Математичка гимназија

Матурски рад
из предмета Геометрија

Инверзија

Ученик:
Душица Браловић

Ментор:
др Александар Пејчев

Београд, јун 2015.

Садржај

1 Предговор

Тему за свој матурски рад сам одабрала желећи да проширим своје знање у некој од области геометрије. Инверзија ми се учинила изазовном, јер на неки начин представаља највиши аспект сагледавања Еуклидске геометрије.

У уводу је изложен кратак историјски преглед геометрије, поменуте су области геометрије уско повезане са инверзијом. У другој глави дефинисана је инверзија у односу на круг и наведена су њена својства, а у трећој и четвртој њена примена у решавању Аполонијевих проблема и при конструисању Штајенровог ланца. У петој глави је описана инверзија у координатном систему, а у шестој инверзија у односу на сферу. Након тога следе примери задатака у којима се користи инверзија и њен значај.

Надам се да ће рад при даљем читању бити разумљив, унапред се извињавам због евентуалних грешака и пропуста. Рад је писан у програму ,,*LaTex*", а слике су одрађене у програму ,,*GeoGebra*.

Захваљујем се свом ментору за много стрпљења, стручној помоћи и саветима.

2 Увод

2.1 Кратак историјски преглед геометрије

Геометрија (грчки: $\gamma\varepsilon\omega =$ земља, $\mu\varepsilon\tau\rho\sigma =$ мерити) је грана математике која се бави проучавањем особина и међусобних односа облика тј. геометријских тела, површина, линија и тачака.

Индуктивни (латински: *inductio* = увођење) метод је начин расуђивања код којег од појединачних примера долазимо до општих закључака, док се код дедукције (латински: *deductio* = извођење) од општег закључка долази до појединачних.

Геометријом су се људи бавили још у најранијој историји, првобитно уочавањем фигура, а касније и доказивањем разних својстава тих фигура. Преокрет у даљем развоју геометрије јавља се у старој Грчкој за време Талеса из Милета ($VII - VI$ в.п.н.е.), Питагоре са острва Самос (VI в.п.н.е.), а касније и Еуклида из Александрије (III в.п.н.е.).
Еуклид након мноштва доказаних теорема покушава да уведе аксиоме у геометрији. У свом делу „Елементи”, полазна тврђења је поделио на аксиоме и постулате. Наводимо постулате у облику у ком их је Еуклид написао:

1. Претпоставља се да је могуће од сваке тачке до сваке друге тачке конструисати праву линију.

2. Претпоставља се да свака права, следећи њен правац може неограничено продужавати.

3. Претпостаља се да се у некој равни око сваке њене тачке може описати круг било којег полупречника.

4. Претпоставља се да су сви прави углови међусобно подударни.

5. Ако нека права, пресецајући друге две копланарне праве образује са њима са исте стране два унутрашња угла којима је збир мањи од два права угла, тада се те две праве, неограничено продужене - секу са те стране сечице са које се налазе та два угла.

За даљи развој геометрије велики значај имао је пети Еуклидов постулат. Ово питање заокупило је многе математичаре, а овај проблем тек је био решен у XIX веку. Дошло се до великог броја еквивалената петом постулату, али од највећег значаја је Плејферов ($1748 - 1819$, еглески математичар). И његов еквивалент гласи:
За сваку праву и тачку ван ње у равни њима одређеној постоји највише једна права која садржи ту тачку и дисјунктна је са том правом.

Следећи преломни тренутак био је појава нееуклидских геометрија у XIX веку и то откриће се везује за руског математичара Николаја Ивановича Лобачевског ($1792 - 1856$), који је такође разматрао проблем петог Еуклидовог постулата, полазећи од његове негације. У жељи да дође до контрадиције, изградио је читав низ нових тврђења, али ниједно од њих није било у контрадикцији са осталим постулатима, осим петог. Тако је изграђена још једна нова геометрија која је непротивречна и која се базира на Еуклидовим аксиомама, осим што је пети постулат замењен својом негацијом. Та теорија се назива Геометрија Лобачевског.

2.2 Изометријске трансформације простора E^n

Један од кључних елемената у Еуклидској геометрији су изометријске трансформације. То је кретање равни које „чува” растојања.
• Бијективно пресликавање $\mathcal{I} : E^n \to E^n$ назива се изометријском трансформацијом простора E^n, $n = 1, 2, 3$, ако за произвољне две тачке A и B простора E^n важи $(A, B) \cong (\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B))$.
• Коинциденција $\varepsilon : E^n \to E^n$, $n = 1, 2, 3$, је изометријска трансформација.
• Производ било које две изометријске трансформације простора E^n је изометријска трансформација простора E^n.
• Осном рефлексијом равни E^2 у односу на праву p називамо изометријску трансформацију S_p која није коинциденција у којој је свака тачка праве p инваријантна (фиксна). Права p је оса рефлексије S_p.
• Свака изометрисјка трансформација равни E^2 може се представити у облику композиције највише три осне рефлексије.

Инверзија се јавља као највиши ниво трансформација, али она није изометрија. Она има нека заједничка својства са осном рефлексијом као што су:

1. Осна рефлексија је бијективно пресликавање.
2. Осна рефлексија је инволуција.
3. Осна рефлексија пресликава сваку од две области на коју оса те рефлексије дели раван у ону другу.
4. Све инваријантне тачке осне рефлексије су на оси те рефлексије.
5. Ако је X' слика тачке X у осној рефлексији, тада је права XX' нормална на осу те рефлексије.

Дакле, инверзија је пресликавање које треба да задовољава сва ова својства, где би само реч „оса” била замењена речју „круг”.

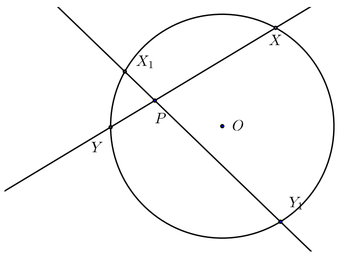
2.3 Трансформације сличности простора E^n

• Нека је k произвољан позитиван реалан број и $\mathcal{P} : E^n \to E^n, n = 1, 2, 3$, бијективно пресликавање које сваке две тачке X и Y простора E^n преводи редом у тачке X' и Y' простора E^n такве да је $X'Y' = k \cdot XY$. Тада пресликавање $\mathcal{P}$ називамо трансформацијом сличности простора E^n са коефицијентом k. Ове трансформације нису изометрије.
• Трансформација $\mathcal{P}$ простора E^n колинеарне тачке A, B, C преводи редом у колинеарне тачке A', B', C'.
• Чува подударност, иако не чува растојања.
• Нека је O произвољна тачка простора E^n и k реалан број различит од нуле. Хомотетијом са средиштем O и коефицијентом k називамо

трансформацију $\mathcal{H}_{O,k} : E^n \to E^n, n = 1, 2, 3$, која сваку тачку $X \in E^n$ преводи у тачку $X' \in E^n$ такву да је $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$.
• Хомотетија $\mathcal{H}_{O,k}$, простора E^n представља трансформацију сличности са коефицијентом k.

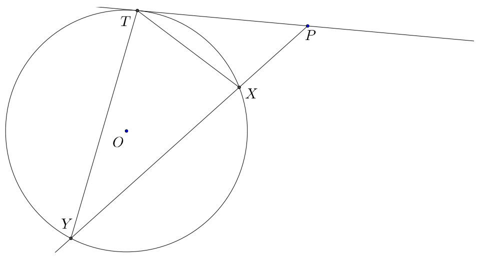
2.4 Потенција тачке у односу на круг

Потенција тачке у односу на круг је у знатној мери везана са неким својствима инверзије која ћемо у даљем наставку рада обрађивати и зато јој посвећујемо засебну секцију. • Ако су у равни задати круг k и тачка P, тада за сваку праву која сече круг у тачкама X и Y и пролази кроз тачку P важи $PX \cdot PY = const.$



Слика 1: Тачка P се налази у кругу k

Посматрајмо две праве из тачке P која се налази у унутрашњости круга k и нека оне секу круг k у тачкама X, Y и X_1, Y_1. Тада је $\angle Y_1X_1X \cong \angle XYY_1$ (углови над истим луком) и $\angle X_1PX \cong \angle YPY_1$ (унакрсни углови), па је $\triangle PXX_1 \sim \triangle PY_1Y$, одакле следи да је $PX \cdot PY = PX_1 \cdot PY_1$ за било које две праве које садрже тачку P.
Ако је тачка P ван круга, тада је $PX \cdot PY = PT^2$, где је T додирна тачка тангенте на круг k из тачке P и круга k.



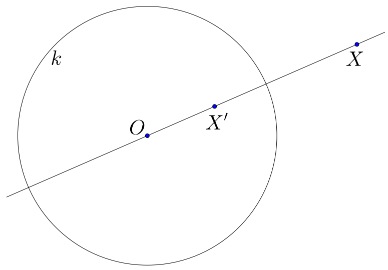
Слика 2: Тачка P је ван круга k

Како се X, Y и T налазе на кругу k и права PT је тангента, важи да је $\angle PTX = \angle PYT$, па одатле следи да је $\triangle PXT \sim PTY$. Из ове сличности важи $PX \cdot PY = PT^2$, што је и интуитивно јер када сечица тежи тангенти, тачке пресека са кругом теже да се поклопе, па и њихове дужине.

3 Дефиниција и основна својства инверзије

Дефиниција: Нека је $k(O, r)$ круг равни E^2. Пресликавање $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ дефинисано са $\psi_k(X) = X' \Leftrightarrow X'$ припада полуправој OX и $OX \cdot OX' = r^2$, назива се инверзија у односу на круг k. Круг k, тачка O и полупречник r су редом круг, центар и полупречник инверзије, где је $E^2_* = E^2 \setminus \{O\}$, јер тачка O није слика ниједне тачке, нити тачка O има своју слику и било би $OO \cdot OO' = r^2$, што је немогуће.

Теорема 1: Инверзија је бијективно пресликавање.



Слика 3: Теорема 1

Доказ: Докажимо прво да је инверзија ”$1-1$”. Претпоставимо супротно, да за две различите тачке X_1 и X_2 је $\psi_k(X_1) = \psi_k(X_2) = X$. Из дефиниције би онда важило $OX_1 \cdot OX = r^2 = OX_2 \cdot OX$ одатле следи да је $OX_1 = OX_2$ и да важи један од ова два распореда тачака $\mathcal{B}(O, X_1, X_2)$ или $\mathcal{B}(O, X_2, X_1)$, што је контрадикторно са претпоставком да су X_1 и X_2 различите тачке, па следи да је инверзија ”1-1” прескикавање.
За доказ да је инверзија ”НА” претпоставићемо супротно, да постоји неко X' у равни E^2_*, такво да за свако X у равни E^2_* важи $\psi_k(X) \neq X'$.Тада ће у равни E^2_* постојати нека тачка Y за коју ће важити: $OY = \dfrac{r^2}{OX'}$ и O, Y, X' су колинеарне. По дефиницији онда је $\psi_k(Y) = X'$. За сваку тачку у равни E^2_* постоји тачка која се слика у њу и обратно. Из чега следи да је инверзија ”НА”.
Како је инверзија и ”$1-1$” и ”НА”, следи да је инверзија бијективно пресликавање. □

Теорема 2: Инверзија је инволуција.

Доказ: Како $\psi_k(X) = X' \Rightarrow OX' = \dfrac{r^2}{OX}$, докажимо да је $\psi_k(X') = X$. Претпоставимо супротно да постоји тачка Y различита од X, за коју важи $\psi_k(X') = Y$, важило би да је $OY = \dfrac{r^2}{OX'}$. Такође знамо да је и $OX = \dfrac{r^2}{OX'}$ из $\psi_k(X) = X'$. Осим тога из дефиниције важи да тачка X' припада полуправој OX, али и из наше претпоставке тачка Y припада полуправој OX'. Како обе тачке и X и Y припадају истој полуправој OX' и исто су удаљене од тачке O, што је контрадикција па оне морају бити једна те иста тачка $Y \equiv X$. Одавде следи да инверз било које тачке равни E^2_* инверзијом се пресликава у ту тачку. □

Теорема 3: Инверзија у односу на круг $k(O,r)$ пресликава унутрашњу област тог круга без центра O у његову спољашњу област; и обратно, спољашња област се том инверзијом пресликава у унутрашњу област без центра O.

Доказ: Нека је X произвољна тачка у унутрашњости круга инверзије, различита од O и X' њена слика у тој инверзији. Тада је $OX \cdot OX' = r^2$, па како је $OX < r$ следи $OX' > r$ тј. X' је спољашња тачка тог круга. Слично, да је X ван круга, било би $OX > r$ и важило би да је $OX' < r$ из $OX \cdot OX' = r^2$. □

На основу релације $OX \cdot OX' = r^2$, интуитивно је да када се X приближава тачки O, њена слика X' се удаљава ка бесконачности и обратно.

- Ако $\psi_k : A, B \mapsto A', B'$ и $\mathcal{B}(O, A, B)$ тада је $\mathcal{B}(O, B', A')$.

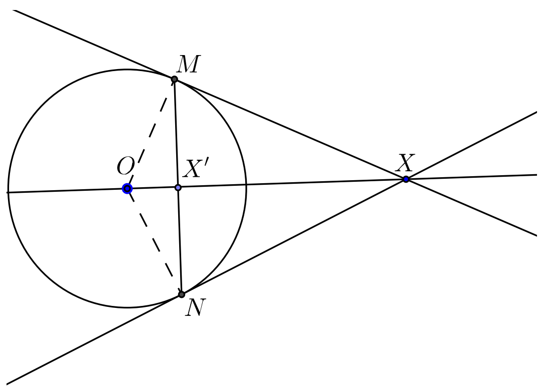
Теорема 4: Инваријантне тачке инверзије су оне и само оне које се налазе на кругу те инверзије.

Доказ: Тачка X је инваријантна акко је $OX \cdot OX = r^2$, односно ако важи $OX = r$, а све такве тачке се налазе на кругу са центром O и полупречником r, што је управо круг инверзије. □

Теорема 5: Ако су X и X' парови одговарајућих тачака неке инверзије, тада је права XX' нормална на круг те инверзије, тј. XX' је ортогонална на тангенту круга у тачки ресека са XX'.

Доказ: Како су O, X, X' колинеарне тачке, самим тим се O се налази на правој XX', па је та права нормална на тангенту у некој тачки Y, која се налази на дужи XX'. □

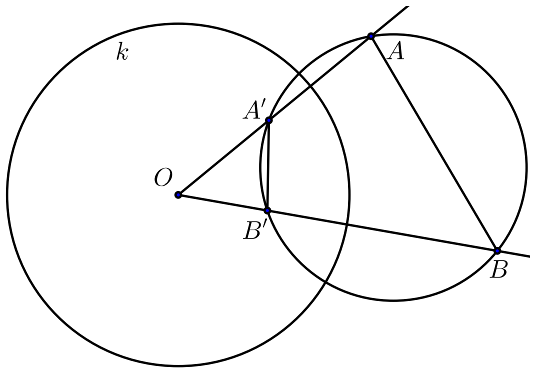
Лема 1. Инверз неке тачке X ван круга $k(O,r)$ дате инверзије ψ_k је пресек дужи OX и MN, где су тачке M и N тачке додира тангенти из тачке X и круга k.



Слика 4: Лема 1.

Доказ: Нека се дужи MN и OX секу у тачки P. MN је ортогонално на OX, јер је $OM = ON$ и $XM = XN$, па је $OMXN$ делтоид, што значи да се његове дијагонале секу под правим углом. Тада је $\triangle OMP \sim \triangle OXM$, па важи $OM : OX = OP : OM$. Одатле следи да је $OX \cdot OP = OM^2 = r^2$ и тачке O, P и X су колинеарне па је баш тачка P инверз тачке X. $\square$

Лема 2. Нека су O, A, B три неколинеарне тачке и ψ_k инверзија у односу на круг $k(O, r)$. Ако су A' и B' слике тачака A и B у тој инверзији, тада је $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$ и A, B, A', B' су коцикличне.



Слика 5: Лема 2.

Доказ: Како $\psi_k : A, B \mapsto A', B'$, то је $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$. На основу тога је $OA : OB' = OB : OA'$, па је због $\angle AOB \cong \angle B'OA'$, и одатле следи да је $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$. Из ове сличности важи да је $\angle OB'A' \cong \angle OAB$, па је онда $\angle BB'A' = 180^o - \angle OAB$, одакле следи да се ове четири тачке заиста налазе на кругу. $\square$

Теорема 6: Нека је ψ_k инверзија у односу на круг $k(O, r)$ равни E^2. Ако је p права, $p^O = p \backslash O$, а l круг те равни, $l^O = l \backslash O$, важи:

1. ако $O \in p$, тада је $\psi_k(p^O) = p^O$;
2. ако $O \notin p$, тада је $\psi_k(p) = j^O$, где је j круг који садржи тачку O, док је $j^O = j \backslash O$;
3. ако $O \in l$, тада је $\psi_k(l^O) = q$, где је q права која не садржи тачку O;
4. ако $O \notin l$, тада је $\psi_k(l) = l'$, где је l' круг који не садржи тачку O.

Доказ:

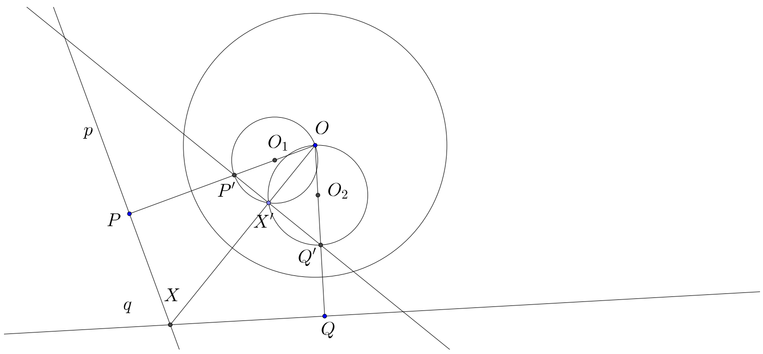
1. Ако је $X \in p^O$, тада је $X' \in OX$ па је $X' \in p^O$. И обрнуто ако $Y \in p^O$, $\psi_k^{-1}(Y) = \psi_k(Y)$.
2. Нека је P подножје нормале из O на правој p. Како $O \notin p$, тачка P има своју слику у инверзији ψ_k, означимо је са P'. Нека је X произвољна тачка праве p различита од P и $X' = \psi_k(X)$. На основу претходне леме је $\triangle OPX \sim \triangle OX'P'$, па је $\angle OX'P' \cong \angle OPX = 90^o$. Дакле, тачка X' припада кругу над пречником OP', означимо га са j. Како је $X' \neq O$, следи да $X' \in j^O$. Одавде следи да је $\psi_k(p) = j^O$. Аналогно закључујемо да за сваку тачку круга j^O важи да њена слика припада правој p.

3. Како је инверзија инволуција, из 2. ће важити и $\psi_k(j^O) = p$.

4. Посматрајмо две сечице из тачке O круга l. Нека оне секу круг l у тачкама A, B и C, D, тако да $\angle ABD + \angle ACD = 180^o$. Нека су њихови инверзи у односу на круг k A', B', C' и D'. Из Леме 2. важи да су тачке A', C', A, C и B', D', B, D коцикличне, па је $\angle OA'C' = \angle OCA$ и $\angle OD'B' = \angle OBA$ и тачке A', B', C' и D' коцикличне. Нека је OM тангента круга l и $M \in l$ и M' њен инверз. Тада је $\triangle OAM \sim \triangle OM'A'$, $\triangle OCM \sim \triangle OM'C'$ и $\triangle OCB \sim \triangle OB'C'$ из Леме 1. Тада је $\angle OMB = \angle OA'M'$, $\angle M'C'O = \angle CMO$ и $\angle B'C'O = \angle OBC$. Онда важи да је $\angle OM'A' + \angle B'C'D' = \angle OMB + 360^o - \angle OBC - \angle CMO$ што је у ствари једнако $\angle OMB + 180^o - \angle OMA = 180^o$. Одавде следи да су и тачке M', A', B' и C' коцикличне па и тачка D' припада том кругу. Кретањем једне од ових сечица обухватићемо све тачке оба круга и стварно ће се круг l пресликати у l'. $\square$

Напомена: Ако се при некој инверзији неки круг слика у неки други круг, центар првог круга се не слика у центар другог, али центри тих кругова су колинеарни са центром инверзије.

Теорема 7: Нека је ψ_k инверзија у односу на круг $k(O, r)$ равни E^2 и Φ_1, Φ_2 фигуре које нису дисјунктне и од којих је свака права или круг те равни. Ако је $\Phi_1' = \Phi_1^O$ и $\Phi_2' = \Phi_2^O$, тада је угао који одређују Φ_1, Φ_2 подударан углу који одређују Φ_1', Φ_2'.



Слика 6: Теорема 7.

Доказ: Како се угао између два круга своди на угао између тангенти у заједничким тачкама тих кругова, а угао између праве и круга своди на угао праве и тангенте круга у пресечној тачки са правом, довољно је доказати да је угао између две праве подударан углу између инверза тих двеју правих, сви остали случајеви доказују се аналогно.

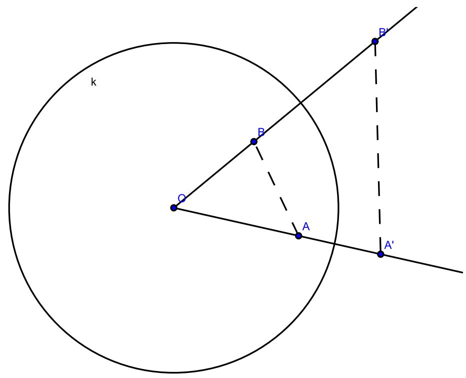
Посматрајамо неке две праве p и q у равни инверзије ψ_k, где је $k(O, r)$, при чему ни p ни q не садрже тачку O. Нека се p и q секу у тачки X. Нека су тачке P и Q подножја нормала из тачке O на праве p и q редом (Слика 6.). Применом инверзије добијамо: $\psi_k(X) = X'$, $\psi_k(P) = P'$, $\psi_k(Q) = Q'$, $\psi_k(p) = k_1$, $k_1(O_1, r_1)$, $X' \in k_1$, $P' \in k_1$, $\psi_k(q) = k_2$, $k_2(O_2, r_2)$, $X' \in k_2$, $Q' \in k_2$. Из Леме 2. важи: $\triangle OPX \sim \triangle OX'P'$ и $\triangle OQX \sim \triangle OX'Q'$, одакле је $\angle OX'P' \cong \angle OPX = 90^o$ и $\angle OX'Q' \cong \angle OQX = 90^o$ (углови над одговарајућим пречницима), одакле је $\mathcal{B}(Q', X', P')$. Угао између кругова k_1 и k_2 биће угао $\angle O_1X'O_2$. Како су $\triangle OX'P'$ и $\triangle OX'Q'$ правоугли, O_1 и O_2 ће се налазити на средиштима дужи OP' и OQ', и

$\angle O_1X'O \cong \angle POX$ и $\angle O_2X'O \cong \angle QOX$, па је $\angle O_1X'O_2 = \angle POQ = 180^o - \angle PXQ$, где је $\angle PXQ$ угао између правих p и q.
□

Лема 2. Нека је ψ_k инверзија у односу на круг $k(O,r)$ и A' и B' инверзне слике неких тачака A и B. Доказати да је тада:

$$A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB.$$

Доказ: У зависности да ли су тачке O, A и B колинеарне или не, постоје два случаја:
1) Ако су ове тачке неколинеарне, на основу лемэ. $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$, па је $A'B' : AB = OB' : OA$. Како је B' слика тачке B у инверзији ψ_k важи: $OB \cdot OB' = r^2$, тј. $OB' = \dfrac{r^2}{OB}$ из чега следи да је $A'B' = \dfrac{r^2}{OA \cdot OB} AB$.



Слика 7: Лема 3.

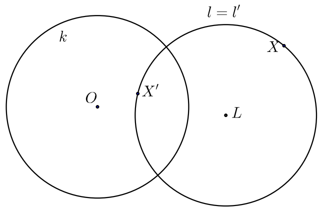
2) Ако су O, A и B колинеарне и нека је без умањења општости $\mathcal{B}(O,A,B)$. Тада је и $\mathcal{B}(O,B',A')$, па је:

$$A'B' = OA' - OB' = \frac{r^2}{OA} - \frac{r^2}{OB} = \frac{(OB-OA)r^2}{OA \cdot OB} = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB.$$

Одавде се види да инверзија чува размеру $\dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB}$, где су A, B, C и D неке тачке равни. Оне се неком инверзијом, са центром у тачки O и полупречником r, сликају у тачке A', B', C' и D'. Тада је
$C'A' = \dfrac{r^2}{OC \cdot OA} CA$, $C'B' = \dfrac{r^2}{OC \cdot OB} CB$, $D'A' = \dfrac{r^2}{OD \cdot OA} DA$ и $D'B' = \dfrac{r^2}{OD \cdot OB} DB$, па је $\dfrac{C'A'}{C'B'} : \dfrac{D'A'}{D'B'} = \dfrac{CA \cdot OB}{CB \cdot OA} : \dfrac{DA \cdot OB}{DB \cdot OA} = \dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB}$. □

Лема 4. Нека је ψ_k инверзија у односу на круг k. Ако се тачка $X \notin k$ слика у тачку X' том инверзијом, доказати да је сваки круг који садржи тачке X и X' ортогоналан на кругу k.

Доказ: Нека је l произвољна круг који садржи тачке X и X'. Како $X \in l$, слика l' круга l при датој инверзији садржи X'. Како је и $X' \in l$, l' садржи и слику тачке X' при датој инверзији, а то је X. Осим тога, центар круга l' мора бити колинеаран са центрима кругова l и k. Јасно је да је једини круг који задовољава наведене услове - круг l. □



Слика 8: Лема 4.

Напомена: Из дате леме се примећује да се неки круг пресликава у самог себе акко је ортогоналан на круг инверзије или ако се поклапа са њим.

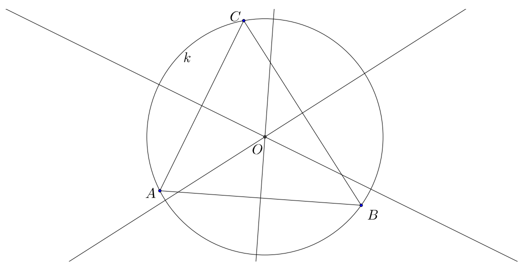
4 Аполонијеви проблеми о додиру кругова

У Еуклидској геометрији Аполонијев[1] проблем гласи:
Конструисати кругове који додирују три дата круга у равни. У општем случају постоји осам кругова у равни која додирују три дата круга.
Гранични случајеви Аполонијевог проблема су они у којима је бар један од датих кругова тачка или права. Они се на елегентан начин могу решити применом инверзије, али могу се решити и не користећи инверзију. Прецизније, то су проблеми следећег облика:
Конструисати круг k који задовољава три услова од којих је сваки једног од облика:
- садржи дату тачку;
- додирује дату праву;
- додирује дати круг.

Претпоставља се да су све тачке, праве и кругови из поменутих услова у истој равни. Па имамо десет Аполонијевих проблема, и то су:

1. Конструисати круг који садржи три дате тачке (A, B, C)**.**

Решење: У пресеку медијатриса дужи AB, BC, CA ће се налазити тачка O која је исто удаљена од све три тачке A, B, C, па ће центар круга k који садржи те три тачке бити управо та тачка O.



Слика 9: Први Аполонијев проблем

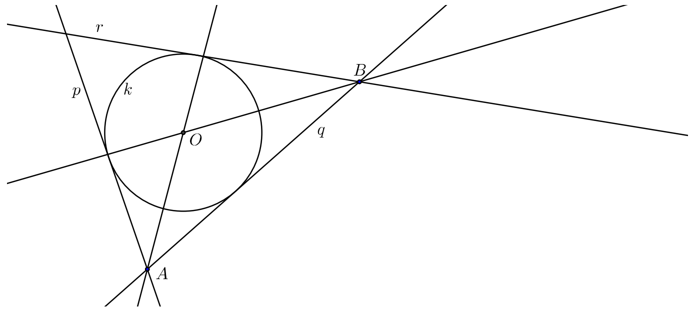
2. Конструисати круг који додирује дате три праве (p, q, r)**.**

Решење: Нека је $p \cap q = \{A\}$. Тада су све тачке које се налазе на симетрали угла $\angle pAq$ исто удаљене од p и q, па ће центар круга који додирује све три праве бити пресек симетрала углова $\angle pAq$ и $\angle qBr$, где је B пресек правих q и r.
Постоје четири решења у општем случају.

3. Конструисати круг који садржи две дате тачке и додирује дату праву (A, B, p)**.**

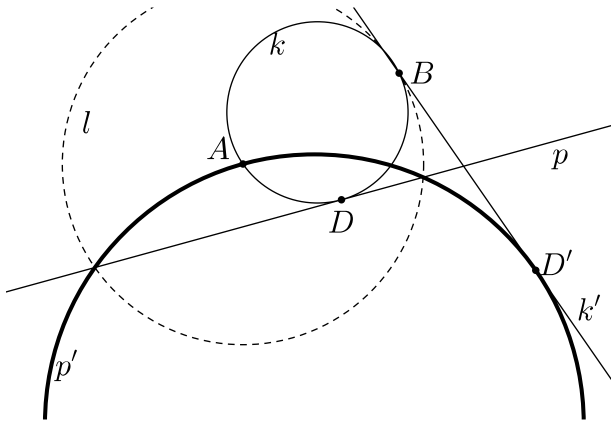
Решење: Нека су A и B са исте стране праве p. Нека је l такав да је $l(A, AB)$. Онда ће бити $\psi_l(B) = B' \equiv B$. Нека је $\psi_l(p) = p'$, где је p' круг који садржи тачку A. Како $A \in k$, инверзија у односу на круг l круга k

[1]Старогрчки математичар из Перге (3.-2.век пре н.е.).



Слика 10: Други Аполонијев проблем

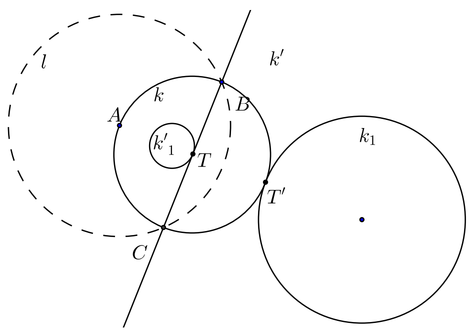
ће бити права која садржи тачку B, $\psi_l(k) = k'$. Како се круг k и права p додирују, добијамо да је права k', тангента на круг p' из тачке B. Нека је D' додирна тачка праве k' и круга p'. Тачку D добијамо инверзијом тачке D', $\psi_l(D') = D$.
Круг k је круг који садржи тачке A, B, D. Постоје два решења у општем случају.



Слика 11: Трећи Аполонијев проблем

4. Конструисати круг који садржи две дате тачке и додирује дати круг (A, B, k_1)**.**

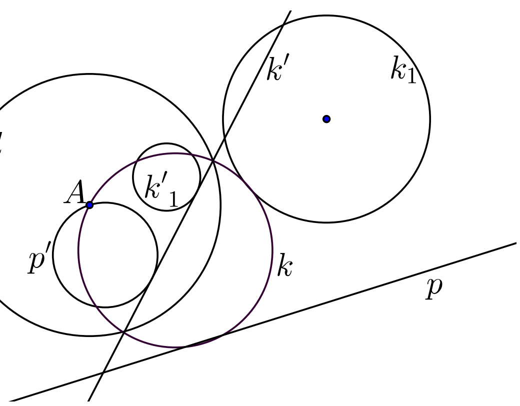
Решење: Посматрајмо инверзију у односу на круг $l(A, AB)$. Како круг k садржи центар инверзије A, онда је $\psi_l(k) = k'$, где је k' права која не садржи тачку A, која је одређена пресечним тачкама B и C кругова k и l. А како круг k_1 не садржи тачку A пресликаће се у круг k_1' који такође неће садржати тачку A. Додирна тачка T кругова k_1 и k се слика у додирну тачку T' праве k' и круга k_1'. Дакле круг k је круг који садржи тачке A, B, C, где је C пресечна тачка круга l и тангенте из тачке B на круг k_1'. И за овај проблем постоје два решења у општем случају.
Да се A налазила на кругу k_1 овај проблем би се свео на конструкцију круга који додирује круг k_1 у тачки A и садржи тачку B, а центар таквог круга добија се пресеком симетрале дужи AB и праве која пролази кроз центар круга k_1 и тачку A.



Слика 12: Четврти Аполонијев проблем

5. Конструисати круг који садржи дату тачку и додирује дату праву и дати круг (A, p, k_1)**.**

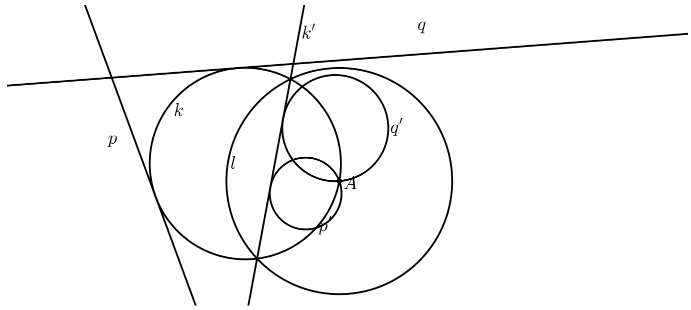
Решење: У општем случају ни права p ни круг k_1 не садрже тачку A. Нека је l круг такав да је $l(A, r)$, где је r произвољне дужине. Како $A \notin p$ и $A \notin k_1$, тада су слике p' и k'_1 кругови, важи и $A \in p'$ и $A \notin k'_1$. Како $A \in k$, то је слика круга k права k' која не садржи A. Права p и круг k имају једну заједничку тачку па ће и њихове слике имати такође једну заједничку тачку, тј. права k' ће бити тангента на круг p', аналогно је и k' тангента круга k'_1. Проблем је сведен на конструкцију заједничке тангенте k', кругова k'_1 и p', па је тражени круг слика праве k'. Како ће постојати четири различите тангенте, број решења проблема у општем случају је четири.



Слика 13: Пети Аполонијев проблем

6. Конструисати круг који садржи дату тачку и додирује дате две праве (A, p, q)**.**

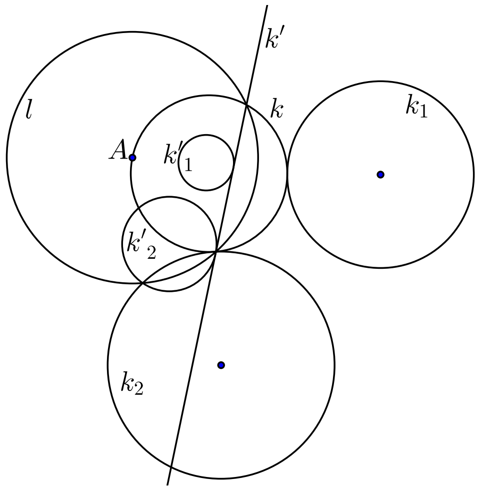
Решење: Нека је круг $l(A, r)$, где је r произвољан полупречник и нека је ψ_l инверзија те равни. Како праве p и q не садрже центар инверзије, оне се сликају у кругове p' и q' који садрже тачку A. Како и круг k садржи тачку A он се пресликава у праву k', која је тангента кругова p' и q', јер круг k додирује праве p и q. Постоје два решења у општем случају када се тачка A налази ван права p и q.



Слика 14: Шести Аполонијев проблем

7. Конструисати круг који садржи дату тачку и додирује дата два круга (A, k_1, k_2)**.**

Решење: Нека је инверзија ψ_l где је $l(A, r)$, r је произвољан полупречник. Како круг k садржи центар инверзије A, он се пресликава у праву k', такву да важи $A \notin k'$. Кругови k_1 и k_2 не садрже A, па се они пресликавају у кругове k_1' и k_2'. Како круг k додирује кругове k_1 и k_2, следи да је k' тангента кругова k_1' и k_2'. Постоји четири оваква круга у општем случају, јер постоје четири различите заједничке тангенте кругова k_1' и k_2', да се кругови k_1 и k_2 додирују постојала би три решења, а да се секу два.

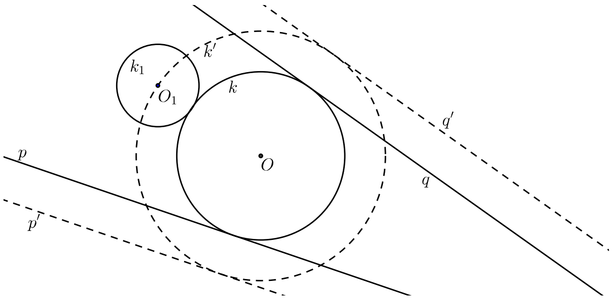


Слика 15: Седми Аполонијев проблем

8. Конструисати круг који додирује дате две праве и дати круг (p, q, k_1)**.**

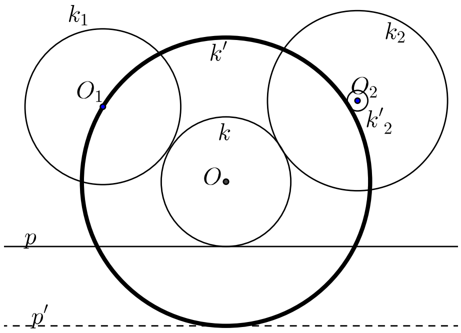
Решење: Нека је круг $l(O, r + r_1)$. Како круг k додирује праве p и q, онда је довољно конструисати круг l који додирује праве p' и q' за које важи $p \| p'$, $q \| q'$, и $d(p, p') = d(q, q') = r$. Дакле, круг l додирује праве p' и q' и садржи тачку O_1, која је центар круга k_1. Тиме смо проблем свели на проблем 6. Постоји осам решења у општем случају.

9. Конструисати круг који додирује дату праву и два дата круга (p, k_1, k_2)**.**

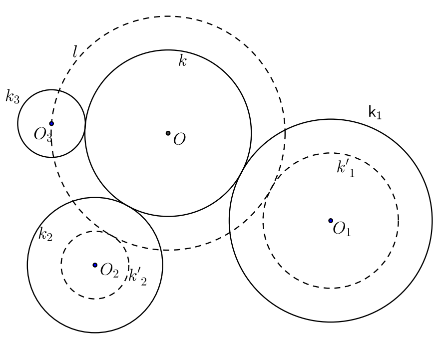


Слика 16: Осми Аполонијев проблем

Решење: Нека је $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ и нека је без умањења оптшег $r_1 < r_2$. Посматрајмо круг $l(O, r + r_1)$, овај круг додирује праву p', која је паралелна правој p и на растојању r_1 од ње, такође круг l садржи центар круга k_1 и додирује круг са центром у тачки O_2 и полупречником $r_2 - r_1$. Овако смо проблем свели на 6. Постоји осам решења у општем случају, јер постоји четири случаја како да транслирамо праве p и q за вектор $\pm\overrightarrow{r_1}$.



(a) Слика 17: Девети Аполонијев проблем

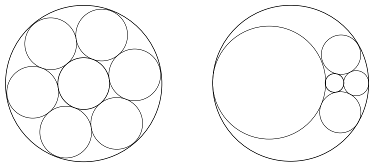


(b) Слика 18: Десети Аполонијев проблем

10. Конструисати круг који додирује три дата круга (k_1, k_2, k_3)**.**

Решење: Нека је $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$, и нека је без умањења општег $r_3 < r_2$ и $r_3 < r_1$. Посматрајмо кругове $l(O, r_3 + r)$, $k_1'(O_1, r_1 - r_3)$ и $k_2'(O_2, r_2 - r_3)$. Тада круг l садржи тачку O_3 и додирује кругове k_1' и k_2'. Проблем је сведен на 7. проблем.

5 Штајнеров ланац



Слика 19: Штајнеров ланац

За два дата круга k и l, где је l у унутрашњости круга k,ако постоје кругови $k_1, k_2, ...k_n$ такви да k_i, $0 < i < n$, додирује кругове k, l, k_{i-1}, k_{i+1}, где је $k_{n+1} = k_1$, онда ови кругови формирају Штајнеров ланац.
Најједноставнији начин да се изгради Штајнеров ланац је да се изврши инверзија на симетричан распоред од n кругова упакованих између централног круга полупречника b и спољашњег концентричног круга полупречника a. У овом распореду је:

$$sin\frac{\pi}{n} = \frac{a-b}{a+b},$$

тако да однос полупречника за мале и велике кругове буде

$$\frac{b}{a} = \frac{1 - sin\frac{\pi}{n}}{1 + sin\frac{\pi}{n}}.$$

Поред тога полупречник кругова у прстену је $c = \frac{a-b}{2}$, и њихови центри се налазе на удаљености $P = b + c = \frac{a+b}{2}$ од центра круга k.
Да би трансформисали симетрични распоред у Штајнеров ланац, користимо центар инверзије чија је удаљеност d од центра симетричне фигуре. Тада полупречници a' и b' постају:

$$a' = \left|\frac{a}{d^2 - a^2}\right| = \frac{a}{a^2 - d^2}$$

$$b' = \left|\frac{b}{d^2 - b^2}\right| = \frac{b}{b^2 - d^2}.$$

Еквивалентно, каква год да је раздаљина између два почетна круга, постојаће Штајнеров ланац.
Центри Штајнеровог ланца лежаће на елипси. Тангенте кроз додирне тачке суседних кругова у ланцу сећиће се у једној тачки. Та тачка такође ће припадати правама које спајају додире Штајнеровог ланца са почетним круговима.
Штајнеров исказ: Ако је Штајнеров ланац формиран од једног почетног круга, онда он такође може бити формиран од било ког другог полазног круга. Он се може затврати после неколико петљи око централног круга, у том случају ће Штајнеров ланац такође бити формиран након истог броја петљи од било које полазне тачке.

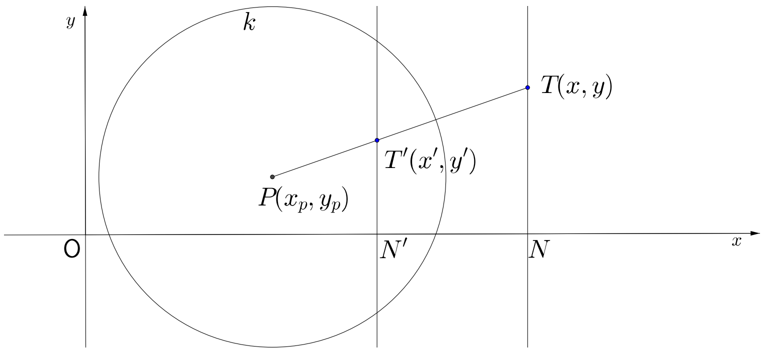
6 Инверзија у координатном систему

Нека је Oxy правоугли координатни систем у равни E^2. Не умањујући општост посматраћемо инверзију у односу на круг $k(P, r)$, где тачка P има координате (x_p, y_p).
Нека су даље координате придружених тачака $T(x, y)$ и $T'(x', y')$, а N и N' подножја нормала из T и T' на x-осу. Из сличности троуглова $\triangle ONT$ и $\triangle OT'N'$ следи $(y' - y_p) : (x' - x_p) = (y - y_p) : (x - x_p)$. Према дефиницији инверзије је $OT \cdot OT' = r^2$, односно координатно $(x^2 + y^2) \cdot (x'^2 + y'^2) = r^4$. Решавањем овог система по x' и y' следи да је:

$$x' = \frac{r(x - x_O)}{(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2} + x_O$$

$$y' = \frac{r(y - y_O)}{(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2} + y_O$$

.



Слика 20: Пример у координатном систему

7 Инверзија у односу на сферу

По аналогији са инверзијом у односу на круг у равни, уводи се и појам инверзије у односу на сферу у простору.

Дефиниција Нека је $S(O, r)$ сфера простора E^3 и нека је $E^3_* = E^3 \setminus O$. Инверзијом у односу на сферу S називамо трансформацију $\psi_S : E^3_* \to E^3_*$, која сваку тачку $P \in E^3_*$ преводи у тачку P' полуправе OP такву да је $OP \cdot OP' = r^2$.

Слично као и код инверзије у односу на круг, инверзија у односу на сферу је такође бијективна трансформација простора E^3_*, где тачка O није дефинисана јер би онда важило: $\psi_S(O) = \infty$, $\psi_S(\infty) = O$.

Аналогно важе и следећа тврђења.

Теорема 1. Инверзија у односу на сферу је инволуциона трансформација.

Теорема 2. У инверзији $\psi_S : E^3_* \to E^3_*$ тачка X је инваријантна акко X припада сфери инверзије S.

Теорема 3. У инверзији $\psi_S : E^3_* \to E^3_*$ тачки X која се налази унутар сфере S одговара тачка X' која се налази изван сфере S и обратно тачки X која се налази изван сфере S одговара тачка X' која се налази унутар сфере S.

Теорема 4. Инверзија у односу на сферу $S(O, r)$ има следеће особине:

1. Раван α, $O \in \alpha$ пресликаваће се у саму себе, $\psi_S(\alpha) = \alpha$.
2. Раван α, $O \notin \alpha$ пресликаваће се у сферу која ће садржити тачку O, $\psi_S(\alpha) = L$, $O \in L$.
3. Сфера L, $O \in L$ пресликаваће се у раван која неће садржати тачку O, $\psi_S(L) = \beta$, $O \notin \beta$.
4. Сфера L, $O \notin L$ пресликаваће се у сферу која неће садржати тачку O, $\psi_S(L) = L'$, $O \notin L'$.
5. Чува углове између кривих и између површи у датој тачки, тј. тај угао се своди на угао између тангентних равни у тој тачки.
6. Чува дворазмеру $\dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB}$, где су A, B, C, D четири тачке простора.

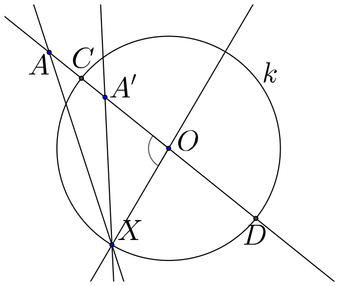
Докази ових теорема су аналогни са доказима ових својстава код инверзије у односу на круг.

Пример (Сверуска Математичка Олимпијада 2001.): Центар сфере ω, налази се у равни троугла ABC, основе тетраедра $SABC$. Сфера пролази кроз тачке A, B и C, и сече праве SA, SB и SC по други пут редом у тачкама A_1, B_1 и C_1. Равни које садрже тачке A_1, B_1 и C_1 и тангирају сферу ω секу се у тачки O. Доказати да је тачка O центар описане сфере ω_1 око тетраедра $SA_1B_1C_1$.

Решење: Из потенције тачке S у односу на сферу ω важи $SA_1 \cdot SA = SB_1 \cdot SB = SC_1 \cdot SC$. Нека су ови производи једнаки R^2. Посматрајмо инверзију у односу на сферу ρ са центром инверзије у тачки S и полупречником R. Том инверзијом тачке A_1, B_1 и C_1 се сликају у тачке A, B и C. Према томе, она преводи сферу ω у саму себе (Лема 3. примењена на сферу). С друге стране, S припада и сфери ω_1, па се сфера ω_1 слика у раван троугла ABC. Раван троугла ABC и сфера ω су узајамно ортогонални јер се центар сфере налази на тој равни, па ће и њихови инверзи бити узајамно ортогонални, тј. сфере ω и ω_1 су узајамно нормалне. Нека је O' центар сфере ω_1, тада су праве $O'A_1$, $O'B_1$ и $O'C_1$ нормалне на сферу ω, а то је могуће само ако је $O' \equiv O$. $\square$

8 Задаци

Задатак 1. Нека је A, A' пар одговарајућих тачака инверзије ψ_k у односу на круг $k(O,R)$. Доказати да је однос $XA : XA'$ константан за сваку тачку $X \in k$.



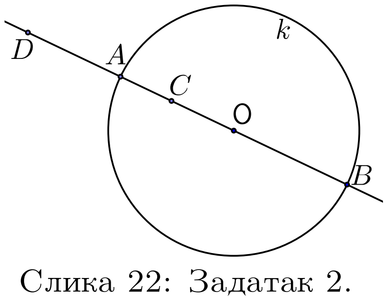
Слика 21: Задатак 1.

Решење: Како је $OA \cdot OA' = R^2, OX = R$, а из Леме 1 по којој су инверзни троуглови слични, знамо да важи $\triangle OA'X \sim \triangle OXA$ следи $\frac{XA}{XA'} = OXOA'$. Ако разломак са десне стране помножимо са $\frac{OX}{OX} = 1$, добија се $\frac{XA}{XA'} = \frac{OX}{OA'} \cdot OXOX = \frac{OA \cdot OA'}{OA' \cdot OX} = \frac{OA}{R}$, што је константно за сваку тачку X на кругу k. $\square$

На основу управо доказаног, следи да је круг k Аполонијев круг за тачке A и A' и однос $\frac{OA}{R}$. Онда су, шодно томе, CX и DX симетрале одговарајућег спољашњег и унутрашњег $\angle AXA'$, онда важи и $\mathcal{H}(A, A'; C, D)$.
По природи ствари се надовезује и следећи задатак.

Задатак 2. Нека су A, B, C, D четири разне колинеарне тачке и k круг над пречником AB. Доказати еквиваленцију: $\psi_k(C) = D \Leftrightarrow \mathcal{H}(A, B; C, D)$, где $\mathcal{H}$ означава хармонијску спрегност тачака.

Један смер овог тврђења јесте доказан у претходном задатку, а решење које следи доказује оба смера рачунским путем.



Слика 22: Задатак 2.

Решење: Нека је O средиште дужи AB.

Прво докажимо $\Rightarrow$ страну еквиваленције, $\psi_k(C) = D \Leftrightarrow \mathcal{H}(A,B;C,D)$, тј. да је $AC : CB = AD : DB$.
Знамо да је $AD = OD - AO$ и да је $DB = OD + OB$, такође знамо и $AC = AO - OC$, $BC = OB + OC$, па важи и:

$$AD : DB = (OD - AB2) : \left(OD + \frac{AB}{2}\right)$$

$$AC : CB = \left(\frac{AB}{2} - OC\right) : \left(\frac{AB}{2} + OC\right)$$

Како знамо да важи $OC \cdot OD = \frac{AB^2}{4}$, из ове једнакости заменимо OC са $OC = \frac{AB^2}{4OD}$, и добија се:

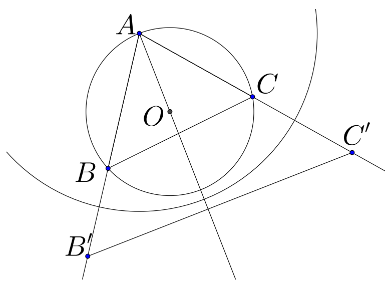
$$AC : CB = \frac{AB}{2OD} \cdot \left(OD - \frac{AB}{2}\right) : \frac{AB}{2OD} \cdot \left(OD + \frac{AB}{2}\right)$$

што заиста јесте једнако са $AD : DB$. Остало је још да се докаже да важи $\mathcal{H}(A,B;C,D) \Rightarrow \psi_k(C) = D$,тј. доказујемо да је $OC \cdot OD = \frac{AB^2}{4}$. Знамо да је $AC : CB = AD : DB$, ако извршимо исту трансформацију као и у претходном случају. Добијамо релацију:

$$\left(OD - \frac{AB}{2}\right) : \left(OD + \frac{AB}{2}\right) = \left(\frac{AB}{2} - OC\right) : \left(\frac{AB}{2} + OC\right)$$

И када средимо ову једнакост добијамо да је $OD \cdot OC = \frac{AB^2}{4}$. $\square$

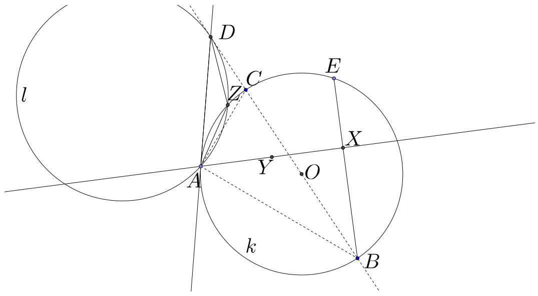
Задатак 3. Нека је O центар круга око троугла ABC. Ако су B' и C' тачке полуправих AB и AC такве да је $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$, доказати да је $B'C' \perp AO$.



Слика 23: Задатак 3.

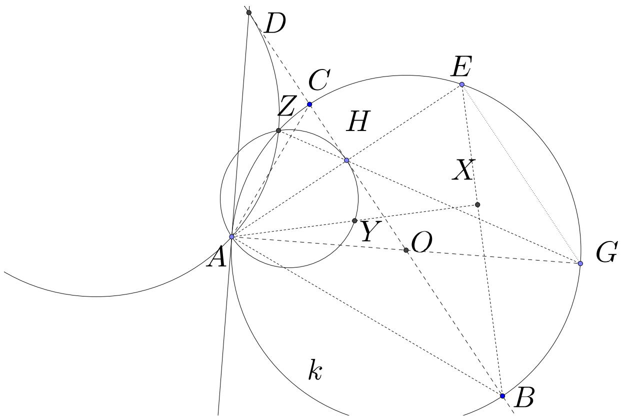
Решење: Нека је $AB \cdot AB' = r^2$. Тада су B' и C' инверзне слике тачака B и C у односу на круг l са центром A и полупречником r. Тада круг $k(A,B,C)$ се том инверзијом преводи у праву (B',C'), права AO у саму себе. С обзиром да је права AO ортогонална на круг k онда су и њихови инверзи нормални. Одакле следи да је $AO \perp B'C'$. $\square$

Задатак 4. Нека је ABC правоугли троугао са правим углом код темена A такав да је $\angle B < \angle C$. Тангента у A на описани круг k троугла ABC сече праву BC у тачки D. Нека је E симетрична тачка тачки A у односу на праву BC, X подножје нормале из A на BE и Y средиште дужи AX. Нека је Z пресечна тачка круга k и праве BY. Доказати да је BD тангента на описани круг l око троугла ADZ.



Слика 24: Задатак 4.

Решење: Нека је тачка G дијаметрално супротна тачки A, а H пресечна тачка BD и AE.
$\triangle BXA \sim \triangle GEA$, $\angle AEG$ је прав јер је AG пречник круга k, а тачка E се налази на њему, такође AX нормално на BE; $\angle ABY \cong \angle AGE$, углови са заједничком тетивом. Из ове сличности следи и да су подударни $\angle BAY$ и $\angle GAE$, а како важи H средиште дужи AE и Y средиште дужи AX, одатле следи $\triangle AHG \sim \triangle AYB$. Одатле су тачке G, H и Z колинеарне, јер важи $\angle ABZ = \angle AGZ = \angle AGH$.

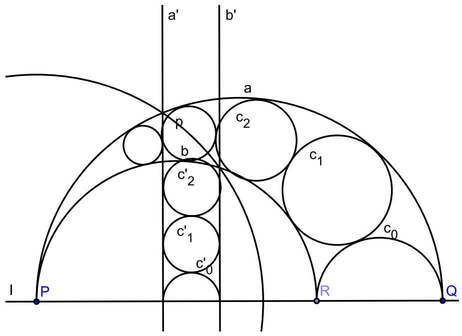


Слика 25: Примењена инверзија у задатку 4.

AD је нормално на AO и AH нормално на OD па важи да је $\triangle AOD \sim \triangle OHA$ па из ове сличности важи $\psi_k(D) = H \Rightarrow \psi_k(l) = l'$, где l' садржи A, Z и H. Како је $\angle AZG$ прав, а тачке Z, H и G колинеарне онда је и $\angle AZH$ прав, па је центар описаног круга троугла AHZ на дужи AH која је нормална на OD, па је OD тангента круга l'. Како инверзија чува углове између праве и круга те ће и угао између слика праве OD и круга l' бити прав, што је управо угао између BD и круга l. □

Задатак 5. Нека су a, b и c_0 кругови са пречницима PQ, PR, RQ, при чему је $\mathcal{B}(P, Q, R)$. Ако је $c_0, c_1, c_2, ...$ низ кругова са исте стране праве PQ, који додирују кругове a, b и сваки у низу додирује претходни, доказати да је ратојање центра круга c_n, $n > 0$ од праве PQ, n пута веће од полупречника тог круга.

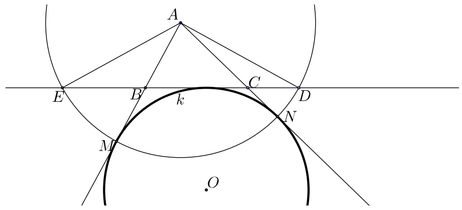
Решење: Нека је k круг са центром у тачки P, који је управан на кругу c_n (круг i садржи додирне тачке тангенти из тачке P на круг c_n). Инверзијом ψ_i у односу на тај круг се права PQ и кругови a и b пресликавају у праве l', a' и b'. Притом су праве a', b' управне на



Слика 26: Задатак 5.

правој l', будући да је инверзија пресликавање које задржава углове. Кругови $c_0, c_1, ..., c_n, ...$ пресликавају се у подударне кругове $c'_0, c'_1, ..., c'_n, ...$, који додирују праве a' и b', а сви су подударни кругу c_n, јер је $c'_n = c_n$. Како центар круга c_0 припада правој l растојање центра круга c_n од те праве је n пута веће од полупрехника тог круга. □

Задатак 6. Нека је l полуобим троугла ABC. Дате су тачке E и F на правој BC такве да је $AE = AF = l$. Доказати да се круг описан око троугла AEF изнутра додирује са приписаним кругом троугла ABC уз страницу BC. □

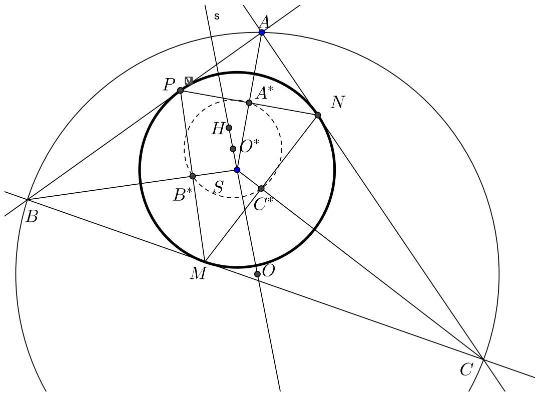


Слика 27: Задатак 6.

Решење: Нека приписани круг уз страницу BC додирује AB и AC у тачкама у M и N. Тада је $AM = AN = l$.
Посматрајмо инверзију у односу на круг k са центром A и полупречником l. Круг описан око троугла AEF се том инверзијом слика у праву BC, јер садржи центар инверзије, а круг приписан уз BC се слика у самог себе, јер је нормалан на круг у односу на који примењујемо инверзију. С обзиром на то да се слике тангирају, то важи и за оригинале, јер инверзија чува углове. □

Задатак 7. Нека су M, N, P додирне тачке уписаног круга троугла ABC са страницама BC, CA, AB редом. Доказати да су ортоцентар троугла MNP, центар уписаног и центар описаног круга троугла ABC колинеарне тачке.

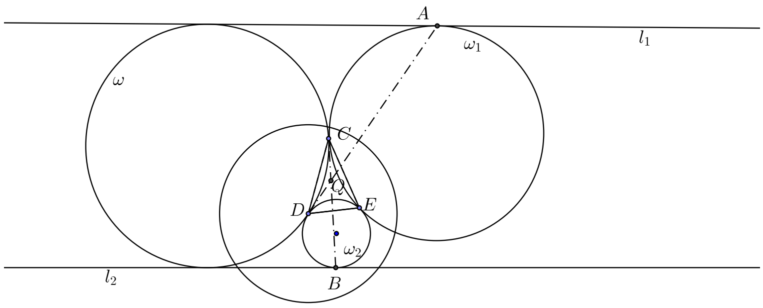
Решење: Посматрајмо инверзију у односу на уписани круг троугла ABC.
Важи $A^* = AS \bigcap NP$, $B^* = BS \bigcap PM$ $C^* = CS \bigcap MN$. Ортоцентар троугла MNP припада његовој Ојлеровој правој, која садржи S. Круг описан око троугла ABC се слика у круг описан око $A^*B^*C^*$, односно Ојлеров круг троугла MNP (јер су A^*, B^*, C^* средишта страница троугла MNP)



Слика 28: Задатак 7.

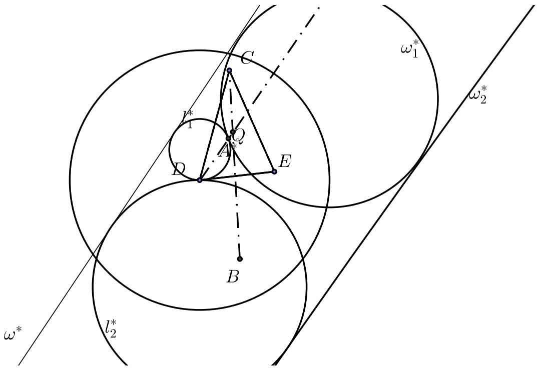
па су њихови центри колинеарни са S. Другим речима, пошто центар Ојлеровог круга троугла MNP припада његовој Ојлеровој правој, припада јој и центар описаног круга троугла ABC. Дакле, и ортоцентар троугла MNP и центар уписаног и центар описаног круга троугла ABC припадају Ојлеровој правој троугла MNP. □

Задатак 8. Нека круг ω додирује две паралелне праве l_1 и l_2. Други круг ω_1 додирује l_1 у A и ω споља у C. Трећи круг ω_2 додирује l_2 у B, ω споља у D и ω_1 споља у E. AD сече BC у Q. Доказати да је Q центар описаног круга троугла CDE.



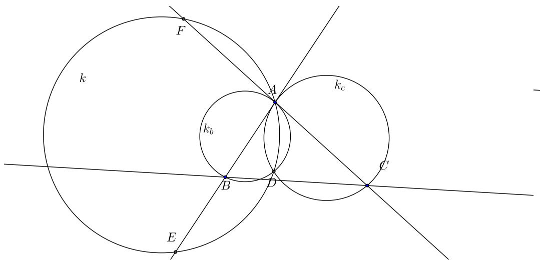
Слика 29: Задатак 8.

Решење: Инверзијом са центром у D ω и ω_2 се сликају у међусобно паралелне праве ω^* и ω_2^*, ω_1 и l_2 у међусобно подударне кругове ω_1^* и l_2^* који додирују ω^* и ω_2^*, а l_1 у круг l_1^* који споља додирује ω_1^*, l_2^*, ω^*. Лако се примећује да је добијена слика симетрична (у односу на дијаметар круга l_1^*), те је права DA^* паралелна са ω^* и ω_2^*. Ово значи да је на оригиналној слици AD заједничка тангента кругова ω и ω_2. Аналогно је и BC заједничка тангента кругова ω и ω_1.
AD и BC су радикалне осе парова кругова (ω, ω_2) и (ω, ω_1) редом. Стога је Q радикални центар кругова ω, ω_1, ω_2, па има исту потенцију у односу на сва три круга, из чега директно следи баш оно што се тражи. □

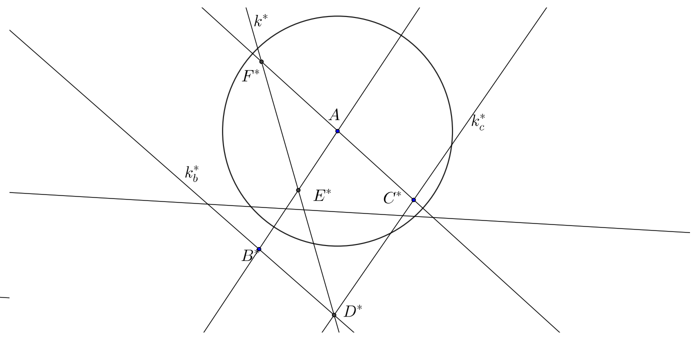


Слика 30: Примењена инверзија у задатку 8.

Задатак 9. Дат је троугао ABC. Круг кроз теме C тангентан са AB у A и круг кроз теме Б тангентан са AC у A имају различите полупречнике и други пут се секу у тачки D. Нека је E тачка на правој AB таква да је $AB = BE$. Нека је F друга тачка пресека праве CA са кругом описаним око троугла ADE. Доказати да је $AF = AC$.



(a) Слика 31: Задатак 9.



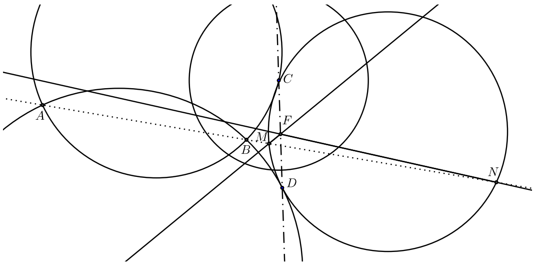
(b) Слика 32: Инверзна слика задатка 9.

Решење: Дати круг кроз B означимо са k_b, круг кроз C са k_c, а круг који садржи A, D, E са k. Посматрајмо инверзију у односу на круг са центром A произвољног полупречника.
k_b^* ће бити права кроз B^* паралелна са AC^* (тј. са AC), а k_c^* ће бити права кроз C^* паралелна са AB^* (тј. са AB). D^* ће бити пресек правих k_b^* и k_c^*. Како је $AE = 2AB$, биће $AB^* = 2AE^*$. Пошто круг k садржи центар инверзије и тачке D и E, сликаће се у праву D^*E^*. F^* ће бити пресек D^*E^* и AC^*. Лако се закључује да је $AF^* = AC^*$ (јер је $AB^*D^*C^*$ паралелограм, и онда је $C^*D^* : AE^* = 2 : 1$), односно

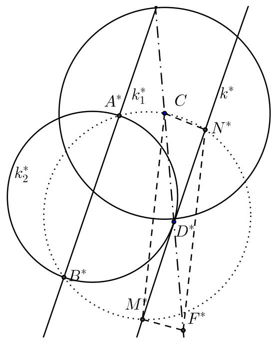
$$\frac{r^2}{AF} = \frac{r^2}{AC},$$

одакле директно следи $AF = AC$. $\square$

Задатак 10. Кругови k_1 и k_2 се секу у тачкама A и B, а круг k их споља додирује у тачкама C и D редом. Права AB сече круг k у тачкама M и N. Нека је F средиште дужи CD. Доказати да је права CD симетрала угла $MFN.CDE$.



(a) Слика 33: Задатак 10.



(b) Слика 34: Инверзна слика задатка 10.

Решење: Посматрајмо инверзију у односу на круг произвољног полупречника са центром у C. k_1 и k се сликају у међусобно паралелне праве k_1^* и k^*. k_2^* ће садржати тачке A^* и B^* и додириваће k^* у D^*. Слика праве A^*B^* ће бити круг l који садржи тачке A^*, B^*, C. M^* и N^* су пресеци круга l и праве k^* Због симетрије је јасно да је $M^*D^* = N^*D^*$.
Како је $CD = 2CF$, то је $CF^* = 2CD$. Отуда је $CM^*F^*N^*$ паралелограм, одакле следи да подударност углова $C^*N^*F^*$ и $C^*M^*F^*$. Међутим, како је

$$\angle C^*N^*F^* = \angle CFN,$$

$$\angle C^*M^*F^* = \angle CFM,$$

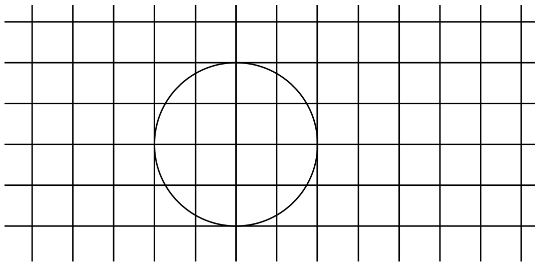
следи да је $\angle CFN = \angle CFM$. □

9 Значај инверзије

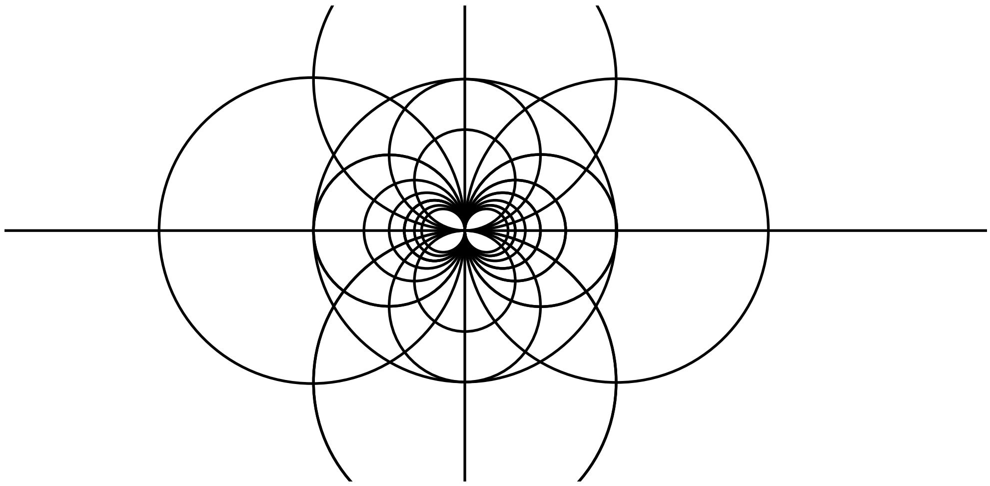
Инверзија има широку примену.

Инверзија коначне правоугаоне решетке

Уочимо решетку и пресликајмо је инверзијом у односу на круг са центром у $O(0,0)$. С обзиром да инверзија чува углове и да се праве које не садрже O сликају у кругове, слика инверза уочене решетке прикана је на слици 34.



Слика 35: Решетка



Слика 36: Инверз решетке

На сличне начине можемо доћи до различитих анимација.

Маскеронијеве конструкције

Инверзија има пуно примена код тврђења која показују разне односе међу правама, круговима као и односе међу правама, Једна од тих примена јесте и при Маскеронијевим конструкцијама или друкчије званим конструкцијама само шестаром.
Постоји пет група конструкција:
1. Одређивање праве кроз две задате тачке 2. Одређивање пресека две задате праве 3. Одређивање круга са задатим центром и полупречником 4. Одређивање пресека две праве и датог круга 5. Одређивање пресека два дата круга.

Каже се да се конструкције изводе уз помоћ лењира и шестара, јер ове механичке направе у идеалном случају омогућвају извођење ових корака. Поставља се питање да ли је могуће конструисати само лењирем круг или шестаром праву. Ипак, може се усвојити договор да је у првом случају круг конструисан ако му је познат центар и једна тачка, а у другом случају да је права конструисана ако су јој дате две тачке. При томе се захтева да се над сваким на тај начин „добијеним" кругом, односно правом, могу даље вршити операције 1-5.

Литература

[1] М. Митровић, М. Вељковић, С. Огњановић, Љ. Петковић, Н. Лазаревић, Геометрија за први разред Математичке гимназије, Круг, Беорад, 2006.

[2] http://www.geogebra.matf.bg.ac.rs/materijali/Inverzija/Apolonijevi\%20problemi\%20o\%20dodiru\%20krugova.html

[3] http://srb.imomath.com/dodatne/inverzija_ml.pdf

[4] http://srb.imomath.com/dodatne/inverzija_ap.pdf

[5] http://www.geogebra.matf.bg.ac.rs/materijali/Inverzija/Primene.html

[6] http://studenti.rs/skripte/matematika/euklidska-geometrija/