Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

Први разред – А категорија

1. Нека је n природан број, A_n скуп свих n-тоцифрених бројева којима је збир цифара у декадном запису једнак 4, а B_n скуп свих n-тоцифрених бројева којима је производ цифара у декадном запису једнак 8. У зависности од n одредити који од наведених скупова има већи број елемената.

2. Одредити све функције $f, g\colon \left(\frac{1}{2}, 2\right) \to \mathbb{R}$, такве да за свако $x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ важи

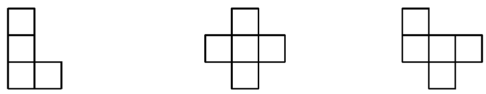
$$xf(x) + g\left(\tfrac{4x+1}{2x+2}\right) = x \quad \text{и} \quad 2f\left(\tfrac{1}{x}\right) - g\left(\tfrac{x+4}{2x+2}\right) = -4x.$$

3. Нека је $\triangle ABC$ правоугли. Конструисати тачку N унутар $\triangle ABC$ тако да је

$$\sphericalangle NBC = \sphericalangle NCA = \sphericalangle NAB.$$

4. У скупу природних бројева решити једначину $20^x + 2^y = 2022^z$.

5. Шаховска табла димензије 8×8 поплочана је фигурама са слике



(фигуре се могу ротирати и обртати; могуће је користити произвољан број фигура сваког од три наведена облика; табла је поплочана ако свако поље табле покрива тачно једна фигура). Одредити најмањи могући број фигура првог од наведених облика који је употребљен у поплочавању.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

Други разред – А категорија

1. Одредити све $a \in \mathbb{R}$ за које једначина

$$\big||x^2 - 5x + 6| - x\big| + 3 = 2022a$$

има тачно три решења у скупу реалних бројева.

2. Пешак се налази у првој колони и другом реду (поље A2) шаховске табле димензије 8×8. На колико начина пешак може доћи до осмог реда, не рачунајући потезе других фигура, ако се у првом потезу није померио два поља? (Пешак се у сваком потезу помера са поља (x, y) на неко од поља $(x, y + 1)$, $(x - 1, y + 1)$ и $(x + 1, y + 1)$ (последња два у случају да поједе противничку фигуру).)

3. У једној школи постоје секције из математике, физике и рачунарства, а сваки ученик школе је члан барем једне секције и сваку секцију похађа барем један ученик. Нека је m просечан број секција које похађају ученици који су чланови секције за математику, f просечан број секција које похађају ученици који су чланови секције за физику, а r просечан број секција које похађају ученици који су чланови секције за рачунарство.

Ако је $m = f = r = \alpha \in (1, 2)$, доказати да је просечан број секција које похађају ученици ове школе мањи од α.

4. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао и нека су P и Q тачке на страницама AB и AD, редом, тако да је $AP = CD$ и $AQ = BC$. Нека је M тачка пресека правих AC и PQ. Доказати да је M средиште дужи PQ.

5. На табли је написан број 2022. После сваког минута брише се број x који је у том тренутку написан на табли и записује један од бројева $2x-1$ или $3x+1$. Да ли је могуће да у неком тренутку на табли буде написан број 2^{2022}?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

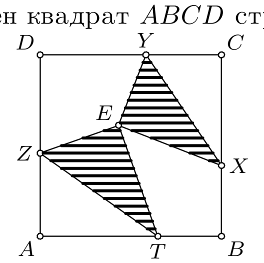
Трећи разред – А категорија

1. Нека је n природан, а p прост број, тако да важи $2n^2 = p^2 + 1$ и тако да је

$$m = \sqrt[5]{p + n\sqrt{2}} + \sqrt[5]{p - n\sqrt{2}}$$

природан број. Одредити могуће вредности броја m.

2. Једна страна листа папира је осенчена и из њега је исечен квадрат $ABCD$ странице 2. Уочене су тачке X, Y, Z и T, на страницама BC, CD, DA и AB, редом, и папир је пресавијен по дужи XY и по дужи ZT, при чему су се тим пресавијањем тачке A и C пресликале у исту тачку E, као на слици.



Доказати да је површина видљивог осенченог дела не мања од 1.

3. Нека су $m, n \in \mathbb{N}$. У поља таблице $m \times n$ уписане су нуле и јединице. Притом, за сваки скуп врста, број колона које у пресеку са сваком од њих имају само нуле једнак је броју колона које у пресеку са сваком од њих имају само јединице.

Доказати да се колоне те таблице могу поделити у парове тако да су колоне истог пара „супротне”: на местима на којима прва има нуле друга има јединице, а на местима на којима прва има јединице, друга има нуле.

4. Одредити све растуће геометријске низове, код којих је производ осмог и десетог члана једнак 1, а разлика седмог и шестог члана једнака 4.

5. Број је *овогодишњи* ако је његов декадни запис облика

$$2c_1 \ldots c_k 0 c_{k+1} \ldots c_{k+l} 2 c_{k+l+1} \ldots c_{k+l+m} 2,$$

где су $k, l, m \in \mathbb{N}$, а c_i цифре у декадном запису, за свако $1 \leqslant i \leqslant k + l + m$. Колико има овогодишњих бројева који су потпуни степени? (Број n је потпун степен ако и само ако је $n = a^b$ за неке $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.)

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

Четврти разред – А категорија

1. Александра и Бојан играју следећу игру:

–Александра бира природан број $n \geqslant 2$, а потом и рационалне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1]$;
–након тога Бојан бира природан број $m \geqslant 2$, $m \neq n$, и рационалне бројеве $b_1, b_2, \ldots, b_m \in (0,1]$;
–након тога одређују вредности $A = \sqrt[n]{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$ и $B = \sqrt[m]{b_1^2 + \ldots + b_m^2}$ и уколико је A већи, побеђује Александра, уколико је B већи побеђује Бојан, а уколико је $A = B$, игра се завршава нерешеним исходом.

(а) Доказати да Александра има победничку стратегију.

(б) Да ли Александра и Бојан могу одиграти игру тако да исход буде нерешен?

2. Нека је X тачка унутар $\triangle ABC$ таква да је $\sphericalangle CAX \neq \sphericalangle XAB$. Нека су X_A, X_B и X_C подножја нормала из X на BC, CA и AB, редом. Нека су P и Q тачке такве да су X_AXX_CP и X_BXX_AQ паралелограми. Нека се BP и CQ секу у тачки Y и нека симетрала $\sphericalangle BAC$ сече XY у тачки Z. Нека је Y_C подножје нормале из Y на AB. Доказати да је $\dfrac{ZY}{ZX} = \dfrac{YY_C}{XX_B}$.

3. У скупу природних бројева решити једначину

$$x^{20} + 2^y = 2022^z.$$

4. Одредити све $a \in \mathbb{R}$, такве да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$(x+1)\big(x^3 + ax^2 + x + (a-2)^2\big) \geqslant 0.$$

5. Нека су m и n природни бројеви. На столу се налазе две гомиле златника, на којима се налази по m и n златника, редом. Играчи A и B наизменично играју потезе, при чему играч A игра први потез. У сваком потезу играч са једне гомиле може узети неки број златника, тако да тај број делилац броја златника на другој гомили. Притом, сматра се да сваки природан број дели број 0. Победник је играч који узме последњи златник са стола. За које вредности m и n победничку стратегију има играч A, а за које играч B?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

Први разред – Б категорија

1. За $m, n \in \mathbb{N}$ нека је $m\,\rho\,n$ ако и само ако је mn потпун квадрат. Испитати да ли је релација ρ рефлексивна, симетрична, антисиметрична или транзитивна. Да ли је ρ релација еквиваленције? Да ли је ρ релација поретка?

2. Одредити све природне бројеве n и просте бројеве p за које важи

$$n^2 + p^4 = 100p^2 + 1.$$

3. Над странама квадрата странице a, у спољашњости квадрата, конструисани су међусобно подударни трапези, тако да темена тих трапеза чине темена правилног дванаестоугла. Ако је површина добијеног дванаестоугла 2022, одредити a.

4. Тамара има 8 различитих креда у боји. Она на табли записује све могуће датуме који се могу записати помоћу пет двојки и три нуле (један такав датум је и данас – 20.02.2022.) и притом сваку цифру записује другом бојом. Одредити укупан број различитих датума које Тамара може записати на табли, ако је одређено којих 5 боја ће се користити за записивање двојки, а самим тим и које 3 боје ће се користити за записивање нула. (При писању датума користе се све цифре, при чему се приликом писања редног броја дана и месеца, али не и године, записују и водеће нуле, ако оне постоје. Датуми $a_1a_2.a_3a_4.a_5a_6a_7a_8.$ и $b_1b_2.b_3b_4.b_5b_6b_7b_8.$ су различити ако за било које $i \in \{1, \ldots, 8\}$ цифре a_i и b_i нису исте или нису обојене истом бојом.)

5. За $a, b \in \mathbb{R}$ нека је $a * b = a + b$, $a \oplus b = \min\{a, b\} = \begin{cases} a, & \text{ако је } a \leqslant b \\ b, & \text{ако је } a > b \end{cases}$ и нека операција $*$ има приоритет у односу на операцију $\oplus$. У зависности од $c \in \mathbb{R}$ скицирати график функције

$$f(x) = x * x \oplus 3 * x \oplus c.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

Други разред – Б категорија

1. Одредити колико има четвороцифрених бројева у чијем се декадном запису појављују само цифре 1, 2 и 3 (не обавезно све три), а тако да се највећа цифра не појављује више од два пута.

2. Нека је D тачка странице AB троугла ABC. Симетрале $\sphericalangle ADC$ и $\sphericalangle CDB$ секу странице AC и BC у тачкама M и N, редом. Симетрале $\sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle ABC$ секу дужи DM и DN у тачкама K и L, редом. Доказати да је $CM = CN$ ако и само ако су MN и KL паралелне.

3. Нека је $z \neq -1$ комплексан број. Доказати да је $z = \dfrac{1+ir}{1-ir}$ за неко $r \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $|z| = 1$.

4. Одредити све $a \in \mathbb{R}$, такве да су

$$f(x) = ax^2 - 2(a+1)x - 1 \quad \text{и} \quad g(x) = (4a+1)x^2 - 2(2a+1)x - 2$$

квадратне функције, при чему $f(x)$ има две различите реалне нуле и графици тих функција имају тачно једну заједничку тачку.

5. Нека је $n \geqslant 2$ природан број. Одредити последњу цифру броја $2^{2^n} + 1$ у декадном запису.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

Трећи разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\frac{3^{x+1}+5^{x-1}}{5^x-3^x} \geqslant 2.$$

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$y = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 3, \quad x = 4y^3 + 12y^2 + 12y + 3.$$

3. Нека су $R, a > 0$. У лопту полупречника R уписана је права купа висине $\frac{3R}{2}$. На којој удаљености од врха купе треба конструисати раван паралелну основи купе, тако да разлика између површине пресека те равни и лопте и површине пресека те равни и купе буде једнака $a^2\pi$?

4. Природни бројеви од 1 до 360 подељени су у 9 подскупова суседних бројева:

$$A_1 = \{1, 2, \ldots 40\}, A_2 = \{41, 42, \ldots 80\}, \ldots, A_9 = \{321, 322, \ldots 360\}.$$

Нека је S_i збир бројева у A_i, за $1 \leqslant i \leqslant 9$. Да ли је могуће распоредити бројеве $S_1, S_2 \ldots, S_9$ у квадрат 3×3, тако да он буде магичан? (Квадрат 3×3 је магичан ако је збир бројева уписаних у поља сваке његове врсте, сваке његове колоне и обе његове дијагонале исти.)

5. У скупу природних бројева решити једначину

$$x^{20} + 2^{y^2+y} = 2022^z.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

Четврти разред – Б категорија

1. Нека је

$$x = \frac{(1+i)^{2022}}{(1-i)^{2010}}, \quad y = 3^{\log_9 25} \quad \text{и} \quad z = \frac{27 \arcsin \frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2}}.$$

Ако је $n = xyz$, одредити број делилаца броја n.

2. Одредити све природне бројеве n, такве да је број $n^2 + n + 2024$ дељив са 2022.

3. Одредити све $p \in \mathbb{R}$ за које једначина

$$8 + 4p(x-1) = \big(x - |x|\big)x$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

4. У тетраедру $SABC$ је $SA \perp SB$, а подножје нормале из S на раван ABC је ортоцентар $\triangle ABC$. Доказати да важи

$$\big(AB + BC + CA\big)^2 \leqslant 6 \cdot \big(AS^2 + BS^2 + CS^2\big).$$

5. Бројеви од 1 до 8 уписани су у темена осмоугла $A_1A_2 \ldots A_8$ (сваки број у једно теме и у свако теме један број) и за сваку страницу осмоугла и дијагонале A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7 и A_4A_8 је израчунат збир бројева уписаних у крајевима те дужи. Нека је m најмањи од добијених бројева.

(а) Одредити највећу могућу вредност броја m.

(б) Одредити укупан број начина на који се бројеви од 1 до 8 могу уписати у темена осмоугла, тако да вредност броја m буде вредност одређена у делу (а).

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

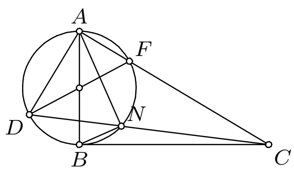
Први разред – А категорија

1. Ако је $x \in A_n$ и $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$ његов декадни запис, онда је $a_n + \ldots + a_1 = 4$, $a_i \in \{0,1,2,3,4\}$ за $1 \leqslant i \leqslant n$ и $a_n \geqslant 1$. Ако је $b_i = 2^{a_i}$ за $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $b_n = 2^{a_n - 1}$, због наведених услова бројеви b_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ су цифре (не може бити $a_i = 4$ за $i < n$, пошто је $a_n \neq 0$) и важи $b_n \cdot \ldots \cdot b_1 = 2^{a_n + \ldots + a_1 - 1} = 2^3 = 8$, па је број y чији је декадни запис $\overline{b_n b_{n-1} \ldots b_1}$ елемент скупа B_n. Функција из A_n у B_n која на описани начин елемент x пресликава у елемент y је бијекција, па за свако $n \in \mathbb{N}$ скупови A_n и B_n имају једнак број елемената.

2. Како је $x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ако и само ако је $\frac{1}{x} \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, сменом $x = \frac{1}{t}$ добија се $2f(t) - g\left(\frac{4t+1}{2t+2}\right) = -\frac{4}{t}$ за свако $t \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, а како на $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ важи и $xf(x) + g\left(\frac{4x+1}{2x+2}\right) = x$, следи $(x+2)f(x) = \frac{x^2-4}{x}$. Пошто је $x+2 \neq 0$, следи $f(x) = \frac{x-2}{x}$ и $g\left(\frac{4x+1}{2x+2}\right) = 2$ за свако $x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Ако је $\phi(x) = \frac{4x+1}{2x+2} = 2 - \frac{3}{2x+2}$, онда је ϕ растућа на $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ и важи $\phi\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$. Следи да је $g(x) = 2$ за свако $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ (а вредности $g(x)$ које задовољавају наведени систем за $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right)$ су произвољне).

3. *Анализа.* Без умањења општости, нека је $\sphericalangle ABC = 90^\circ$. Нека је N тачка унутар $\triangle ABC$, тако да је $\sphericalangle NBC = \sphericalangle NCA = \sphericalangle NAB = \varphi$. Онда је $\sphericalangle ABN = \sphericalangle ABC - \sphericalangle NBC = 90^\circ - \varphi$ и $\sphericalangle BNA = 180^\circ - \sphericalangle ABN - \sphericalangle NAB = 180^\circ - (90^\circ - \varphi) - \varphi = 90^\circ$, па N припада кругу k чији је пречник AB. Нека је O центар k (O је средиште AB), D пресек k и праве NC различит од N, а F пресек k и праве CA, различит од A. Онда је $\sphericalangle ADN = \sphericalangle ABN = 90^\circ - \varphi$ (углови над тетивом AN у k), па је $\sphericalangle FAD = \sphericalangle CAD = 180^\circ - \sphericalangle ADC - \sphericalangle DCA = 180^\circ - \sphericalangle ADN - \sphericalangle NCA = 180^\circ - (90^\circ - \varphi) - \varphi = 90^\circ$, односно FD је пречник k.

Конструкција. Нека је k круг над пречником AB, тачка O средиште AB, F пресечка тачка k и CA, D пресечна тачка праве FO и k различита од F, а N пресечна тачка CD и k различита од D.



Окр–22–1А3

Доказ. Нека је $\sphericalangle NBC = \varphi$. Онда је $\sphericalangle ABN = 90^\circ - \varphi$, а како је $\sphericalangle BNA = 90^\circ$ (угао над пречником), следи $\sphericalangle NAB = 90^\circ - (90^\circ - \varphi) = \varphi$. Такође, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADN = \sphericalangle ABN = 90^\circ - \varphi$ (углови над тетивом NA у k), а како је $\sphericalangle CAD = \sphericalangle FAD = 90^\circ$ (угао над пречником), следи $\sphericalangle NCA = \sphericalangle DCA = 180^\circ - \sphericalangle CAD - \sphericalangle ADC = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \varphi) = \varphi$. Дакле, $\sphericalangle NCA = \sphericalangle NBC = \sphericalangle NAB = \varphi$.

Дискусија. На основу спроведене конструкције и доказа, јасно је да постоји јединствена тачка N са наведеним особинама.

Коментар. Тачка чија је конструкција спроведена је позната и као прва Брокарова тачка троугла. Она постоји (и јединствена је) у произвољном троуглу.

4. Нека је $L = 20^x + 2^y$ и $D = 2022^z$. Важи $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ и $20 = 2^2 \cdot 5$, па $2^2 \parallel 20$ и $2 \parallel 2022$.

Ако је $2x > y$, онда $2^y \parallel L$ и $2^z \parallel D$, па је $y = z$. Следи $2^{2x-y} \cdot 5^x + 1 = 1011^y$, односно $2^{2x-y} \cdot 5^x = 1011^y - 1$, што је немогуће, пошто $101 \nmid 2^{2x-y} \cdot 5^x$ и $101 \mid (1011 - 1) \mid 1011^y - 1$.

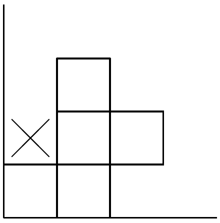
Ако је $2x < y$, онда $2^{2x} \parallel L$ и $2^z \parallel D$, па је $2x = z$. Следи $5^x + 2^{y-2x} = 1011^{2x}$, односно $2^{y-2x} = 1011^{2x} - 5^x$, што је немогуће, пошто $1011^2 - 5 \mid (1011-1) \mid 1011^{2x} - 5^x$, а притом је $1011^2 - 5 > 4$ и $1011^2 - 5 \equiv 3^2 - 5 \equiv 4 \pmod 8$.

Ако је $2x = y$, једначина постаје $2^{2x}(5^x + 1) = 2022^z$, па како је $5^x + 1 \equiv 2 \pmod 4$, следи $2^{2x+1} \parallel L$ и $2^z \parallel D$, одакле је $2x+1 = z$. Међутим, онда је $L < 2 \cdot 20^x < 2 \cdot 2022^x < 2022 \cdot 2022^{2x} = D$, што је немогуће.

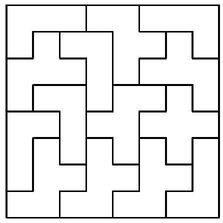
Из претходног следи да наведена једначина нема решења у скупу природних бројева.

5. Прва наведена фигура има 4 поља, а друге две по 5 поља, па ако је x број фигура првог облика, а y укупан број осталих фигура које су употребљене при поплочавању, важи $4x + 5y = 64$. Следи $4x \equiv 4 \pmod 5$, па је $x \equiv 1 \pmod 5$.

Угаоно поље табле („ћошак") не може бити покривено фигурама другог од наведених облика, па је свако од 4 угаона поља покривено или фигурама првог или фигурама трећег облика. Ако би неко од тих поља било покривено фигуром трећег облика, то је, до на симетрију, урађено као на слици Окр–22–1А5–2. Но, онда се поље означено са $\times$ мора покрити фигуром првог облика. Следи да се у уоченом поплочавању мора употребити барем 4 фигуре првог облика (за сваки „ћошак" по једна; очигледно је да иста фигура првоф облика не може учествовати у описаном покривању два „ћошка"), па како је $x \equiv 1 \pmod 5$, следи $x \geqslant 6$.



Окр–22–1А5–2



Окр–22–1А5–3

Како се употребом 6 фигура првог облика (и 8 преосталих) може поплочати табла, на пример као што је то приказано на слици Окр–22–1А5–3, следи да је најмањи могући број фигура првог од наведених облика који је употребљен у поплочавању једнак 6.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – А категорија

1. Ако је $f(x) = \big||x^2-5x+6|-x\big|$, онда је $f(x) = \begin{cases} x^2-6x+6, & \text{ако је } x \in (-\infty, 3-\sqrt{3}) \\ -x^2+6x-6, & \text{ако је } x \in [3-\sqrt{3}, 2] \\ x^2-4x+6, & \text{ако је } x \in (2,3) \\ -x^2+6x-6, & \text{ако је } x \in [3, 3+\sqrt{3}] \\ x^2-6x+6, & \text{ако је } x \in (3+\sqrt{3}, \infty) \end{cases}$.

На сваком од уочених интервала функција је строго монотона (на $(-\infty, 3-\sqrt{3})$ и $[3, 3+\sqrt{3}]$ строго опада, док на преосталим интервалима строго расте) и сурјективно слика назначене интервале, редом, на $(-\infty, 0)$, $[0,2]$, $(2,3)$, $[0,3]$, $(0,\infty)$, па једначина $f(x)=c \in \mathbb{R}$ има два решења ако је $c \in \{0\} \cup (3,\infty)$, четири решења ако је $c \in (0,3)$ и три решења ако је $c = 3$. Следи $2022a - 3 = 3$, тј. $a = \frac{1}{337}$.

2. Нека су a_i и c_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$, редом, број начина да пешак стигне из позиције A$(8-i)$ и C$(8-i)$ до осмог реда, а да притом у сваком потезу поједе противничку фигуру (односно, у сваком потезу се са поља (x,y) помери или на поље $(x-1,y+1)$ (потез L) или на поље $(x+1,y+1)$ (потез D)). Нека је b_i, $0 \leqslant i \leqslant 6$, број начина да пешак стигне из A2 до осмог реда, а да притом i пута поједе противничку фигуру (односно, i пута употреби неки од потеза L или D, а $6-i$ пута примени потез у којем се са поља (x,y) помери на поље $(x,y+1)$ (потез P)). Треба одредити $\sum\limits_{i=0}^{6} b_i$, а јасно је да важи $b_i = \binom{6}{i} a_i$ за $1 \leqslant i \leqslant 6$ (у потезима P се не мења колона у којој се пешак налази). Такође је $b_0 = 1$, па се формално може додефинисати $a_0 = 1$.

Онда је $a_i = a_{i-2} + c_{i-2}$ за $i \geqslant 3$ (први потез не може бити D, ако су прва два потеза D и L, поново се налази у колони A, а ако су прва два потеза D и D, налазиће се у колони C; у оба случаја преостаће му $i-2$ потеза), а како је $a_2 = 2$, ако се формално дефинише $c_0 = 1$, наведена веза ће важити и за $i \geqslant 2$. Следи $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, $c_3 = 7$ (није урачуната путања у којој се три пута примени потез L, пошто излази из оквира табле), $c_4 = 14$ (нису урачунате две путање у којима су прва три потеза L, пошто излазе из оквира табле), па је $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ (може се одиграти само потез D), $a_2 = a_0 + c_0 = 1+1 = 2$, $a_3 = a_1 + c_1 = 1+2 = 3$, $a_4 = a_2 + c_2 = 2+4 = 6$, $a_5 = a_3 + c_3 = 3+7 = 10$, $a_6 = a_4 + r_4 = 6 + 14 = 20$.

Коначно, број начина на који може доћи до осмог реда табле је $\sum\limits_{i=0}^{6} b_i = \sum\limits_{i=0}^{6} \binom{6}{i} a_i = 1 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 15 \cdot 6 + 6 \cdot 10 + 1 \cdot 20 = 1 + 6 + 30 + 60 + 90 + 60 + 20 = 267$.

3. Нека су M, F и R, редом, скупови ученика који похађају секције из математике, физике и рачунарства. Нека је $x = \big|M \setminus (F \cup R)\big|$, $y = \big|F \setminus (M \cup R)\big|$, $z = \big|R \setminus (M \cup F)\big|$, $a = \big|(M \cap F) \setminus R\big|$, $b = \big|(M \cap R) \setminus F\big|$, $c = \big|(F \cap R) \setminus M\big|$ и $t = \big|M \cap F \cap R\big|$.

Онда је број ученика који похађају секцију из математике $|M| = x + a + b + t$, док је просечан број секција који они похађају $m = \frac{x+2a+2b+3t}{x+a+b+t} = \alpha$, па је $(2-\alpha)(a+b) + (3-\alpha)t = (\alpha-1)x$. Аналогно, посматрањем ученика који похађају секцију из физике, односно рачунарства, добија се $(2-\alpha)(c+a) + (3-\alpha)t = (\alpha-1)y$, односно $(2-\alpha)(b+c) + (3-\alpha)t = (\alpha-1)z$.

Просечан број секција које похађају ученици целе школе је $\beta = \frac{x+y+z+2a+2b+2c+3t}{x+y+z+a+b+c+t}$, па како је $\alpha \neq 1$, заменом x, y и z из претходних једнакости следи

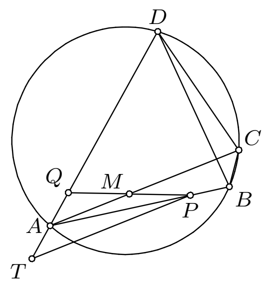
$$\beta = \frac{2 \cdot (\frac{2-\alpha}{\alpha-1} + 1)(a+b+c) + 3 \cdot (\frac{3-\alpha}{\alpha-1} + 1)t}{(2 \cdot \frac{2-\alpha}{\alpha-1} + 1)(a+b+c) + (3 \cdot \frac{3-\alpha}{\alpha-1} + 1)t} = \frac{2(a+b+c) + 6t}{(3-\alpha)(a+b+c) + (8-2\alpha)t}.$$

Дакле, $\beta < \alpha$ је еквивалентно са $2(a+b+c) + 6t < (3\alpha - \alpha^2)(a+b+c) + (8\alpha - 2\alpha^2)t$, па је довољно доказати да је $2 < 3\alpha - \alpha^2$ и $6 < 8\alpha - 2\alpha^2$, односно да је $(\alpha-1)(\alpha-2) < 0$ и $(\alpha-1)(\alpha-3) < 0$, што је тачно, пошто је $\alpha \in (1,2)$.

4. Нека је T тачка на правој AD таква да је $AT = BC$ и да важи $D{-}A{-}T$. Пошто је $AP = CD$,

$\sphericalangle PAT = \sphericalangle BAT = 180^\circ - \sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$ (јер је $ABCD$ тетиван четвороугао, па су му наспрамни углови суплементни) и $AT = AQ = BC$, важи $\triangle ATP \cong \triangle BCD$. Следи $\sphericalangle ATP = \sphericalangle DBC$, а како је $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC$ (периферијски углови над тетивом CD у описаном кругу $ABCD$), следи $\sphericalangle ATP = \sphericalangle DAC$. Како је $D{-}A{-}T$, следи $TP \parallel AM$, па је $\triangle QAM \sim \triangle QTP$, одакле је $\frac{QM}{MP} = \frac{QA}{AT} = 1$, пошто је $AT = QA$.

Дакле, $QM = MP$, односно M је средиште дужи PQ.



Окр–22–2А4

5. У описаном поступку ће сваки број написан на табли бити природан. Ако је у неком тренутку на табли написан број 2^{2022}, непосредно пре њега написани број x задовољава или $2x-1 = 2^{2022}$ или $3x+1 = 2^{2022}$, а како је прво немогуће (стране једначине су различите парности), следи $x = \frac{2^{2022}-1}{3}$ (важи $x \in \mathbb{Z}$, пошто је $2^{2022} = (2^2)^{1011} \equiv 1 \pmod 3$). Ако је y број написан непосредно пре броја x, онда је или $2y - 1 = \frac{2^{2022}-1}{3}$ или $3y + 1 = \frac{2^{2022}-1}{3}$. Међутим, како је $2^{2022} = (2^6)^{337} \equiv 1 \pmod 9$, број $\frac{2^{2022}-4}{9}$ није цео, тј. друга једначина нема целобројних решења, па је $y = \frac{2^{2022}+2}{6} = \frac{2^{2021}+1}{3}$ (важи $\frac{2^{2021}+1}{3} \in \mathbb{Z}$, пошто је $2^{2021} \equiv 2 \pmod 3$). Ако је z број који је написан на табли непосредно пре броја y, онда је или $2z-1 = \frac{2^{2021}+1}{3}$ или $3z+1 = \frac{2^{2021}+1}{3}$. Међутим, како је $2^{2021} = (2^6)^{336} \cdot 2^5 \equiv 2^5 \equiv 5 \pmod 9$, број $\frac{2^{2022}-2}{9}$ није цео, тј. друга једначина нема целобројних решења, па је $z = \frac{2^{2021}+4}{6} = \frac{2^{2020}+2}{3}$. Коначно, ако је t број који је написан на табли непосредно пре броја z, како је z паран, мора бити $3t + 1 = z = \frac{2^{2020}+2}{3}$, тј. $t = \frac{2^{2020}-1}{9}$. Међутим, како је $2^{2020} = (2^6)^{336} \cdot 2^4 \equiv 2^4 \equiv 7 \pmod 9$, следи да $\frac{2^{2020}-1}{9}$ није цео број, па је последње немогуће.

Следи да се описаним поступком на табли не може појавити број 2^{2022}.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред – А категорија

1. При наведеним условима је $\sqrt[5]{\left(p+n\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt[5]{\left(p-n\sqrt{2}\right)^2}=\left(\sqrt[5]{p+n\sqrt{2}}+\sqrt[5]{p-n\sqrt{2}}\right)^2-2\cdot\sqrt[5]{p^2-2n^2}=m^2+2$, па је

$$\begin{aligned} m^5 &= p+n\sqrt{2}+p-n\sqrt{2}+5\cdot\sqrt[5]{\left(p+n\sqrt{2}\right)\left(p-n\sqrt{2}\right)}\cdot\left(\sqrt[5]{\left(p+n\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt[5]{\left(p-n\sqrt{2}\right)^3}\right)\\ &+ 10\cdot\sqrt[5]{\left(p+n\sqrt{2}\right)^2\left(p-n\sqrt{2}\right)^2}\cdot\left(\sqrt[5]{p+n\sqrt{2}}+\sqrt[5]{p-n\sqrt{2}}\right)\\ &= 2p+5\cdot\sqrt[5]{p^2-2n^2}\cdot\left(\sqrt[5]{p+n\sqrt{2}}+\sqrt[5]{p-n\sqrt{2}}\right)\\ &\cdot \left(\sqrt[5]{\left(p+n\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt[5]{\left(p+n\sqrt{2}\right)\left(p-n\sqrt{2}\right)}+\sqrt[5]{\left(p-n\sqrt{2}\right)^2}\right)+10\cdot\sqrt[5]{(p^2-2n^2)^2}\cdot m\\ &= 2p-5m\cdot(m^2+2+1)+10m=2p-5m^3-5m, \end{aligned}$$

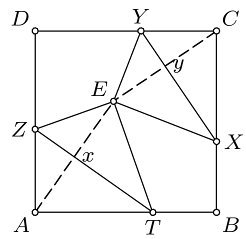
тј. $2p=m(m^4+5m^2+5)$. Пошто је $m\in\mathbb{N}$, уколико је непаран, онда је и m^4+5m^2+5 непаран, што по добијеној вези није могуће. Следи да $2\mid m$, а како је $m^4+5m^2+5>(m^2+2)^2\geqslant 9$, пошто је p прост број, следи $m=2$, $p=m^4+5m^2+5=41$. Како је 41 прост број, последње доводи до решења, односно за $p=41$, $n=\sqrt{\frac{41^2+1}{2}}=29\in\mathbb{N}$ се добија $m=2$. Дакле, једина могућа вредност броја m је 2.

2. Нека је $AE=2x$ и $CE=2y$. У сваком троуглу тежишна дуж је не мања од одговарајуће висине. Стога, ако је P површина правоуглог троугла чија је хипотенуза c, а висина која одговара хипотенузи h, важи

$$P=h\cdot\frac{c}{2}\geqslant h\cdot h=h^2. \qquad (\dagger)$$

На основу неједнакости троугла у $\triangle AEC$, важи $x+y\geqslant\sqrt{2}$, па применом неједнакости између квадратне и аритметичке средине следи $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\geqslant\frac{x+y}{2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$, односно

$$x^2+y^2\geqslant 1. \qquad (\ddagger)$$



Окр–22–3А2-2

Применом (†) на $\triangle ZTE$ и $\triangle XYE$, чије су висине хипотенуза x и y, редом, ако су њихове површине $P(\triangle ZTE)$ и $P(\triangle XYE)$, следи $P(\triangle ZTE)\geqslant x^2$ и $P(\triangle XYE)\geqslant y^2$, па на основу (‡) следи $P(\triangle ZTE)+P(\triangle XYE)\geqslant x^2+y^2\geqslant 1$. Једнакост се достиже ако и само ако су тачке A,E,C колинеарне и $x=y$ (онда су $P(\triangle ZTE)$ и $P(\triangle XYE)$ једнакокрако–правоугли), односно ако и само ако је тачка E центар уоченог квадрата.

3. Ако је $n=1$, таблица која задовољава наведену особину очигледно не постоји. Ако је $n=2$, услов који задовољава таблица даје да су њене две колоне супротне.

Нека таблица M димензије $m\times(n+2)$, $m,n\in\mathbb{N}$, задовољава наведени услов и нека је K_1 једна од њених колона која има највише једнаких елемената. Нека је тај број једнаких елемената k. Без умањења општости, нека K_1 садржи k нула (таблица која на местима на којима су нуле има јединице, а на местима на којима су јединице има нуле, задовољава исту особину). Онда све остале колоне садрже највише k нула и највише k јединица. По наведеном услову, постоји колона K_2 чији су чланови јединице у оним врстама у којима K_1 има нуле. Онда, по начину избора K_1 (највише истих елемената), K_2 има нуле на преосталим позицијама. Следи да су K_1 и K_2 супротне, као и да таблица M' димензије $m\times n$, добијена из M уклањањем колона K_1 и K_2, задовољава услов задатка. Стога, ако је тврђење тачно за све матрице димензије $m\times n$, $m,n\in\mathbb{N}$, на основу претходног разматрања следи да је тачно и за M (колоне M' се могу поделити на супротне парове, а још један такав пар чине K_1 и K_2).

Овим је тврђење доказано математичком индукцијом.

4. Геометријски низ је растући ако је први члан позитиван и количник низа већи од 1 или ако је први члан низа негативан и количник низа из $(0, 1)$. Ако је уочени низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и q количник низа, онда је $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Следи $1 = a_8 \cdot a_{10} = a_9^2$, па је $a_9 \in \{-1, 1\}$. Ако је $a_9 = 1$, како је низ растући, следи $a_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је $4 = a_7 - a_6 < a_9 - a_6 < 1$, те у овом случају низ са наведеним особинама не постоји. Ако је $a_9 = -1$, следи $-1 = a_1 \cdot q^8$ и $4 = a_7 - a_6 = a_1 \cdot q^5(q-1)$, па је $4q^3 + q - 1 = 0$, тј. $(2q-1)(2q^2+q+1) = 0$. Важи $2q^2+q+1 \neq 0$ за $q \in \mathbb{R}$, па је $q = \frac{1}{2} \in (0, 1)$, одакле је $a_n = -2^{9-n}$ за $n \in \mathbb{N}$, што је низ који задовољава наведене услове.

Коментар. У случају $a_9 = 1$ је, на основу особина низа, избегнуто добијање кубне једначине. Тај део се могао решити и на тај начин, слично решењу другог случаја добија се $4q^3 - q + 1 = 0$. Како је у овом случају геометријски низ позитиван и неопадајући, мора бити $q \geqslant 1$, а пошто за $q \geqslant 1$ важи $4q^3 - q + 1 = q(q^2 - 1) + 3q^3 + 1 > 0$, добијена једначина нема решења на $[1, \infty)$.

5. Нека је $x_n = 6 \cdot 10^n + 8$ за $n \geqslant 4$. Онда је

$$x_n^3 = 216 \cdot 10^{3n} + 864 \cdot 10^{2n} + 1152 \cdot 10^n + 512 = \boxed{2}16\underbrace{\boxed{0}\ldots0}_{n-3}864\underbrace{0\ldots0}_{n-4}115\boxed{2}\underbrace{0\ldots0}_{n-3}51\boxed{2},$$

што је овогодишњи број. Следи да овогодишњих бројева има бесконачно много.

Друштво математичара Србије

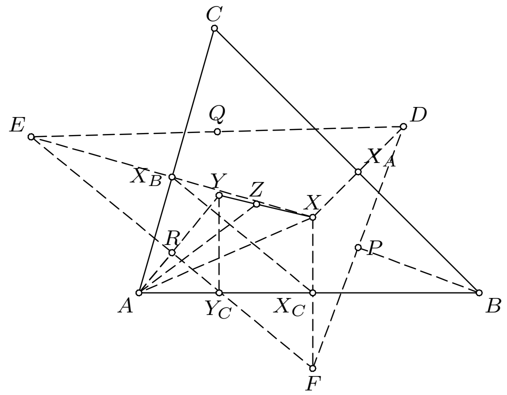
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред – А категорија

1. За свако $n \in \mathbb{N}$ и $c \geqslant 0$ функција $\sqrt[n]{c+x}$ је растућа на $[0,1]$. Следи, након избора m и n, највеће вредности A и B се добијају избором $a_1 = \ldots = a_n = 1$ и $b_1 = \ldots = b_m = 1$ и износе $\sqrt[n]{n}$ и $\sqrt[m]{m}$, редом. Ако је $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ за $x \in (0,\infty)$, онда је $f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}$, па f расте на $(1,e)$, а опада на (e,∞). Како је $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$, следи да је $\sqrt[3]{3}$ највећи члан низа $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$, па ако Александра изабере $n = 3$ и $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, побеђује, без обзира на то шта одигра Бојан.

Уколико за изабране $m, n \geqslant 2$ Александра изабере $a_1 = \ldots = a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, а Бојан $b_1 = \ldots = b_m = \frac{1}{\sqrt{m}}$, добиће се $A = B = 1$, па је ово пример игре која се завршава нерешеним исходом.

2. Нека је R тачка таква да је X_CXX_BR паралелограм. Нека су тачке D, E и F симетричне тачки X у односу на BC, CA и AB, редом. Онда су R, P, Q, редом, средишта EF, FD, DE, а како је $AE = AF = AX$, $BD = BF = BX$ и $CD = CE = CX$, важи $AR \perp EF$, $BP \perp FD$, $CQ \perp DE$. Следи $\sphericalangle PBC = \sphericalangle FDX$ (пошто је $BP \perp FD$ и $BC \perp XD$), а аналогно је и $\sphericalangle QCA = \sphericalangle DEX$, $\sphericalangle RAB = \sphericalangle EFX$, као и $\sphericalangle ABP = \sphericalangle XFD$ (пошто је $BP \perp FD$ и $AB \perp XF$), односно $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle XDE$, $\sphericalangle CAR = \sphericalangle XEF$. Како се праве DX, EX и FX секу (у X), на основу претходно добијених једнакости и (тригонометријске) Чевине теореме (примењене на $\triangle DEF$ и $\triangle ABC$) следи да се BP, CQ и AR секу у једној тачки (а како се BP и CQ секу у Y, то је тачка Y).



Окр–22–4А2

Како је четвороугао XX_BAX_C тетиван, следи $\sphericalangle XAX_C = \sphericalangle XX_BX_C$ (угао над тетивом XX_C) и $\sphericalangle X_BX_CX = \sphericalangle X_BAX$ (угао над тетивом XX_B), па је $\sphericalangle CAY = \sphericalangle CAR = \sphericalangle XEF = \sphericalangle XX_BX_C = \sphericalangle XAX_C = \sphericalangle XAB$, као и $\sphericalangle YAB = \sphericalangle RAB = \sphericalangle EFX = \sphericalangle X_BX_CX = \sphericalangle X_BAX = \sphericalangle CAX$. Следи да је симетрала $\sphericalangle CAB$ истовремено и симетрала $\sphericalangle XAY$ (и како X не припада симетрали $\sphericalangle CAB$, тачка Z је добро дефинисана, односно X, Y, Z су различите тачке).

Следи $\frac{ZY}{ZX} = \frac{AY}{AX}$, а како је $\triangle AYY_C \sim \triangle AXX_B$ (правоугли троуглови и важи $\sphericalangle YAY_C = \sphericalangle YAB = \sphericalangle CAX = \sphericalangle X_BXA$), важи и $\frac{AY}{AX} = \frac{YY_C}{XX_B}$, па је $\frac{ZY}{ZX} = \frac{YY_C}{XX_B}$.

3. Нека је $L = x^{20} + 2^y$ и $D = 2022^z$. Пошто је $L = D$ и како је 2022 дељив и са 2 и са 3, x мора бити паран број, а како x^2 даје остатак или 0 или 1 при дељењу са 3, следи да 2^y даје остатак или 0 или 2 при дељењу са 3. Дакле, $2^y \equiv 2 \pmod 3$, па y мора бити непаран број (важи $2^1 \equiv 2 \pmod 3$ и $2^2 \equiv 1 \pmod 3$).

Нека је $x = 2^a \cdot x_1$, где је x_1 непаран број. Како је y непаран, не може бити $y = 20a$.

Ако је $y > 20a$, онда $2^{20a} \parallel L$ и $2^z \parallel D$, па је $20a = z$ и $x_1^{20} + 2^{y-20a} = 1011^{20a}$. Како x_1^4 даје остатак или 0 или 1 при дељењу са 5, $1011^{20a} \equiv 1 \pmod 5$ и $5 \nmid 2^{y-20a}$, следи $5 \mid x_1$ и $2^{y-20a} \equiv 1 \pmod 5$. Међутим, како $2^1 - 1$, $2^2 - 1$ и $2^3 - 1$ нису дељиви са 5, а важи $2^4 \equiv 1 \pmod 5$, последње значи да $4 \mid y - 20a$, односно $4 \mid y$, што је немогуће, пошто је претходно показано да $2 \nmid y$.

Ако је $y < 20a$, онда $2^y \parallel L$ и $2^z \parallel D$, па је $y = z$ и $2^{20a-y} \cdot x_1^{20} + 1 = 1011^y$. Пошто $5 \mid 1011^y - 1$, следи да $5 \mid x_1$, па $5^{20} \mid 1011^y - 1$. Из добијеног следи и да $25 \mid 1011^y - 1$, тј. $25 \mid 11^y - 1$. На основу Ојлерове теореме је $11^{20} \equiv 1 \pmod{25}$ (пошто је $\varphi(25) = 20$), како је $11^4 \equiv 21^2 \equiv 41 \equiv 16 \not\equiv 1 \pmod{25}$ бројеви $11^1 - 1$, $11^2 - 1$ и $11^4 - 1$ нису дељиви са 25, као и $11^5 = 11^4 \cdot 11 \equiv 16 \cdot 11 \equiv 1 \pmod{25}$, па следи да $5 \mid y$. Специјално, важи $20a - y \geqslant 5$, па $4 \mid 2^{20a-y} \cdot x_1^{20} = 1011^y - 1 \equiv (-1)^y - 1 \pmod 4$, одакле $2 \mid y$, што је немогуће, пошто је претходно показано да $2 \nmid y$.

Из претходних разматрања следи да наведена једначина нема решења у скупу природних бројева.

4. Нека је $g_a(x)=x^3+ax^2+x+(a-2)^2$. Како је $x+1<0$ за $x<-1$ и $x+1>0$ за $x>-1$. Следи, ако је $g_a(-1)\neq 0$, пошто је полиномска функција непрекидна, $g_a(x)$ ће бити константног знака у некој околини тачке -1, па не може бити $(x+1)g_a(x)\geqslant 0$ за све x из те околине. Дакле, $g_a(-1)=0$, тј. $a^2-3a+2=0$, па мора бити $a\in\{1,2\}$. Ако је $a=2$, онда је $(x+1)g_2(x)=(x+1)(x^3+2x^2+x)=x(x+1)^3$, што је негативно за $x\in(-1,0)$, па није испуњен услов задатка. Ако је $a=1$, онда је $(x+1)g_1(x)=(x+1)(x^3+x^2+x+1)=(x+1)^2(x^2+1)$, што је ненегативно за свако $x\in\mathbb{R}$. Дакле, једино $a=1$ задовољава наведени услов.

5. Ако је $a\in\mathbb{N}$, нека је $\nu_2(a)\in\mathbb{N}_0$ највећи степен броја 2 са којим је дељив a, тј. важи $a=2^{\nu_2(a)}\cdot a'$, где је a' непаран број. Нека је $\nu_2(0)=\infty$ и нека је $k<\infty$ за свако $k\in\mathbb{N}$.

Нека се у неком тренутку на гомилама налази по a и b златника и нека је $\nu_2(a)=\nu_2(b)=k\in\mathbb{N}_0$. Онда је $a=2^k a'$ и $b=2^k b'$, где су a' и b' непарни, па играч који је на потезу са неке од гомила може узети број златника дељив са $2^{k'}$, где је $0\leqslant k'\leqslant k$. Уколико је $k'<k$, након потеза на тој гомили остаће број златника дељив са $2^{k'}$, али не и са 2^k, а уколико је $k'=k$, након потеза на тој гомили остаће број златника дељив са 2^{k+1}, пошто, ако су n_1 и n_2 непарни бројеви, онда $2^{k+1}\mid n_1 2^k-n_2 2^k$. У сваком случају, уколико након потеза на гомилама остане по a_1 и b_1 златника, важиће $\nu_2(a_1)\neq\nu_2(b_1)$.

Уколико се у неком тренутку на гомилама налази по a и b златника и притом је $\nu_2(a)\neq\nu_2(b)$, без умањења општости нека је $\nu_2(b)>\nu_2(a)=k\in\mathbb{N}_0$. Ако је $\nu_2(b)=\infty$, тј. $b=0$, играч који је на потезу са гомиле на којој се налази a златника може узети све златнике и тиме завршити игру. Иначе, важи $\nu_2(b)=k+l$ за неко $l\in\mathbb{N}$, тј. важи $a=2^k a'$ и $b=2^{k+l}b'$, где су a' и b' непарни бројеви. Ако се са гомиле на којој се налази b златника узме 2^k златника, на њој ће остати $b_1=2^k(2^l b'-1)$ златника, а како је број $2^l b'-1$ непаран, важиће $\nu_2(b_1)=\nu_2(a)$. Дакле, у овом случају играч који је на потезу може одиграти потез тако да, уколико су a_1 и b_1 бројеви златника који ће остати на гомилама након потеза, важи $\nu_2(a_1)=\nu_2(b_1)$.

Описана игра се завршава у коначном броју потеза, пошто се у сваком потезу узима макар један златник са стола. У завршној позицији је $a=b=0$, тј. $\nu(a)=\nu(b)=\infty$, па играч након чијег потеза на гомилама остаје по a и b златника, тако да је $\nu(a)=\nu(b)$, по претходним закључцима, има победничку стратегију. Следи да играч A има победничку стратегију уколико је $\nu(m)\neq\nu(n)$, а ако је $\nu(m)=\nu(n)$, победничку стратегију има играч B.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – Б категорија

1. Ако је $m \in \mathbb{N}$, онда је m^2 потпун квадрат, тј. $m\,\rho\,m$, па је релација ρ рефлексивна. Ако су $m, n \in \mathbb{N}$ такви да је $m\,\rho\,n$, онда је mn потпун квадрат, па је то и nm, односно важи $n\,\rho\,m$, те је ρ симетрична релација. Како је $18\,\rho\,2$ и $2\,\rho\,18$, а притом је $2 \neq 18$, следи да ρ није антисиметрична релација. Ако су $m, n, k \in \mathbb{N}$ такви да је $m\,\rho\,n$ и $n\,\rho\,k$, онда је $mn = p^2$ и $nk = q^2$ за неке $p, q \in \mathbb{N}$, па је $mk = \left(\frac{pq}{n}\right)^2$. Притом, како је $mk \in \mathbb{N}$, следи $\frac{pq}{n} \in \mathbb{N}$, па је $m\,\rho\,k$, тј. ρ је транзитивна релација.

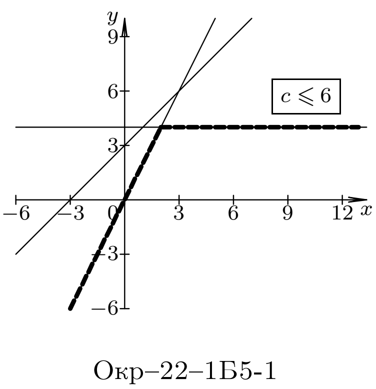
Из добијеног следи да је ρ релација еквиваленције, а није релација поретка.

2. Из наведеног услова је $n^2 - 1 = 100p^2 - p^4$, односно $(n-1)(n+1) = p^2(10-p)(10+p)$. Следи $p \leqslant 10$, па како је p прост, мора бити $p \in \{2, 3, 5, 7\}$. За те вредности p, добија се $n^2 = 385$, $n^2 = 820$, $n^2 = 1\,876$, $n^2 = 2\,500 = 50^2$, редом, од којих прве три немају решења у скупу природних бројева. Дакле, једино решење наведене једначине је $(n, p) = (50, 7)$.

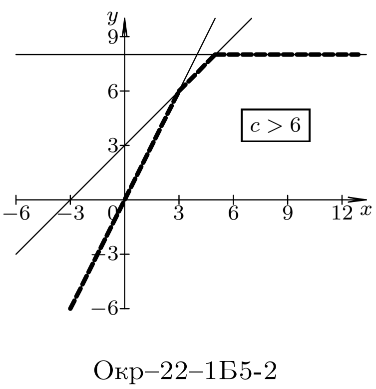
3. Нека је R полупречник описаног круга уоченог дванаестоугла. Тај круг је и описани круг квадрата, па је $a\sqrt{2} = 2R$, односно $a = R\sqrt{2}$. Уочени дванаестоугао се састоји од 12 једнакокраких труглова, дужине крака R, а угла између крака једнаког $30°$. Ако је OAB један такав троугао, $OA = OB = R$, $\sphericalangle BOA = 30°$ и D подножје нормале из B на OA, онда је $\triangle BOD$ половина једнакостраничног троугла странице R (важи $\sphericalangle DBO = 60°$, $\sphericalangle ODB = 90°$), па је $BD = \frac{R}{2}$. Следи да је површина $\triangle BOA$ једнака $\frac{R \cdot \frac{R}{2}}{2} = \frac{R^2}{4}$, па је површина дванаестоугла једнака $12 \cdot \frac{R^2}{4} = 3R^2$. Следи $2022 = 3R^2$, одакле је $R^2 = 674$, па је $a = R\sqrt{2} = 2\sqrt{337}$.

4. Нека су d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 боје које се користе зе бојење двојки, а n_1, n_2, n_3 боје које се користе за бојење нула. По условима, месец мора бити фебруар, а прва цифра године мора бити 2 (тј. датум је облика $a_1a_2.02.2a_6a_7a_8.$). Међу преосталим цифрама су 2 нуле и 3 двојке, уз једино ограничење при њиховом распоређивању да не може бити $a_1 = a_2 = 0$, па се распоред цифара може извршити на $\binom{5}{2} - 1$ начина. Након тога се расподела боја d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 на цифре 2 врши на $5!$ начина, а, независно од тога, расподела боја n_1, n_2, n_3 на цифре 0 на $3!$ начина. Следи да је број различитих датума $5! \cdot 3! \cdot \left(\binom{5}{2} - 1\right) = 6\,480$.

5. Важи $f(x) = 2x \oplus (x+3) \oplus c = \min\{2x, x+3, c\}$. Праве $y = 2x$ и $y = x+3$ се секу у тачки $(3, 6)$ и важи $\min\{2x, x+3\} = \begin{cases} 2x, & \text{ако је } x < 3 \\ x+3, & \text{ако је } x \geqslant 3 \end{cases}$, $\min\{2x, c\} = \begin{cases} 2x, & \text{ако је } x < \frac{c}{2} \\ c, & \text{ако је } x \geqslant \frac{c}{2} \end{cases}$ и



Окр–22–1Б5-1



Окр–22–1Б5-2

$\min\{x+3, c\} = \begin{cases} x+3, & \text{ако је } x < c-3 \\ c, & \text{ако је } x \geqslant c-3 \end{cases}$. Следи да је

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ако је } x \in (-\infty, \frac{c}{2}) \\ c, & \text{ако је } x \in [\frac{c}{2}, \infty) \end{cases}, \text{ уколико је } c \leqslant 6,$$

$$\text{односно } f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ако је } x \in (-\infty, 3) \\ x+3, & \text{ако је } x \in [3, c-3) \\ c, & \text{ако је } x \in [c-3, \infty) \end{cases}, \text{ уколико је } c > 6.$$

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – Б категорија

1. Највећа цифра таквог четвороцифреног броја не може бити 1, пошто би онда она морала да се појави 4 пута. Уколико је највећа цифра таквог броја 2, она се појављује 1 или 2 пута, а преостале цифре су једнаке 1, па таквих бројева има $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 10$. Уколико је највећа цифра таквог броја 3, она се појављује 1 или 2 пута, а преостале цифре су или 1 или 2 и притом нема ограничења приликом избора да ли је у питању цифра 1 или 2, па таквих бројева има $\binom{4}{1} \cdot 2^3 + \binom{4}{2} \cdot 2^2 = 56$. Дакле, бројева са наведеним особинама има $10 + 56 = 66$ (Тангента, М1605).

2. Тачке K и L, редом, су центри уписаних кругова у $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$, па су CK и CL симетрале $\sphericalangle DCA$ и $\sphericalangle BCD$, редом. Следи $\frac{CD}{CM} = \frac{DK}{KM}$ и $\frac{CD}{CN} = \frac{DL}{LN}$, па је $CM = CN$ ако и само ако је $\frac{DK}{KM} = \frac{DL}{LN}$, тј. ако и само ако је $KL \parallel MN$ (Тангента, М1436).

3. Ако је $z = \frac{1+ir}{1-ir}$, за $r \in \mathbb{R}$, онда је $\overline{1+ir} = 1 - ir \neq 0$, па је $|1+ir| = |1-ir| \neq 0$, одакле је $|z| = 1$. Ако је $z = \frac{1+ir}{1-ir}$ и $z \neq -1$, онда је $r = \frac{1}{i} \cdot \frac{z-1}{z+1}$, па ако је $|z| = 1$, онда је $\overline{z} = \frac{1}{z}$, одакле је $\overline{r} = -\frac{1}{i} \cdot \frac{\frac{1}{z}-1}{\frac{1}{z}+1} = \frac{1}{i} \cdot \frac{z-1}{z+1} = r$, односно $r \in \mathbb{R}$ (Тангента, М1692).

4. Како квадратна функција $f(x)$ има две различите реалне нуле, њена дискриминанта D_f је позитивна, тј. важи $D_f = 4(a+1)^2 + 4a = 4a^2 + 12a + 4 > 0$. Тачка (x_0, y_0) је заједничка тачка графика функција $f(x)$ и $g(x)$ ако и само ако је $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$, тј. ако и само ако је x_0 реална нула функције $g(x) - f(x) = (3a+1)x^2 - 2ax - 1$. Ако је $a \neq -\frac{1}{3}$, то је квадратна функција чија је дискриминанта $4a^2 + 4(3a+1) = 4a^2 + 12a + 4 = D_f > 0$, па она има две различите реалне нуле, што по услову задатка није случај. Ако је $a = -\frac{1}{3}$, онда је $D_f = \frac{4}{9} > 0$, па $f(x)$ има две различите реалне нуле, док је $g(x) - f(x) = \frac{2}{3} \cdot x - 1$, па графици функција $f(x)$ и $g(x)$ имају тачно једну заједничку тачку. Дакле, једина таква вредност је $a = -\frac{1}{3}$.

5. За $n \geqslant 2$ важи $4 \mid 2^n$, па како је $2^4 \equiv 1 \pmod 5$, следи $2^{2^n} + 1 \equiv 2 \pmod 5$. Како је и $2^{2^n} + 1 \equiv 1 \pmod 2$, следи $2^{2^n} + 1 \equiv 7 \pmod{10}$, односно последња цифра броја $2^{2^n} + 1$ је 7.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред – Б категорија

1. Неједначина је дефинисана за $x \neq 0$. Ако је $x < 0$, именилац разломка са леве стране неједначине је негативан, а бројилац позитиван, па је та страна неједначине негативна. Како је друга страна неједначине позитивна, у овом случају нема решења. Ако је $x > 0$, ако је $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x > 1$, неједначина је еквилалентна са $\frac{3+\frac{y}{5}}{y-1} \geqslant 2$, тј. са $y \leqslant \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$, па је њено решење $x \in (0, 2]$.

2. Наведени систем је еквивалентан са $y + 1 = 4(x + 1)^3$, $x + 1 = 4(y + 1)^3$, одакле је $y + 1 = 2^8 \cdot (y + 1)^9$, па је или $y + 1 = 0$ или $(y + 1)^8 = \frac{1}{2^8}$, а последње у скупу реалних бројева значи да је $y + 1 \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Дакле, решење система у скупу реалних бројева је $(x, y) \in \left\{(-1, -1), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)\right\}$.

3. Ако је r_k полупречник основе, а h_k висина купе, по услову задатка је $h_k = \frac{3R}{2}$. На основу осног пресека купе следи да је R полупречник описаног круга једнакокраког троугла, дужине основице $2r_k$ и висине која одговара основици h_k, па је $R^2 = r_k^2 + |h_k - R|^2$, одакле је $r_k = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Ако је d тражено растојање и r_1 полупречник круга који се добија у пресеку тражене равни и лопте, следи $r_1^2 = R^2 - |R - d|^2 = 2Rd - d^2$, а ако је r_2 полупречник круга који се добија у пресеку тражене равни и купе, следи $\frac{d}{r_2} = \frac{h_k}{r_k} = \sqrt{3}$, па је $r_2 = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Следи $a^2\pi = r_1^2\pi - r_2^2\pi$, односно $a^2 = 2Rd - d^2 - \frac{d^2}{3}$, тј. $4d^2 - 6Rd + 3a^2 = 0$. Дискриминанта добијене квадратне једначине је $4 \cdot (9R^2 - 12a^2)$, па ако је $a > \frac{R\sqrt{3}}{2}$ не постоји раван са наведеним својством, ако је $a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ ту раван треба конструисати на растојању $d = \frac{3R}{4}$ од врха купе, а ако је $a < \frac{3R}{4}$, онда је $0 < \frac{3R-\sqrt{9R^2-12a^2}}{4} < \frac{3R+\sqrt{9R^2-12a^2}}{4} < \frac{3R}{2}$, па постоји две равни са наведеним својством, за $d \in \left\{\frac{3R-\sqrt{9R^2-12a^2}}{4}, \frac{3R+\sqrt{9R^2-12a^2}}{4}\right\}$ (Тангента 70, Писмени задаци, задатак III-1).

4. За свако $1 \leqslant i \leqslant 9$ важи $S_i = S_1 + (i-1) \cdot 1600$, одакле је $\sum\limits_{i=1}^{9} S_i = 9S_1 + 36 \cdot 1600$, па збир у свакој колони (а самим тим и врсти и дијагонали) магичног квадрата мора бити $3S_1 + 12 \cdot 1600$. Следи да се конструкција траженог магичног квадрата своди на конструкцију магичног квадрата чији су елементи $0, 1, \ldots, 8$. Такав магични квадрат постоји, на пример $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 6 & 5 \\ \hline 8 & 4 & 0 \\ \hline 3 & 2 & 7 \\ \hline\end{array}$, а то доводи до магичног квадрата са траженим особинама $\begin{array}{|c|c|c|}\hline S_2 & S_7 & S_6 \\ \hline S_9 & S_5 & S_1 \\ \hline S_4 & S_3 & S_8 \\ \hline\end{array}$ (Тангента, М1485).

5. Ако је $x \in \mathbb{N}$, онда је или $x^2 \equiv 0 \pmod 3$ или $x^2 \equiv 1 \pmod 3$, па је остатак при дељењу броја x^{20} са 3 или 0 или 1. Ако је $y \in \mathbb{N}$, онда је $y^2 + y = y(y+1)$ паран број, а како је $2^2 \equiv 1 \pmod 3$, број 2^{y^2+y} даје остатак 1 при дељењу са 3. Следи да је остатак при дељењу броја $x^{20} + 2^{y^2+y}$ са 3 или 1 или 2. Са друге стране, за свако природно z број 2022^z је дељив са 3, па наведена једначина нема решења.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред – Б категорија

1. Важи $y = 3^{\log_{3^2} 5^2} = 3^{\log_3 5} = 5$, $z = \frac{27 \cdot \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2}} = 9$, а како је $(1+i)^2 = 2i$ и $(1-i)^2 = -2i$, следи $x = \frac{(2i)^{1011}}{(-2i)^{1005}} = -2^6 i^6 = 2^6$. Дакле, $n = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$ је природан број, а број његових делилаца је $(6+1)(2+1)(1+1) = 42$.

2. Ако је $n \equiv 0 \pmod 3$ или $n \equiv 2 \pmod 3$, онда је $n(n+1) \equiv 0 \pmod 3$, а ако је $n \equiv 1 \pmod 3$, онда је $n(n+1) \equiv 2 \pmod 3$, па $n^2 + n + 2024$ при дељењу са 3 даје остатак или 2 или 1. Следи да за произвољно природно n број $n^2 + n + 2024$ није дељив са 3, па није ни са $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$.

3. Ако је $x \geqslant 0$, једначина је еквивалентна са $2 + p(x-1) = 0$. Ако је $p = 0$, нема решења, а ако је $p \neq 0$, следи $x = 1 - \frac{2}{p}$, па једначина има решење на $[0, \infty)$ ако и само ако је $p \in (-\infty, 0) \cup [2, \infty)$.

Слично, ако је $x < 0$, једначина је еквивалентна са $2x^2 - 4px + 4(p-2) = 0$. Дискриминанта добијене квадратне једначине је $16(p^2 - 2p + 4) > 0$, па та једначина има два реална решења. Ако је $p < 2$, по Вијетовим правилима производ решења добијене квадратне једначине је $2(p-2) < 0$, па је једно од тих решења негативно, одакле следи да је и решење полазне једначине. Ако је $p \geqslant 2$, решења су истог знака, а по Вијетовим правилима збир решења добијене квадратне једначине је $2p$, па како су истог знака, оба су позитивна, тј. полазна једначина нема решења.

Дакле, ако је $p < 0$ једначина има једно негативно и једно ненегативно решење, ако је $p \in [0, 2)$, једначина нема ненегативних, а има једно негативно решење, а ако је $p \geqslant 2$, једначина има једно ненегативно, а нема негативних решења, тј. тражене вредности параметра су $p \in [0, \infty)$.

Коментар. Изрази $y = 4(px + 2 - p)$ за $p \in \mathbb{R}$ представљају праве које садрже тачку $(1, 8)$, тако да је захтев задатка одређивање које од уочених правих секу график функције $f(x) = \big(|x| - x\big)x$ тачно једном.

4. Ако је H ортоцентар $\triangle ABC$, онда је $AH \perp BC$, па према теореми о три нормале важи $BC \perp SM$, где је M подножје нормале из A на BC. Дакле, BC је нормална на раван ASM. Следи, $SA \perp BC$, а како је и $SA \perp SB$, SA је нормална на раван SBC. Следи $SA \perp SC$, а аналогно је и $SB \perp SC$. Према Питагориној теореми је $SA^2 + SB^2 = AB^2$, $SB^2 + SC^2 = BC^2$ и $SC^2 + SA^2 = CA^2$, па је наведена неједнакост еквивалентна са $(AB + BC + CA)^2 \leqslant 3(AB^2 + BC^2 + CA^2)$, тј. са $AB^2 + BC^2 + CA^2 \geqslant AB \cdot BC + BC \cdot CA + CA \cdot AB$, односно са $(AB - BC)^2 + (BC - CA)^2 + (CA - AB)^2 \geqslant 0$, што је тачно. Једнакост се достиже ако и само ако је $\triangle ABC$ једнакостраничан (уз услове задатка, онда су $\triangle SAB$, $\triangle SBC$ и $\triangle SCA$ једнакокрако–правоугли) (Тангента, M1443).

5. (а) Свако теме је крајња тачка три посматране дужи (две странице и једне дијагонале). У неко од темена је уписан број 1, па се дужима које полазе из тог темена придружују вредности не мање од $1 + 8 = 9$, $1 + 7 = 8$ и $1 + 6 = 7$, те m не може бити веће од 7. Са друге стране, ако се у темена $A_1, A_2, \ldots, A_8$ упишу, редом, бројеви $1, 6, 5, 2, 7, 3, 4, 8$, добија се $m = 7$.

(б) Због симетрије, укупан број тражених распореда је 8 пута већи од распореда у којима је у теме A_1 уписан број 1. Ако је у A_1 уписан број 1, како су на дужима A_1A_2, A_1A_5 и A_1A_8 израчунати збирови не мањи од 7, у темена A_2, A_5 и A_8 су уписани бројеви 6, 7 и 8 (у неком редоследу). Уколико би број 2 био уписан у теме A_3, онда у темена A_4 и A_7 морају бити уписани бројеви не мањи од 5, а то није могуће, пошто су бројеви $6, 7, 8$ већ уписани у друга темена, па не постоји два неуписана броја не мања од 5. По симетрији број 2 не може бити уписан ни у теме A_7, па следи да је уписан или у A_4 или у A_6. Због симетрије, распореда у којима је број 2 уписан у теме A_4 има колико и распореда у којима је број 2 уписан у теме A_6, па је довољно одредити колико има распореда код којих је број

2 уписан у теме A_4. Онда су на дужима A_4A_5 и A_4A_8 израчунати бројеви не мањи од 7, што је испуњено на дужи A_4A_8 (пошто се у A_8 налази један од бројева $6, 7, 8$), а да би било испуњено и на дужи A_3A_4, у темену A_3 мора бити уписан број 5. Коначно, након описаног поступка, како год се упишу бројеви 3 и 4 у темена A_6 и A_7 добија се је одговарајуће m једнако 7. Заиста, бројеви израчунати на дужима A_5A_6, A_2A_6, A_3A_7, A_7A_8 су не мањи од $3 + 5 = 8$, а број израчунат на дужи A_6A_7 је $3 + 4 = 7$.

Дакле, укупан број тражених распореда је $8 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 2 = 192$ (8 због распореда броја 1, 3! због распореда цифара $6, 7, 8$ у одговарајућа темена након одређивања темена у које је уписан број 1, „прво" 2 због распореда броја 2, а „друго" 2 због распореда бројева 3 и 4).