да су наше парцијалне суме

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} y_i$$

једнаке одговарајућим елементима реда x_{n_k}. Како ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ конвергира, знамо да

$$s_k \to s$$

када $k \to \infty$. Дакле, тада и $x_{n_k} \to s$ када $k \to \infty$.

На овај начин, дошли смо до закључка да подниз оригиналног Кошијевог низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира.

Сада је сасвим лако показати да онда и оригиналан низ конвергира, јер за произвољно $\varepsilon > 0$ можемо наћи неко n_0 такво да је

$$\|x_n - x_{n'}\| \leq \varepsilon/2$$

за све $n, n' \geq n_0$, и можемо наћи k такво да за $n_k \geq n_0$ важи

$$\|x_{n_k} - s\| \leq \varepsilon/2.$$

Сада је сасвим јасно да, из ових двеју неједнакости, користећи се истим током размишљања као и при доказивању Става 2.2.1, имамо да за све $n \geq n_0$ заиста важи тражено тврђење. □

Сада смо спремни и да прикажемо један став који обележава основ Банахових простора.

Став 4.1.1. *(Основна неједнакост Банахових простора) Ако је* $\mathbf{X}$ *Банахов простор, тада за сваки апсолутно конвергентан ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *у њему важи*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|. \tag{8}$$

Доказ. Доказ основне неједнакости (8) иде веома лако, јер уколико искористимо способност непрекидности норми, имамо:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\| &= \left\|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k\right\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|x_k\| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|.\end{aligned}$$

□

4.2 Класични Банахови простори

Историјски, ови простори, грубо речено, представљају просторе који су били познати Банаху. Ако је слушати Дистела[12], међутим, класични Банахови простори су они дефинисани у књизи ,,Линеарни оператори", обележеној са [5] у литератури.

Сада можемо прећи на примере оваквих простора.

Пример 4.2.1. $\mathbb{K}^n$ *простор*

Прво, досад нам је познато да поље скалара $\mathbb{K}$ представља један нормиран простор. Норма тог простора је дефинисана са

$$\|x\| \overset{\text{деф}}{=} |x|,$$

уколико причамо о неком реалном броју $x \in \mathbb{R}$, а са

$$\|z\| \overset{\text{деф}}{=} |z|,$$

ако је реч о неком комплексном броју $z \in \mathbb{C}$. Сада је сасвим јасно да овим начином задате норме представљају метрику којом смо се већ претходно бавили, те је, заправо, поље скалара најједноставнији пример Банаховог простора.

Пример 4.2.2. L^p *простори*

Ови простори представљају један веома битан појам за развој функционалне анализе. Међутим, како су битни, тако су и веома опширни, те у овоме раду неће бити дубоко објашњавани, него ћемо само дати неке основне особине.

L^p простори, познати и као Лебегеови[13] простори, формирају веома битну класу у функционалној анализи као и у тополошким векторским просторима.

[12] Joseph Diestel у свом делу ,,Редови и низови у Банаховим просторима" (Sequences and series in Banach spaces, 1984) говори о класичним просторима и како су они добили назив.

[13] Henri Lebesgue (1875-1941)

Ови простори се могу дефинисати као простори функција чији је p-ти степен апсолутне вредности Лебеге-интеграбилан, или ако је $p \in [1, +\infty]$, за фиксиран нормом комплексан мерљив простор (S, σ, μ), норма тих простора је задата са

$$\|f\|_p = \left(\int_S |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Напоменућемо једну битну теорему која одређује овај простор и употпуњује ову главу, чији доказ изостављамо.

Теорема 4.2.1. *(Рис[14]-Фишера[15]) $L^{\mathbf{p}}$ је Банахов простор за свако $1 \leq p < +\infty$.*

Пример 4.2.3. *ℓ^p простори*

Овим просторима, као што је и познато, било је посвећено цело треће поглавље, али нама је интересантно следеће: за све $1 \leq p \leq +\infty$, ℓ^p простори представљају само специјалан случај претходно наведених $L^{\mathbf{p}}$ простора, те су сви облици ℓ^p простора комплетни, тј. представљају пример Банахових простора.

Пример 4.2.4. *$\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}_0$ простори*

Док $\mathfrak{c}$ представља простор свих низова који конвергирају, $\mathfrak{c}_0$ представља простор свих низова $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, тако да

$$a_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

тј. простор свих низова који конвергирају ка нули. Обома је норма задата са:

$$\|x\|_\infty = \sup |a_n|.$$

Није тешко закључити да оба ова простора представљају Банахове, јер знамо да је:

$$\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset \mathfrak{c}_0 \subset \mathfrak{c} \subset \ell^\infty,$$

за било које $1 < p < q < +\infty$. Поврх тога, чак и између норми важе неједнакости:

$$\|x\|_1 \geq \|x\|_p \geq \|x\|_q \geq \|x\|_\infty.$$

Дакле, и ови простори су, заиста, Банахови.

4.3 Ограничени оператори Банахових простора. Дуали

Један од битних појмова при дефинисању Банахових простора јесу ограничени оператори на њима. Наиме,

Дефиниција 4.3.1. *Нека су $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ нормирани векторски простори. Линеарно пресликавање $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ кажемо да је* **ограничено** *ако постоји неко $M \geq 0$ такво да је*

$$\|Tx\|_{\mathbf{Y}} \leq M \|x\|_{\mathbf{X}},$$

за све $x \in \mathbf{X}$. Најмање такво M називамо **операторском нормом** *функције T, у ознаци $\|T\|$.*

[14] Frigyes Riesz (1880-1956)
[15] Ernst Fischer (1857-1959)

Све док смо сигурни да нам је x различито од нуле, норма $\|T\|$ може такође бити приказана и као

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

или пак као

$$\|T\| = \sup_{x \leq 1} \|Tx\|.$$

Скуп свих ограничених линеарних оператора из $\mathbf{X}$ у $\mathbf{Y}$ означавамо са $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Став 4.3.1. *Скуп $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ под операторском нормом чини нормиран векторски простор.*

Доказ. Морамо видети ако су T_1 и T_2 ограничени оператори, да ли су тиме такви $T_1 + T_2$ и λT_1. Ово није тешко, јер нам је већ познато да је:

$$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$$

и

$$\|\lambda T_1\| = |\lambda| \|T_1\|.$$

Узмимо за пример прву од ова два за доказати. Знамо да је:

$$\begin{aligned} \|(T_1 + T_2)x\| &= \|T_1 x + T_2 x\| \\ &\leq \|T_1 x\| + \|T_2 x\| \\ &\leq \|T_1\| \|x\| + \|T_2\| \|x\| \\ &= (\|T_1\| + \|T_2\|) \|x\|. \end{aligned}$$

А како знамо из дефиниције норме да је $\|T\| = 0$ ако и само ако је $T = 0$, доказ је овиме завршен. □

До сада, још увек нисмо претпостављали да је иједан од простора $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ комплетан. Следећи став то описује.

Став 4.3.2. *Ако је $\mathbf{Y}$ комплетан простор, тада је и нормиран простор $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ са операторском нормом такође комплетан, то јест $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ је тада Банахов простор.*

Доказ. Претпоставимо да је $\mathbf{Y}$ Банахов простор и нека је T_n, $n \in \mathbb{N}$, Кошијев низ у простору $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Тада знамо да за све $\varepsilon > 0$ можемо наћи неко n_0 такво да је

$$\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon,$$

за све $n, m \leq n_0$. Покушајмо да покажемо да T_n конвергира ка неком $T \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ под операторском нормом. За свако фиксирано $x \in \mathbf{X}$, можемо узети у обзир низ $T_n x$. Сваки такав низ је, уствари, Кошијев у $\mathbf{Y}$, јер је

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\|, \tag{9}$$

за све $n, m \geq n_0$. Дакле, за свако $x \in \mathbf{X}$ постоји јединствено δ у $\mathbf{Y}$ такво да

$$T_n \to \delta.$$

Онда, ако дефинишемо $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ са $Tx = \delta$, уз изостављање доказа да је T линеарно пресликавање, остаје да проверимо да ли је T ограничено. Ако посматрамо граничну вредност када $n \to \infty$ неједначине (9), тада добијамо да је

$$\|Tx - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\| \tag{10}$$

за $m \leq n_0$. Затим, користећи се неједнакошћу троугла, долазимо до

$$\|Tx\| \leq \|T_m\| \|x\| + \varepsilon \|x\|.$$

На овај начин, доказали смо да је T ограничено са $\|T\| \leq \|T_m\| + \varepsilon$, за било које $m \leq n_0$. Неједнакост (10) нам такође показује да $\|T - T_m\| \leq \varepsilon$ за $m \geq n_0$, па $T_m \to T$ под операторском нормом када $m \to \infty$. □

Дефиниција 4.3.2. *Ако су T и S узајамно инверзне функције $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ и $S : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$, тада кажемо да су Банахови простори $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$* **еквивалентни**. *Уколико притом T (а са тиме и S) одржава норму тако да је $\|x\| = \|Tx\|$, тада кажемо да су X и Y* **изометријски изоморфни**.

Што се тиче дуалних простора, то јест дуала у Банаховим просторима, даћемо само конкретне примере без доказа. Ако је нормиран простор $\mathbf{X}$ над пољем скалара $\mathbb{K}$, можемо посматрати простор $L(\mathbf{X}, \mathbb{K})$. По претходно наведеном Ставу 4.3.2, ово је Банахов простор, који називамо **дуалом** у обележју X^*. Као што је и речено, без доказа, ево примера неких од тих простора.

1° Дуални простор $\mathfrak{c}_0$ је изометријски изоморфан простору ℓ^1, где је изоморфизам дат на следећи начин. За $a = (a_n) \in \ell^1$, дефинишемо елемент $\alpha \in \mathfrak{c}_0{}^*$ са

$$\alpha(b) = \sum_n a_n b_n.$$

2° Дуални простор ℓ^1 је изометријски изоморфан простору ℓ^∞.

3° Дуални простор ℓ^p за $1 < p < \infty$ изометријски је изоморфан простору ℓ^q, где q задовољава једнакост

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Специјално, ℓ^2 је сам свој дуал.

Време је и да се напокон бацимо у просторе који заокружују овај рад - Хилбертове просторе.

5 Хилбертови простори

Све дефиниције и теореме претходних поглавља кулминираће у овом стадијуму. Сада је сасвим лако дефинисати све појмове овог поглавља, зато што са намећу као природна надоградња на већ наведену теорију.

5.1 Појам и основе Хилбертових простора

Започећемо једном јасном дефиницијом.

Дефиниција 5.1.1. *Сваки Банахов простор чија је норма индукована неким скаларним производом тог простора називамо* **Хилбертовим простором**.

Посматрајмо шта ово представља на конкретним примерима.

Пример 5.1.1. *Сваки* $\mathbb{R}^k$ *простор је коначнодимензионални Хилбертов простор.*

Доказ. Како бисмо показали да је ово тачно, довољно је доказати комплетност простора $\mathbb{R}$, то јест покушајмо да покажемо да је сваки Кошијев низ у $\mathbb{R}$ конвергентан. За то, наведимо прво једну теорему, за коју доказ изостављамо.

Теорема 5.1.1. *(Болцано[16]-Вајерштрас[17] о низовима) Сваки ограничен низ реалних бројева има бар једну тачку нагомилавања у* $\mathbb{R}$. *Сваки низ реалних бројева има бар једну тачку нагомилавања у* $\overline{\mathbb{R}}$.

Сада, нека је (a_n) произвољан Кошијев низ у $\mathbb{R}$. На основу својста ограничености Кошијевог низа (Став 2.2.2) и претходно наведене Болцано-Вајерштрасове теореме, знамо да постоји подниз (a_{n_k}) тог низа који је конвергентан.

Проверимо шта се дешава са Кошијевим низовима ковергентних поднизова.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно и $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$ за $m, n > n_0$. Такође, нека подниз (a_{n_k}) низа (a_n) има коначан лимес a.

Тада, уколико изаберемо $k \in \mathbb{N}$ тако да је $|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2$ и $n_k > n_0$, знамо да за све $n > n_0$ важи:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Дакле, и са̂м низ (a_n) је онда конвергентан, те је наш доказ тиме завршен. □

Пример 5.1.2.

Простор ℓ^2 квадратно сумабилних комплексних низова (z_n), $n \in (1, +\infty)$ за које је

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < +\infty$$

представља Хилбертов простор задат са скаларним производом

$$\langle (z_n), (w_n) \rangle \stackrel{\text{деф}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} z_n \overline{w_n}.$$

[16] Bernhard Bolzano (1781-1848)
[17] Karl Weierstrass (1815-1897)

Доказ. Доказ овога иде тривијално, јер, сагласно Теореми 3.2.3, ℓ^p је комплетан за све $p \in [1, +\infty]$. $\square$

Пример 5.1.3.

За сваки простор са мером (σ, μ) по теореми Рис-Фишера простор $L^2(\sigma, \mu)$ квадратно интеграбилних функција постаје Хилбертов при увођењу скаларног производа са

$$\langle f, g \rangle \overset{\text{деф}}{=} \int_\sigma f\overline{g}d\mu,$$

за све $f, g \in L^2(\sigma, \mu)$.

Приметили смо да како би постојала, норма Хилбертовог простора мора задовољавати правило паралелограма, те следећа теорема баш карактерише Банахове просторе који су уједно и Хилбертови.

Теорема 5.1.2. *(Џордан[18]-фон Нојмана[19]) За комплексан нормиран простор* $\mathbf{X}$ *у коме важи правило паралелограма скаларни производ који индукује норму тог простора задат је изразом*

$$\langle f, g \rangle \overset{\text{деф}}{=} \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|f + i^k g\|^2.$$

Доказ ове теореме изостављамо, дајући идеју читаоцима да примењујући правило паралелограма за комплексне векторске просторе, уз пар трикова и сличних идеја коришћених у доказивању Теореме 3.1.1, може се стићи до жељеног резултата.

5.2 Ортогоналност у Хилбертовим просторима

5.2.1 Ортогоналност

Од сада, па надаље, ознаку $\mathcal{H}$ резервисаћемо, и користити, искључиво за означавање Хилбертових простора. Уколико посматрамо неједнакост КШБ између произвољних ненула вектора $f = (x_1, y_1, z_1)$ и $g = (x_2, y_2, z_2)$ у простору $\mathbb{R}^3$, можемо приметити да важи:

$$\left| \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\|\|g\|} \right| = \left| \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \right| \leq 1.$$

Уствари, повезујући добијен резултат са основном структуром скаларног производа у еуклидској геометрији, показује се да приказана величина управо представља косинус угла који граде вектори f и g, чиме $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ представља услов њихове нормалности, односно ортогоналности. Уколико посматрамо произвољан Хилбертов простор $\mathcal{H}$, ортогоналост на њему дефинишемо на следећи начин.

[18] Pascual Jordan (1902-1980)
[19] Johann von Neumann (1903-1957)

Дефиниција 5.2.1. *За векторе $f, g \in \mathcal{H}$ кажемо да су* **ортогонални**, *са ознаком* $\mathbf{f \perp g}$, *ако важи да је* $\langle f, g \rangle = 0$.

Два скупа $F, G \subset \mathcal{H}$ су **ортогонални**, *у ознаци* $\mathbf{F \perp G}$, *ако за све $f \in F$ и све $g \in G$ важи $f \perp g$.*

Дефиниција 5.2.2. *За скупове $F, G \subset \mathcal{H}$ са $\mathbf{G}^{\perp}$ означавамо скуп свих $f \in \mathcal{H}$ који су ортогонални на G и називамо* **ортогоналном допуном** *или* **ортокомплементом** *од G.*

Примећујемо да, из специфичности скаларног производа на Хилбертовим просторима, не можемо увести ортогоналност у Банаховим на исти начин. Дакле, поставља се питање постоји ли аналогон у овим просторима. Једна од најпознатијих дефиниција базира се на следећој леми.

Лема 5.2.1. *Вектори f и g из Хилбертовог простора $\mathcal{H}$ су међусобно ортогонални ако и само ако је*

$$\|f + \lambda g\| \geq \|f\|,$$

за све комплексне скаларе $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказ. Доказ овога не иде тешко, штавише, директно из дефиниције норме имамо да када је $f \perp g$, тада за све $\lambda \in \mathbb{C}$ је

$$\|f + \lambda g\| = \sqrt{\|f\|^2 + |\lambda|^2 \|g\|^2} \geq \|f\|.$$

Када је $g = 0$, јасно је да важи и обрнут смер еквиваленције. Ако је, пак, $g \neq 0$, за $\lambda = -\frac{\langle f,g \rangle}{\langle g,g \rangle}$ имамо

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &\leq \|f + \lambda g\|^2 \\
&\leq \left\| f - \frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle} g \right\|^2 \\
&\leq \|f\|^2 - 2\mathfrak{Re} \left\langle f, \frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, \rangle g} g \right\rangle + \left\| \frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle} \right\|^2 \\
&\leq \|f\|^2 - \left\| \frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle} \right\|^2,
\end{aligned}$$

одакле закључујемо да $\langle f, g \rangle$ мора бити 0, те је $f \perp g$. □

Ево сада дефиниције коју многи прихватају као главну при дефинисању ортогоналности у Банаховим просторима.

Дефиниција 5.2.3. *За вектор f каже се да је ортогоналан по Бирхоф*[20]*-Џејмсу*[21] *на вектор g у истом Банаховом простору $\mathbf{X}$ ако је*

$$\|f + \lambda g\| \geq \|f\|.$$

[20]Garett Birkhoff (1911-1996)
[21]Robert Clarcke James (1918 - 2004)

5.2.2 Ортогонална пројекција на потпростор

Ово потпоглавље дефинисаћемо укратко, дајући само неке доказе теорема, из тога што ће нам исте бити потребне при дефинисању следећег. Наиме, започнимо једном теоремом на којој се базира већина осталих.

Теорема 5.2.1. *(о најближем елементу) Нека је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор и F непразан, затворен конвексан подскуп у $\mathcal{H}$. За сваки вектор $h \in \mathcal{H}$ постоји јединствен вектор $f \in F$ такав да важи*

$$\|f - h\| = dist(h, F) \overset{\text{деф}}{=} \inf_{g \in F} \|g - h\|.$$

Као што је и било напоменуто, доказ овога ћемо изоставити, мада уз опаску да исти није комплексан, па вреди погледати његово извођење. Сада наводимо главну теорему овог дела рада.

Теорема 5.2.2. *(Рис о ортогоналној пројекцији) Нека је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор и нека је L затворен потпростор од $\mathcal{H}$. Тада, сваки вектор $h \in \mathcal{H}$ има јединствен приказ облика*

$$h = f + g,$$

за неко $f \in L$ и неко $g \in G^{\perp}$, такво да је $\|g\| = dist(h, L)$. Такав вектор f називамо **ортогоналном пројекцијом вектора h на потпростор** *L.*

Доказ. Користећи теорему о најмањем елементу, знамо да међу елементима потпростора L постоји онај вектор f који је најближи вектору h, то јест онај елемент за кога је $\|h - f\| = dist(h, L)$. На тај начин, за све векторе $f' \in L$ и све скаларе $\lambda \in \mathbb{C}$ вектор $f - \lambda f'$ није могуће да буде ближи вектору h од самог вектора f, те је

$$\|h - f + \lambda f'\| = \|h - (f - \lambda f')\| \leq \|h - f\|,$$

за све $\lambda \in \mathbb{C}$. Даље, према Леми 5.2.1, мора бити $g = (h - f) \perp f'$, чиме је обезбеђена наведена ортогонална репрезентација, при чему је заиста $\|g\| = dist(h, L)$. Ако би, међутим, постојало још неко $f' \in L$ за које је $h - f' \in L$, тада би важило

$$f - f' = f - f' + h - h = [(h - f') - (h - f)] \perp L.$$

Како за оба вектора важи $f, f' \in L$, и њихова разлика $f - f'$ тада, такође, припада потпростору L. Међутим, тада би било $\langle f - f', f - f' \rangle = 0$, одакле сазнајемо да је $f \equiv f'$, те је јединственост одржана. □

5.3 Репрезентација ограниченог линеарног функционала

Нормирани, па чак ни Банахови простори нису изоморфни са својим дуалима. Због своје специфичне структуре, Хилбертов простор садржи посебно једноставне структуре линеарних функционала на себи. Случај ових простора решава следећа теорема.

Теорема 5.3.1. *(Фреше[22]-Рис) Нека је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор и нека је $\mathcal{H}^*$ његов дуал. За сваки ограничени линеарни функционал $f^* \in \mathcal{H}^* \to \mathbb{C}$ постоји и јединствено је одређен вектор $f \in \mathcal{H}$ такав да је*

$$f^*(h) = \langle h, f \rangle,$$

за све $h \in \mathcal{H}$.

Доказ. Прво, приметимо да је скаларни производ дат са $\langle \cdot, f \rangle$ линеарни функционал норме $\|f\|$. Заиста

$$|\langle \cdot, f \rangle(h)| = |\langle h, f \rangle| \leq \|h\|\|f\|$$

за све векторе $h \in \mathcal{H}$, те је тада и $\|\langle \cdot, f \rangle\| \leq \|f\|$.

Са друге стране, како имамо да је

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle f, f \rangle \\ &= \langle \cdot, f \rangle(f) \\ &\leq \|\langle \cdot, f \rangle\|\|f\|, \end{aligned}$$

тада знамо да је и $\|f\| \leq \|\langle \cdot, f \rangle\|$, одакле мора важити да је $\|\langle \cdot, f \rangle\| = \|f\|$. Ако, пак, за језгро важи да је $\ker(f^*) = \mathcal{H}$, имамо да је тада $f^*(h) = 0 = \langle h, 0 \rangle$ за све могуће $f \in \mathcal{H}$, па тражена једнакост важи уколико је $f = 0$. Како је линеарни функционал f^* ограничен, тада језгро $\ker(f^*)$ представља затворен потпростор, одакле из особина симетричне релације $\perp$ мора важити да је $\ker(f^{*\perp}) \neq 0$ уколико је и $\ker(f^*) \neq \mathcal{H}$.

Даље, за неко произвољно $x \in \ker(f^*)^\perp$ које је различито од нуле знамо да је тада и $f^*(x) \neq 0$, јер би у супротном било $\ker(f^*) \cap \ker(f^*)^\perp \neq \{0\}$, што је неодрживо. А како имамо и да је

$$f^* \left(h - \frac{f^*(h)}{f^*(x)} x \right) = f^*(h) - \frac{f^*(h)}{f^*(x)} f^*(x) = 0,$$

тада добијамо да је $h - \frac{f^*(h)}{f^*(x)} x \in \ker(g^*)$, па из $x \in \ker(g^*)^\perp$ важи да је

$$\langle h, x \rangle - \frac{f^*(h)}{f^*(x)} \langle x, x \rangle = \left\langle h - \frac{f^*(h)}{f^*(x)} x, x \right\rangle = 0$$

за свако $h \in \mathcal{H}$. Одавде простим трансформацијама долазимо до облика

$$f^*(h) = \frac{f^*(x)}{\langle x, x \rangle} \langle h, x \rangle = \left\langle h, \frac{\overline{f^*(x)}}{\|x\|^2} x \right\rangle,$$

из чега заиста добијамо тражену релацију, када узмемо да је

$$f = \frac{\overline{f^*(x)}}{\|x\|^2} x.$$

Што се тиче јединствености, уколико постоји још неко $f' \in \mathcal{H}$ тако да је

$$f^*(h) = \langle h, f \rangle = \langle h, f' \rangle,$$

за све $h \in \mathcal{H}$, тада је, специјално, за $h = f - f'$

$$\|f - f'\|^2 = \langle f - f', f \rangle - \langle f - f', f' \rangle = 0,$$

те је заиста $f \equiv f'$, чиме је доказ потпуно завршен. □

[22] René Maurice Fréchet (1878-1973)

5.4 Интересантни примери Хилбертових простора

Употпуњујемо овај рад неким интересантним примерима Хилбертових простора о којима неће бити дискусије, најпре због њихових комплексности и сигурне дигресије.

Пример 5.4.1. *(Соболевови*[23] *простори)*

Ови простори су веома интересантан пример Хилбертових простора, јер је у њима могуће вршити диференцијацију, а за разлику од, рецимо, Банахових простора, такође имају дефинисан и скаларни производ на њима. Њихова битност је у томе да многа решења парцијалних диференцијалних једначина се налази баш у овим просторима. Норма је, овде, задата са:

$$\|f_{k,p}\| = (\sum_{i=0}^{k} \int |f^{(i)}(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}.$$

Пример 5.4.2. *(Хардијеви*[24]*простори холоморфних функција)*

Такође један веома интересантан пример простора први пут уведен од стране Риса, који је, због Хардијевог рада наденуо просторима ово име. Они представљају чак доста бољу генерализацију L^p простора, када је $p < 1$, јер у тим случајевима L^p простори добијају нека нежељена својства, док Хардијеви функционишу сасвим коректно. Као што је већ речено, базирају се и на холоморфним функцијама, битни у комплексној и хармонијској анализи, а играју и велику улогу у теорији управљања. Норма ових простора се дефинише са

$$\|f\|_2 = \lim_{r\to 1} \sqrt{M_r(f)},$$

где је

$$M_r(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

[23]Sergei Sobolev (1908-1989)
[24]Godfrey Harold Hardy (1877-1947)

6 Закључак

Хилбертови простори играју очигледно заиста велику улогу како у математици, тако и у физици. Иако овај рад представља покушај приказивања основних особина ових простора, као и сву теоријску подлогу на којој она лежи, нажалост није могао да обухвати грандиозну величину информација коју ова тема обухвата.

Они који су барем мало били заинтригирани радом, аутор предлаже да, уколико имају жеље да истражују више, прелистају о *теорији Фуријеових редова, Штурм-Лијувил теорији диференцијалних једначина*, или пак дубљем проучавању *теорије оператора* и *функционалне анализе.*

На крају, срдачно се захваљујем своме ментору др Миљану Кнежевићу који ми је давао све потребне смернице и указивао на исправке када је то било непоходно, као и професорки др Соњи Чукић која је уложила велики труд да заиста детаљно прегледа мој рад и да своје мишљење о њему.

Литература

[1] Аднађевић Д, Каделбург З, *Математичка анализа* I, Математички факултет, Београд, осмо издање, 2008.

[2] Аднађевић Д, Каделбург З, *Математичка анализа* II, Математички факултет, Круг, Београд, шесто издање, 2011.

[3] Bachman G, Narici L, *Functional analysis*, Academic Press, 1966.

[4] Driver B. K, *Analysis Tools with Applications*, Springer, 2003.

[5] Dunford N, Schwartz J.T, *Linear operators, Part I*, Wiley-Interscience, 1958.

[6] Halmos P.R, *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity*, New York, 1951.

[7] Putnam C.R, *Commutation properties of Hilbert space operators and related topics*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.

[8] Rudin W, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 3rd edition, 1987.

[9] Simmons G F, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1963.

[10] Timoney R.M, Bunce L. J, *On the operator space structure of Hilbert spaces*, Bulletin of the London Mathematical Society, 2011.

[11] en.wikipedia.org