

Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из физике -

Ентропија црних рупа

Ученик:
Владан Козић IVe

Ментори:
Др Драгољуб Гочанин
Др Александра Димић

Београд, јун 2020.

Садржај

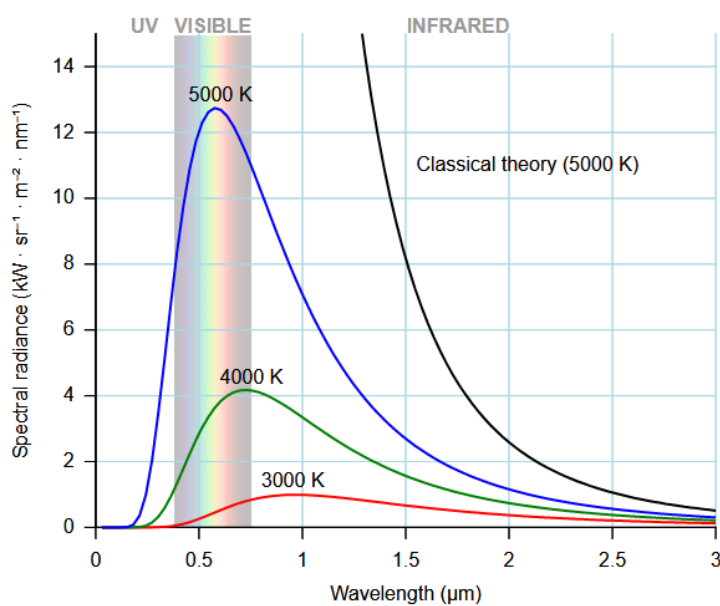
1	Увод	1
1.1	Настанак звезде и њен живот	1
1.2	Бели патуљак	3
1.3	Неутронска звезда	3
1.4	Црна рупа	4
2	Математички увод	7
2.1	Еуклидски простор E_3 и метрика	7
2.2	Координатни сингуларитет	9
2.3	Простор Минковског M_{1+3}	10
2.4	Квадривектори положаја, брзине и убрзања у простору Минковског	13
2.5	Успутни референтни систем	14
3	Риндлеров простор	17
3.1	Риндлерове координате	17
3.2	Риндлерови посматрачи и њихови закони	21
3.3	Унруов ефекат	22
4	Гравитација и црна рупа	27
4.1	Ајнштајнове једначине поља	27
4.2	Шварцшилдова метрика	27
4.3	Сопствено време и право растојање	29
4.4	Геометрија у близини хоризонта	30
4.5	Температура црне рупе	32
4.6	Ентропија црне рупе	33
5	Закони термодинамике црних рупа	35
6	Закључак	37

1

Увод

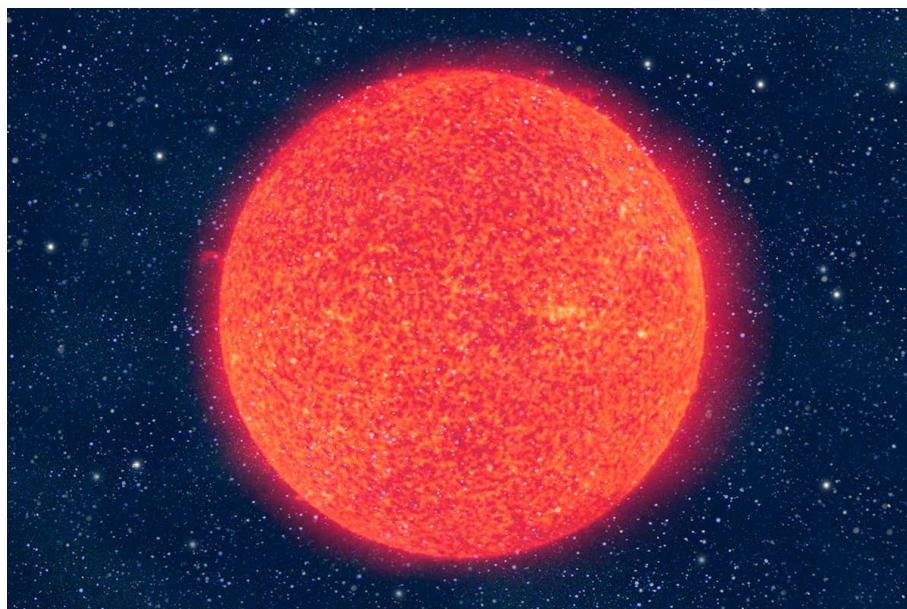
1.1 Настанак звезде и њен живот

Све звезде започињу свој живот као облаци гаса и прашине састављене од атома водоника и хелијума. Због дејства гравитације, ова материја почиње да се скупља, групишући се у протозвезду, затим у Т Таурі звезду, све до развића у звезду главног низа. Због високих температура долази до нуклеарне фузије у којој се језгра водоника спајају формирајући још теже језгро хелијума. Овај процес прати ослобађање енергије која се супротставља гравитацији, чинећи звезду стабилном (звезда има непроменљиву величину, температуру и сјај). Звезда остаје у овом стању све док не потроши скоро сав водоник као гориво. У овом тренутку звезда креће да се мења. Језгро почиње да се скупља и постаје топлије, због чега преостали водоник креће да сагорева већом брзином, стварајући већу количину енергије и померајући спољашње слојеве даље од језгра (радијус звезде се повећава). Пошто се спољашњи слојеви удаљавају од језгра, они постају хладнији. На основу Виновог закона ($\lambda_m = \frac{b}{T}$, где је $b = 2,9 \cdot 10^{-3} K \cdot m$) знамо да се са променом температуре мења и највероватнија таласна дужина у спектру топлотног зрачења апсолутног црног тела. Са повећањем температуре тела максимум криве спектралне емисионе моћи помера се ка мањим таласним дужинама и обрнуто.



Слика 1.1: График зависности спектралне емисионе моћи од таласне дужине.

Како су се спољни слојеви звезде охладиле, таласна дужина њиховог зрачења се помера ка црвеном спектру, па звезда добија црвену боју. Звезда тада постаје црвени џин. Она може да опстане у овом стању око милијарду година. У зависности од масе језгра, звезда може да постане бели патуљак, неутронска звезда или црна рупа.



Слика 1.2: Црвени џин.

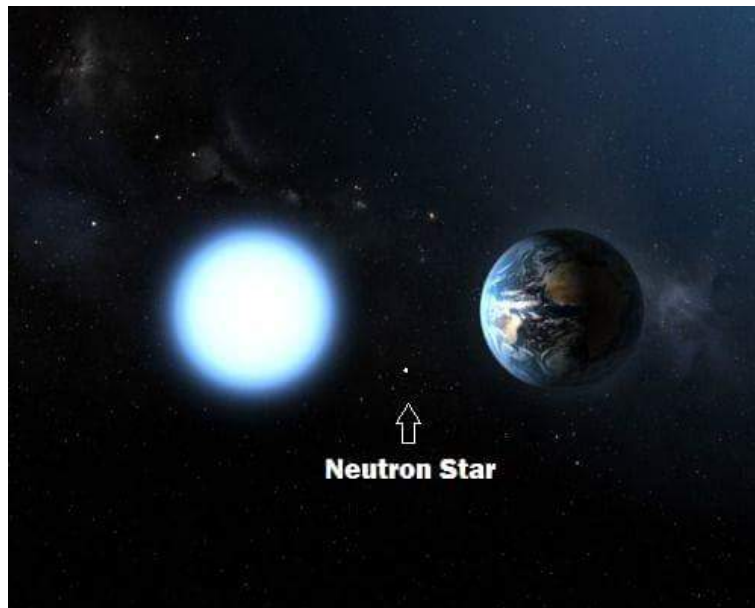
1.2 Бели патуљак

Уколико је језгро звезде лакше од $1.4M_{\odot}$ (Чандрасекарова граница) звезда ће постати бели патуљак. Након фазе црвеног џина, језгро звезде креће да се сужава и постаје топлије. Сада звезда улази у стадијум хелијумског бљеска приликом којег се језгра хелијума, претходно настала фузијом водоника, спајају, стварајући угљеник и кисеоник у троструком алфа процесу. Током овог стања, звезда пулсира, смањује се, загрева се и таласна дужина њеног зрачења тежи плавом делу спектра, па нам се чини да звезда добија плаву боју. Када језгро постане већински угљеник и кисеоник, оно не може да ствара теже елементе због недостатка топлоте (звезда нема довољно масе да би се језгро још више скупило и самим тим повећало температуру) и језгро се урушава. Сада звезда креће поново да се шири постајући огромна поново, све док са последњим праском енергије не избаци последње слојеве у свемир. Пошто више нема нуклеарног горива које се одупире гравитацији, језгро се скупља. Електрони не могу више да се сабијају и супротстављају се гравитацији. Ова појава се назива притисак дегенерације електрона. Тада остаје само мало (отприлике величине Земље), усијано језгро које се назива бели патуљак. Временом, језгро ће се охладити и угасити јер нема горива које би могло да сагорева, остављајући за собом црног патуљка. Материја која је избачена у свемир назива се планетарна маглина; она потом може да омогући стварање нове звезде. Чак 97% свих звезда у свемиру ће завршити као бели патуљци.

1.3 Неутронска звезда

Звезде веће масе ће имати већу количину горива, али ће сила гравитације бити снажнија па ће звезда много брже сагоревати гориво и самим тим ће имати краће време живота. Због тога ће ове звезде бити веће, светлије али и много топлије. Након сагоревања водоника, звезда такође расте до стадијума црвеног џина, али јој се језгро скупља и постаје доста топлије од језгара лакших звезда које постају бели патуљци. Због веће топлоте, језгра, након сагоревања хелијума и стварања угљеника и кисеоника, могу да наставе са нуклеарним реакцијама, стварајући теже елементе: неон, силицијум, све до гвожђа. Ови елементи се таложу као слојеви у језгру где је сваки слој испуњен све тежим елементом како се ближи центру звезде због веће топлоте и могућности обављања даље нуклеарне фузије. Међутим, када звезда створи гвожђе, даља фузија није могућа и звезда опстаје све док може да сагорева остале елементе и производи довољно енергије да би се одупрла гравитацији. Након што истроши све гориво, гравитација преовладава и

звезда се урушава. Спољашњи слојеви се нагло скупљају и одбијају од језгра стварајући експлозију која избацује све тешке елементе које је звезда створила назад у свемир. Овај догађај се назива супернова. Током супернове сви остали тешки и супертешки елементи се стварају, захваљујући великој количини енергије која цепа материју и спаја је поново. Ови елементи се стварају само током супернове или током килонове (настаје приликом спајања две неутронске звезде или неутронске звезде и црне рупе) и због тога су толико ретки у природи. Супернове су толико сјајне, да светле јаче од целих галаксија и могуће их је уочити голим оком. Гравитација звезде ће толико сабити језгро да ће сви електрони ући у реакцију са протонима стварајући неутроне. Ова реакција, заправо, покреће супернову. Уколико је преостало језгро након супернове лакше од $3M_{\odot}$, оно ће постати неутронска звезда. Неутрони неће више моћи да се сабијају и одупираће се гравитацији због Паулијевог принципа искључења у појави званој притисак дегенерације неутрона. Неутронске звезде су доста сабијене и због тога изузетно мале (око 10км полупречник), али зато садрже масу почетног језгра.

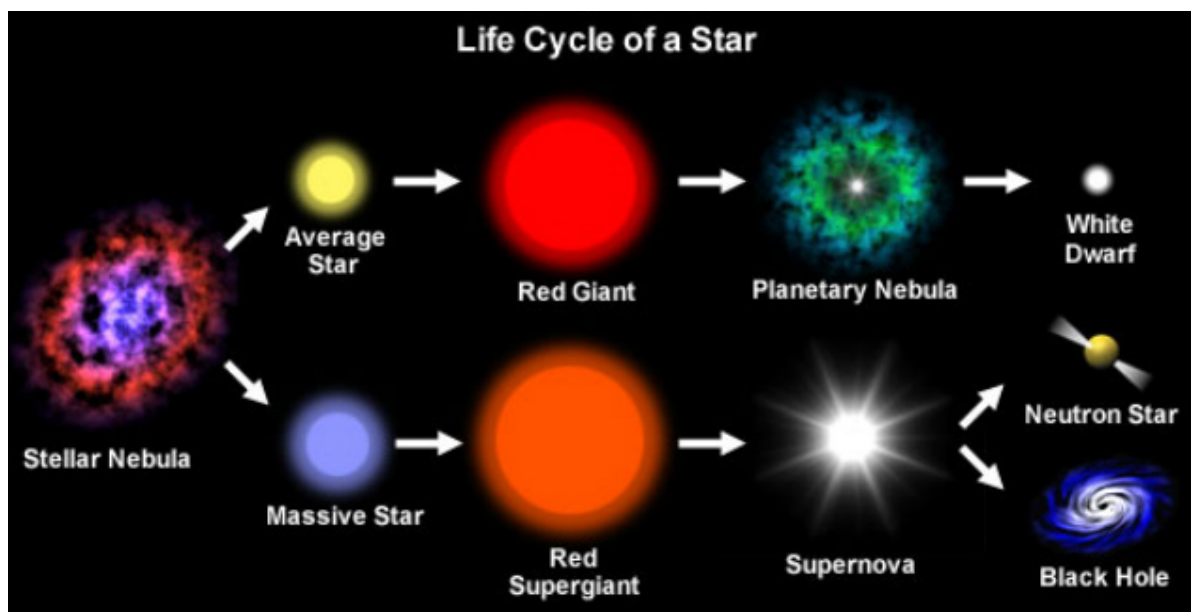


Слика 1.3: Поређење белог патуљка, неутронске звезде и Земље (с лева на десно).

1.4 Црна рупа

Уколико је маса језгра већа од $3M_{\odot}$, настаће црна рупа. Гравитација ће бити толико јака да јој се ни притисак дегенерације неутрона неће моћи одупрети и језгро ће се скупити у тачку нулте запремине и бесконачне густине

названу сингуларитет. Тако ће настати црна рупа. Црна рупа толико савија простор-време да јој чак ни светлост не може побећи. Фотони не могу да побегну толикој гравитацији и због тога ми не видимо како црна рупа изгледа. Оно што ми заправо видимо назива се хоризонт догађаја. Радијус хоризонта догађаја назива се Шварцшилдов радијус $R_s = \frac{2G_N M}{c^2}$ (где је R_s Шварцшилдов радијус, G_N гравитациона константа, M маса објекта и c брзина светлости). Након преласка хоризонта догађаја, да бисте напустили црну рупу морали бисте да се крећете брже од светлости што је, наравно, немогуће.



Слика 1.4: Животни циклус звезда.

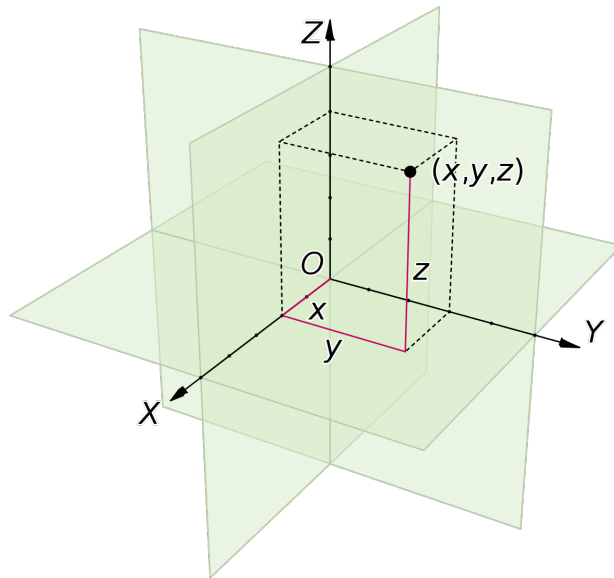
Општа теорија релативности предвиђа неколико различитих типова црних рупа:

црна рупа	неротирајућа	ротирајућа
ненаелектрисана	Шварцшилд	Кер
наелектрисана	Рајзнер-Нордструм	Кер-Њуман

2

Математички увод

2.1 Еуклидски простор E_3 и метрика



Слика 2.1: Еуклидски простор.

У еуклидском тродимензионалном простору сваку тачку простора можемо јединствено одредити помоћу уређене тројке Декартових координата (x, y, z) . Узмимо да се координате означавају са x^i где је $i \in \{1, 2, 3\}$. Тада је растојање између две тачке простора дато изразом:

$$ds_E^2 = +(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (2.1)$$

Из једначине се види да у еуклидском простору растојање мора бити

ненегативно (кажемо да је метрика дефинитна). Знаци испред сабирака у (2.1) чине сигнатуру метрике. Тако еуклидска метрика има сигнатуру (+++).

Још један начин да запишемо формулу (2.1) јесте увођењем Кронекерове делте:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{за } i = j \\ 0, & \text{за } i \neq j \end{cases} \quad (2.2)$$

Увођењем Кронекерове делте израз (2.1) постаје:

$$ds_E^2 = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (2.3)$$

Од сада ћемо користити, ради краћег писања, Ајнштајнову сумациону конвенцију по којој се сумира по поновљеном индексу који је једном горњи, а једном доњи. Тиме се израз (2.3) своди на:

$$ds_E^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (2.4)$$

Уколико квадрат растојања представимо у овом облику, онда елементе са двоструким индексом зовемо компонентама метрике. У изразу (2.4) δ_{ij} представљају компоненте еуклидске метрике. Метрика је, дакле, дијагонална.

Сада ћемо представити скаларни производ користећи еуклидску метрику:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \delta_{ij} A^i B^j \quad (2.5)$$

Ако узмемо да $d\vec{x}$ одређује растојање између две тачке које посматрамо, онда израз (2.4), користећи (2.5), постаје:

$$ds_E^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} \quad (2.6)$$

Једна од одлика растојања између тачака јесте да оно не зависи од ротације координатног система. Скаларни производ било која два вектора је инваријантан, то јест не мења се приликом ротације.

Сада ћемо увести контракцију:

$$A_i = \delta_{ij} A^j \quad (2.7)$$

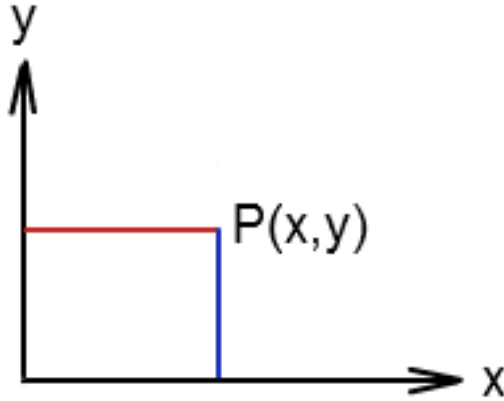
На тај начин, израз (2.5) постаје:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B^i \quad (2.8)$$

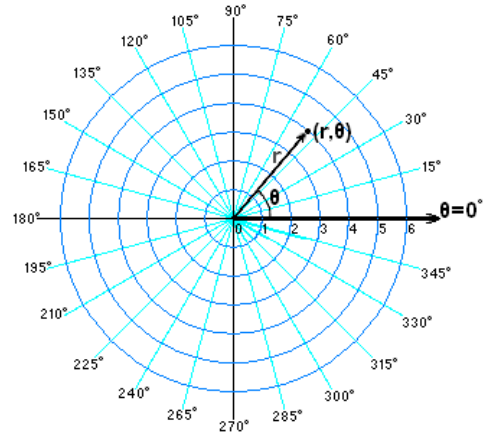
Из (2.7) видимо да за еуклидски простор важи $A_i = A^i$.

2.2 Координатни сингуларитет

Еуклидску раван можемо представити помоћу Декартових координата или помоћу криволинијских координата, рецимо, поларних.



Слика 2.2: Декартове координате.



Слика 2.3: Поларне координате.

Узмимо да је:

$$\begin{cases} x^1 = x \\ x^2 = y \end{cases} \quad \begin{cases} x^{1'} = r \\ x^{2'} = \theta \end{cases} \quad (2.9)$$

Онда можемо наћи везу између ова два координатна система, и то:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (2.10)$$

Растојање између две тачке је онда:

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j = dx^2 + dy^2 \quad (2.11)$$

односно, када запишемо у поларним координатама:

$$ds^2 = g_{i'j'}(x') dx^{i'} dx^{j'} = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (2.12)$$

Видимо да се компоненте метрике мењају са променом координатног система док је растојање инваријантно. За Декартове координате, односно поларне координате важи:

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} \quad \begin{cases} g_{rr} = 1 \\ g_{r\theta} = g_{\theta r} = 0 \\ g_{\theta\theta} = r^2 \end{cases} \quad (2.13)$$

Из овога се види да ће метрика код поларних координата зависити од радијалне координате ($g_{\theta\theta} = r^2$), односно од тачке простора коју посматрамо.

У равном простору можемо увести координатни систем у коме компоненте метрике не зависе од координата. Ако бисмо посматрали еуклидску раван и увели поларне координате, наш простор би изгледао као да није раван. Међутим, пошто можемо увести Декартове координате у којима су компоненте метрике константне, можемо закључити да је простор заправо раван. Посебно је значајно то што поларне координате, за разлику од Декартових, нису добро дефинисане у свакој тачки простора (кажемо да не покривају цео простор) јер је у центру координатног система $r = 0$, али периодична координата θ није једнозначно дефинисана. Та тачка се геометријски не разликује од осталих тачака простора, али јој координате нису једнозначно одређене. Такве тачке називамо координатним сингуларитетима.

2.3 Простор Минковског M_{1+3}

Простор Минковског је четвородимензионални просторно-временски континуум у коме је свака тачка одређена са четири координате: три просторне и једном временском. Свака тачка простора представља један догађај. Координате се означавају са x^μ , где је $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ и $x^0 = ct$. Растојање између две тачке (догађаја) је дато изразом:

$$ds_M^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (2.14)$$

Метрика Минковског има сигнатуру $(-+++)$ и дијагонална је. Још један начин да се запише овај израз јесте ако уведемо \vec{x} , који представља еуклидски вектор:

$$ds_M^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^2 \quad (2.15)$$

Уколико се два инфинитезимално блиска догађаја дешавају на истом месту, односно ако је $d\vec{x}^2 = 0$, онда израз (2.15) постаје:

$$ds_M^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (2.16)$$

где је τ такозвано сопствено време.

За разлику од еуклидског простора, у простору Минковског растојање може бити негативно. Зато растојање делимо на три типа и то:

$$\begin{cases} ds_M^2 < 0, & \text{растојање је „time-like” типа} \\ ds_M^2 = 0, & \text{растојање је „light-like” типа} \\ ds_M^2 > 0, & \text{растојање је „space-like” типа} \end{cases} \quad (2.17)$$

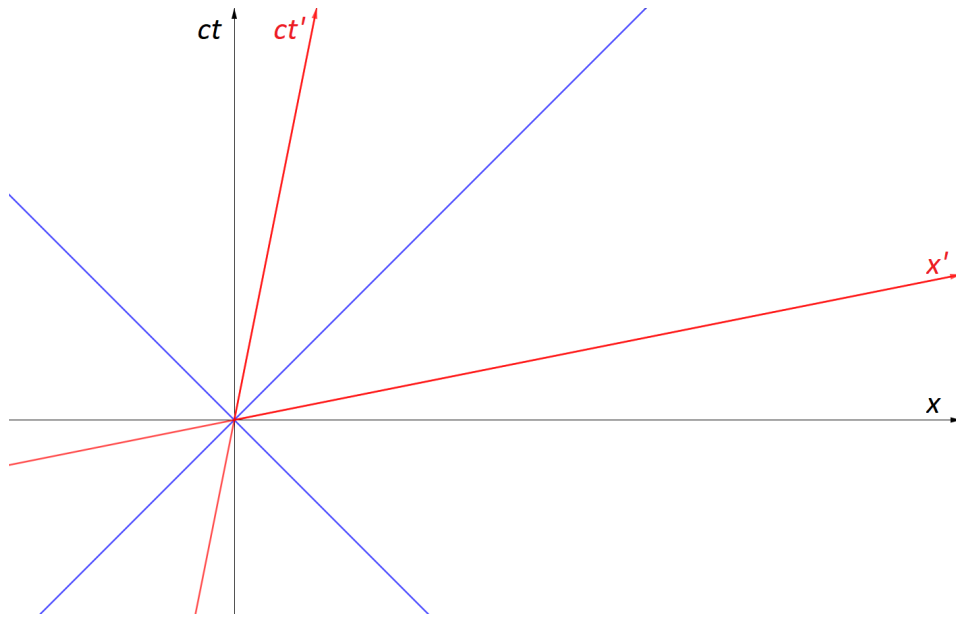
За скаларни производ у простору Минковског важи:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_\nu B^\nu \quad (2.18)$$

Такође важи и:

$$\begin{cases} A_0 = -A^0 \\ A_i = A^i, \quad \text{за } i = \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (2.19)$$

Лоренцове трансформације можемо представити помоћу следећег графика:



Слика 2.4: Наш референтни систем (црна), референтни систем који се креће удесно неком брзином (црвена) и светлосни конус (плава).

Лоренцове трансформације су, заправо, ротације простор-времена које „мешају” просторне и временске координате. Због сигнатуре метрике Минковског, ове ротације одговарају хиперболичким трансформацијама координата:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

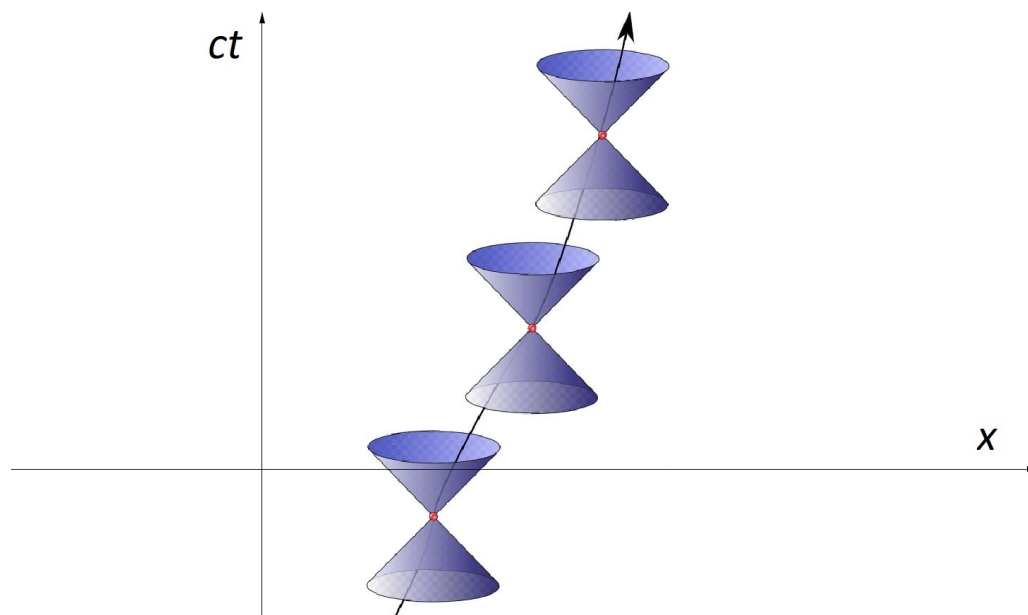
где је:

$$\tanh \phi = \frac{v_x}{c} \quad (2.21)$$

и важи $-\infty < \phi < +\infty$, $-c < v_x < c$.

Наиме, ако се референтни систем креће удесно, имаћемо сажимање координатних оса за исти угао, а ако се креће у лево имаћемо раздвајање координатних оса. Светске линије светлости ће бити под углом од 45° и за сваке две тачке (догађаје) на тој линији ће важити да је $ds_M^2 = 0$. Да би светлост имала исту брзину у свим инерцијалним референтним системима, када извршимо Лоренцову трансформацију, светска линија светлости ће остати симетрала угла између координатних оса. Растојање између два догађаја је инваријантно на Лоренцове трансформације, односно, растојање се не мења са променом инерцијалног референтног система. Пошто је растојање између догађаја геометријско својство простор-времена, оно ће бити исто и у неинерцијалним референтним системима.

Светске линије светлости образују светлосни конус у свакој тачки простор-времена. Догађаји који одговарају тачкама смештеним у унутрашњости конуса изнад x -осе формирају апсолутну будућност, они у унутрашњости конуса испод x -осе апсолутну прошлост. За догађаје који леже изван светлосног конуса датог догађаја, временски поредак у односу на тај догађај је релативан јер зависи од референтног система. Све тачке које се налазе унутар светлосног конуса су на „time-like” растојањима, све тачке које се налазе на конусу су на „light-like” растојањима, а све тачке које се налазе ван светлосног конуса су на „space-like” растојањима. Светске линије масивних честица су „time-like” типа, тј. састоје се од догађаја који су на „time-like” растојањима. Такве линије увек пролазе кроз локални светлосни конус.



Слика 2.5: Светлосни конуси у различитим тачкама светске линије масивне честице.

Посматрајмо неку честицу и њену светску линију из инерцијалног

2.4. Квадривектори положаја, брзине и убрзања у простору Минковског¹³

референтног система (ct, x) . Нека је време које је протекло између два блиска догађаја на њеној светској линији у том координатном систему dt , време које је протекло за честицу $d\tau$ (сопствено време) и брзина честице v^1 . Тада је веза између протеклог времена које је забележила честица и протеклог координатног времена дата изразом:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma(v)} \quad (2.22)$$

где је $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Сопствено време можемо да дефинишемо и као време између два инфинитезимално блиска догађаја у референтном систему у коме се ови реализују на истом месту.

2.4 Квадривектори положаја, брзине и убрзања у простору Минковског

Вектори у простору Минковског су четворокомпонентни, реални вектори (квадривектори) и можемо их представити у виду вектор колона. Квадривектор положаја је дат као:

$$X^\mu = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ \vec{x} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Слично као и у тродимензионалном простору, брзина се дефинише као промена положаја у јединици времена, али у овом случају, сопственог времена. Тиме је обезбеђено да се и извод трансформише као вектор при Лоренцовим трансформацијама.

$$U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \gamma(v) \frac{dX^\mu}{dt} = \gamma(v) \begin{bmatrix} c \\ \vec{v} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

где је $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$. Квадривектор брзине представља тангенту на светску линију честице у датом тренутку, и имамо да је:

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.25)$$

Квадривектор убрзања се дефинише на сличан начин:

$$A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dU^\mu}{dt} = \gamma \begin{bmatrix} \dot{\gamma}c \\ \dot{\gamma}\vec{v} + \gamma\vec{a} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

¹Овде мислимо на компоненту v_x , која може да мења вредност

2.5 Успутни референтни систем

Посматрајмо неки референтни систем S и у њему масивну честицу која се креће и њену светску линију. Изаберимо неки тренутак времена и придружимо честици референтни систем S' који се креће истом брзином као и та честица у том тренутку у односу на посматрани референтни систем. Тај референтни систем се зове успутни референтни систем. То је инерцијални референтни систем који се у датом тренутку креће истом релативном брзином у односу на посматрани референтни систем као и честица. Из тога следи да се честица не креће у успутном референтном систему. То значи да у успутном референтном систему важи:

$$\vec{v}' = 0 \quad (2.27)$$

односно:

$$\dot{\gamma} = 0 \quad (2.28)$$

Квадривектор убрзања, у успутном референтном систему је:

$$A^{\mu'} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{a}' \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Направимо сад Лоренцову трансформацију $S' \rightarrow S$:

$$A^{\mu} = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{c}\gamma a' \\ \gamma a' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Односно, важи:

$$\begin{bmatrix} \gamma \dot{\gamma} c \\ \gamma \dot{\gamma} v + \gamma^2 a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{c}\gamma a' \\ \gamma a' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Сада можемо да извучемо везу између убрзања честице у успутном референтном систему и оригиналном референтном систему (ct, x) :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{va}{c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \\ a &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} a' \end{aligned} \quad (2.32)$$

Пошто је у простору Минковског скаларни производ инваријантан у односу на Лоренцове трансформације, онда и U^2 мора да има исту вредност у свим инерцијалним референтним системима:

$$U^2 = U \cdot U = \eta_{\mu\nu} U^{\mu} \cdot U^{\nu} = U_{\nu} \cdot U^{\nu} = -\gamma^2 c^2 + \gamma^2 v^2 = -c^2 \quad (2.33)$$

Пошто c има исту вредност у свим референтним системима, следи да и U^2 не зависи од изабраног инерцијалног референтног система. Такође, A^2 мора да буде Лоренц-инваријантно, па важи:

$$A^2 = A \cdot A = \eta_{\mu'\nu'} A^{\mu'} A^{\nu'} = A_{\nu'} A^{\nu'} = \begin{bmatrix} 0 & a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a' \end{bmatrix} = a'^2 \quad (2.34)$$

Одавде је:

$$\sqrt{A^2} = a' = a_p \quad (2.35)$$

Ово убрзање називамо правим убрзањем (*proper acceleration*). Оно је апсолутно јер има исту вредност у свим референтним системима и једнако је убрзању честице у успутном референтном систему.

3

Риндлеров простор

3.1 Риндлерове координате

Посматрајмо из инерцијалног референтног система (ct, x) честицу са константним убрзањем (правим убрзањем) при датим почетним условима $x(0) = x_0$ и $v(0) = 0$. Тада, ако израз (2.32) запишемо као:

$$\frac{dv}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} a_p \quad (3.1)$$

добивамо диференцијалну једначину која раздваја променљиве, односно, када проинтегралимо:

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^t a_p dt \quad (3.2)$$

Решавајући интеграле добијамо да је:

$$\frac{v(t)}{c} = \frac{\frac{a_p t}{c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_p t}{c}\right)^2}} \quad (3.3)$$

Одавде се види да брзина честице никада неће бити већа од c јер:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v(t)}{c} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{a_p t}{c}\right)^2} + 1}} = 1 \quad (3.4)$$

Ако сада израз (3.3) запишемо као:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a_p t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_p t}{c}\right)^2}} \quad (3.5)$$

поново добијамо диференцијалну једначину која раздваја променљиве, па кад проинтегралимо имамо:

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t \frac{a_p t dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_p t}{c}\right)^2}} \quad (3.6)$$

Решавањем интеграла се добија израз:

$$x - x_0 = \frac{c^2}{a_p} \sqrt{\frac{a_p^2 t^2}{c^2} + 1} - \frac{c^2}{a_p} \quad (3.7)$$

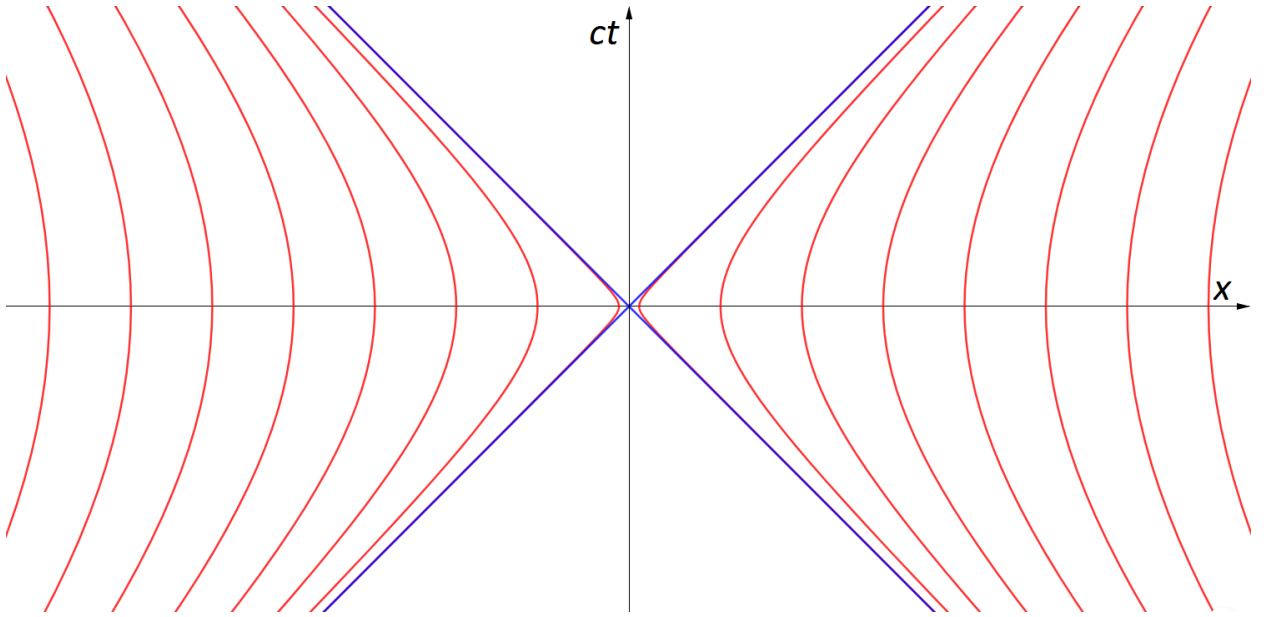
Када средимо (3.7) добијамо:

$$\left(x - x_0 + \frac{c^2}{a_p}\right)^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{a_p^2} \quad (3.8)$$

Да би поједноставили општу једначину (3.8), узмимо да је $x_0 = \frac{c^2}{a_p}$:

$$\frac{x^2}{\frac{c^4}{a_p^2}} - \frac{c^2 t^2}{\frac{c^4}{a_p^2}} = 1 \quad (3.9)$$

Израз (3.9) је канонска једначина хиперболе. Гране хиперболе, за дато a_p , одговарају светским линијама честица са константним убрзањем a_p . Краци светлосног конуса, $ct = \pm x$ представљају асимптоте за сваку од ових хипербола. Ако бисмо имали посматрача који се креће константним убрзањем, његове светске линије би биле хиперболе (3.9) у простору Минковског. Тај посматрач се назива Риндлер посматрач. С обзиром на то да се хиперболе налазе и са леве и са десне стране временске ct -осе, онда одговарајуће области светлосног конуса (у којима леже хиперболе) називамо леви Риндлеров простор (леви „wedge”) и десни Риндлеров простор (десни „wedge”).



Слика 3.1: Светске линије (хиперболе) различитих Риндлер посматрача.

Сада ћемо да запишемо једначину хиперболе користећи хиперболичке функције. Када квадрирамо израз (3.3) имамо:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\frac{a_p^2 t^2}{c^2}}{1 + \left(\frac{a_p t}{c}\right)^2} \quad (3.10)$$

Уврстимо сада једначину (3.10) у израз (2.22):

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\frac{a_p^2 t^2}{c^2}}{1 + \left(\frac{a_p t}{c}\right)^2}} \quad (3.11)$$

односно:

$$d\tau = dt \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_p t}{c}\right)^2}} \quad (3.12)$$

Добили смо диференцијалну једначину која раздваја променљиве. Када проинтегралимо, добијамо:

$$\int_0^\tau d\tau = \int_0^t dt \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_p t}{c}\right)^2}} \quad (3.13)$$

Даљим решавањем добијамо:

$$\frac{a_p \tau}{c} = \operatorname{arsinh} \left(\frac{a_p t}{c} \right) \quad (3.14)$$

Када средимо израз (3.14) добијамо:

$$ct = \frac{c^2}{a_p} \sinh\left(\frac{a_p \tau}{c}\right) \quad (3.15)$$

Знајући да је $x_0 = \frac{c^2}{a_p}$ и $\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$, једначину (3.7) можемо да запишемо као:

$$x = \frac{c^2}{a_p} \cosh\left(\operatorname{arsinh}\left(\frac{a_p t}{c}\right)\right) \quad (3.16)$$

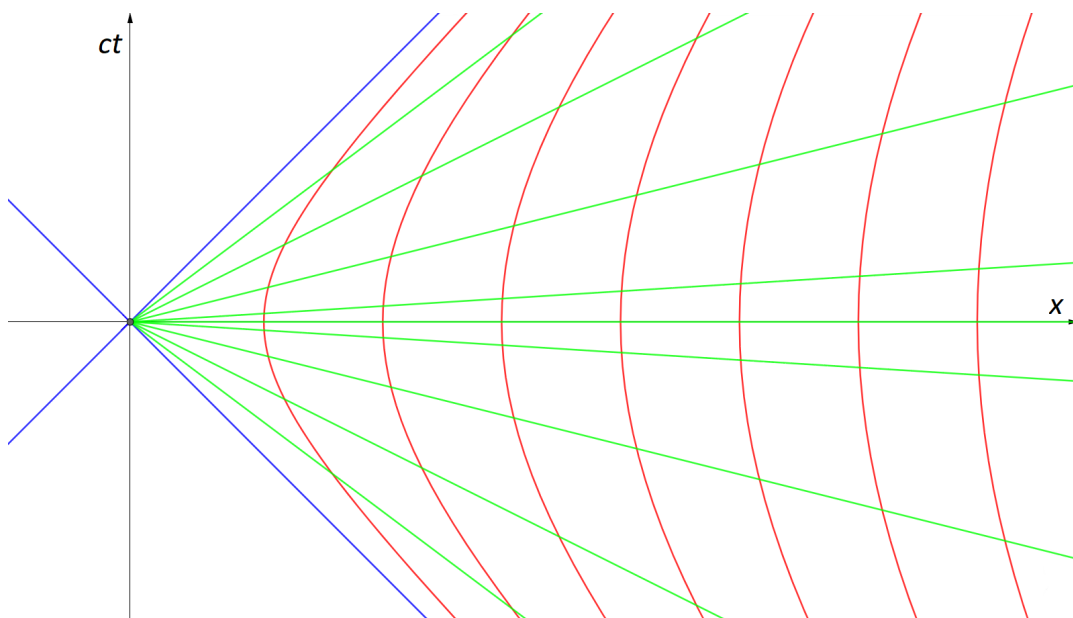
Када у израз (3.16) уврстимо једначину (3.14), добијамо коначни облик:

$$x = \frac{c^2}{a_p} \cosh\left(\frac{a_p \tau}{c}\right) \quad (3.17)$$

Нека је $\frac{c^2}{a_p} = \rho$ и $\frac{a_p \tau}{c} = c\eta$. Тада координате можемо да запишемо као:

$$\begin{aligned} ct &= \rho \sinh c\eta \\ x &= \rho \cosh c\eta \end{aligned} \quad (3.18)$$

где важи да је $0 < \rho < +\infty$ и $-\infty < \eta < +\infty$. Ово су Риндлерове координате, односно координате Риндлер посматрача. На овај начин смо покрили само десни Риндлеров простор.



Слика 3.2: Десни Риндлеров простор („wedge”), полуосе (зелена) и хиперболе (црвена).

На једној хиперболи је ρ константно, а η расте, док је на једној полуоси η константно, а ρ расте. На горњем краку светлосног конуса ($ct = x$) је $\eta = +\infty$, а за доњи крак ($ct = -x$) је $\eta = -\infty$. За полуосу која се поклапа са x -осом важи да је $\eta = 0$. Риндлерове координате које смо горе увели покривају само унутрашњост десног „wedge-a” и нису добро дефинисане у центру светлосног конуса као ни на крацима светлосног конуса. И овде се ради о координатним сингуларитетима. Овај светлосни конус се назива Риндлеров хоризонт.

3.2 Риндлерови посматрачи и њихови закони

Запишимо сада метрику користећи Риндлерове координате:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2 \rho^2 d\eta^2 + d\rho^2 \quad (3.19)$$

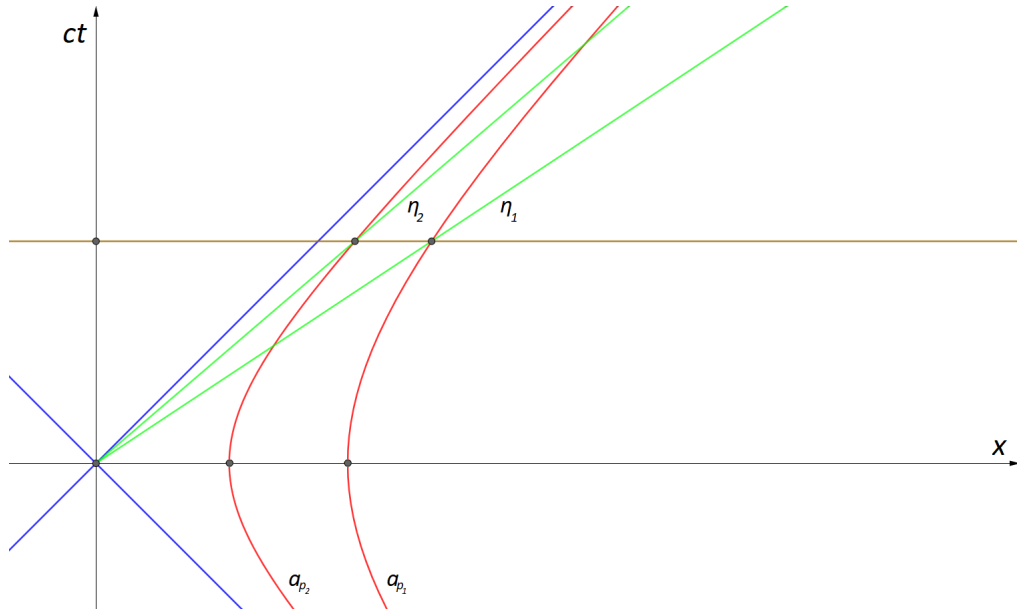
За датог Риндлер посматрача је $\rho = \text{const}$, односно $d\rho = 0$:

$$ds_{Rindler}^2 = -c^2 \rho^2 d\eta^2 = -c^2 d\tau_{Rindler}^2 \quad (3.20)$$

пошто знамо да је:

$$\tau_{Rindler} = \frac{c^2}{a_p} \eta \quad (3.21)$$

Узмимо два Риндлер посматрача. Нека је у $t_0 = 0$, $\tau_{1_0} = 0$ и $\tau_{2_0} = 0$, и нека је $a_{p_2} > a_{p_1}$.



Слика 3.3: Два Риндлер посматрача.

Након неког времена $t \neq 0$, први Риндлер посматрач ће забележити време τ_1 , а други τ_2 . Онда из израза (3.18) видимо:

$$\frac{c^2}{a_{p_1}} \sinh c\eta_1 = \frac{c^2}{a_{p_2}} \sinh c\eta_2 \quad (3.22)$$

Са слике 3.3 се види да је $\eta_2 > \eta_1$. На основу (3.21) знамо да за првог посматрача важи:

$$\tau_1 = \frac{c^2}{a_{p_1}} \eta_1 \quad (3.23)$$

Аналогно за другог:

$$\tau_2 = \frac{c^2}{a_{p_2}} \eta_2 \quad (3.24)$$

Ако поделимо (3.23) и (3.24) и искористимо (3.22):

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\eta_1 a_{p_2}}{\eta_2 a_{p_1}} = \frac{\eta_1 \sinh c\eta_2}{\eta_2 \sinh c\eta_1} > 1 \quad (3.25)$$

Одавде се види да је $\tau_1 > \tau_2$, односно за посматрача чије је убрзање веће, сопствено време спорије тече, и обратно.

3.3 Унруов ефекат

Основна идеја квантне теорије поља (КТП) је да се честице могу схватити као дискретне ексцитације фундаменталних физичких поља. Сваком фундаменталном пољу одговара један тип честица. На пример, честице електромагнетног поља су фотони. Појединачне честице (тј. једночестична стања квантног поља) су окарактерисане одговарајућим квантним бројевима (типично, таласни вектор и пројекција спина или поларизација). Једноставности ради, говорићемо о безмасеним честицама спина 0, као „квантима” реалног скаларног поља. Таласни вектор дефинише један дозвољени „мод осциловања” поља. Дисперзиона релација честица је:

$$\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}| \quad (3.26)$$

Енергију једног кванта рачунамо по формули:

$$E_{\vec{k}} = \hbar\omega_{\vec{k}} \quad (3.27)$$

Стање квантног поља је окарактерисано тиме колико честица се налази у ком моду осциловања поља (тј. у ком једночестичном стању). То означавамо користећи Диракову (бра-кет) нотацију:

$$|N_1, N_2, \dots, N_i, \dots\rangle \quad (3.28)$$

где се N_i честица налази у моду осциловања \vec{k}_i . Ово су тзв. бројеви попуњености. Вакуум, тј. стање у коме нема честица, се записује као $|0, 0, 0, \dots\rangle$. Енергија поља је тада једнака:

$$E = \sum_{\vec{k}} N_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \quad (3.29)$$

Из квантне теорије поља следи израз за средњи број попуњености стања са таласним вектором \vec{k} :

$$\bar{N}_{\vec{k}} = [e^{\frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{k_B T}} - 1]^{-1} \quad (3.30)$$

Ово је чувена Бозе-Ајнштајнова расподела. На основу овог израза, можемо да изведемо једначину за средњу енергију:

$$\bar{E} = \sum_{\vec{k}} \bar{N}_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \quad (3.31)$$

Размотрићемо укратко како гранични услови утичу на спектар дозвољених вредности \vec{k} -вектора. Посматрајмо слободну честицу¹ која се креће дуж x -осе на дужини L . Решавањем Шредингерове једначине за случај слободне честице која се креће дуж x -осе добија се:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} \quad (3.32)$$

Ако наметнемо периодични гранични услов да је $\Psi(0) = \Psi(L)$ имамо:

$$\frac{1}{\sqrt{L}} = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikL} \quad (3.33)$$

односно:

$$1 = e^{ikL} \quad (3.34)$$

Тиме добијамо дозвољене вредности x -компоненте таласног вектора:

$$k_{n_x} = \frac{2n_x \pi}{L} \quad (3.35)$$

где $n_x \in \mathbb{Z}$. То значи да ће размак између различитих дозвољених стања бити $\frac{2\pi}{L}$.

Посматрајмо тродимензионални простор са три међусобно ортогоналне осе x , y и z . Доказали смо да је $k_{n_x} = \frac{2n_x \pi}{L}$ за једнодимензионални простор. Исти принцип можемо користити и за тродимензионални простор уз периодичне

¹Честица је слободна ако на њу не делује никаква сила.

граничне услове $\Psi(0, y, z) = \Psi(L, y, z)$, $\Psi(x, 0, z) = \Psi(x, L, z)$ и $\Psi(x, y, 0) = \Psi(x, y, L)$ одакле следи:

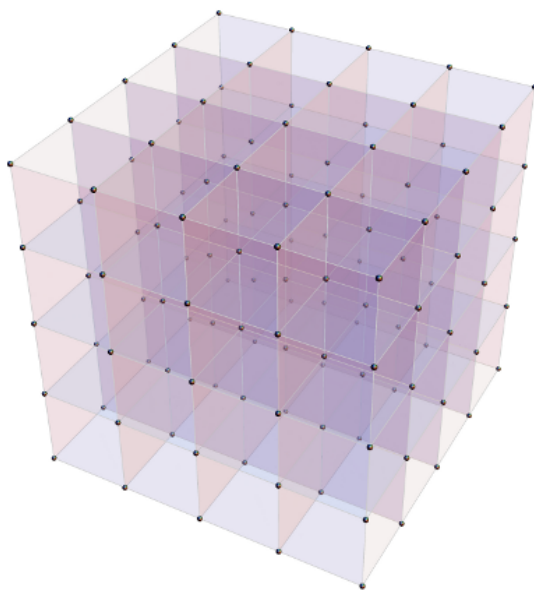
$$k_{n_y} = \frac{2n_y\pi}{L} \quad (3.36)$$

$$k_{n_z} = \frac{2n_z\pi}{L} \quad (3.37)$$

где је $n_y, n_z \in \mathbb{Z}$. То значи да је размак између две суседне дозвољене вредности за све три компоненте таласног вектора једнак $\frac{2\pi}{L}$. Дозвољени таласни вектори се могу представити као дискретан скуп тачака у тродимензионалном \vec{k} -простору. Када бисмо провукли праве кроз те тачке, добили бисмо решетку чији сваки чвор представља једну дозвољену вредност \vec{k} -вектора. Тада би запремина једне ћелије била:

$$V' = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 = \frac{8\pi^3}{V} \quad (3.38)$$

где је V запремина простора у којем се честица налази. Свакој дозвољеној вредности \vec{k} одговара запремина V' .



Слика 3.4: Дискретан скуп дозвољених вредности \vec{k} -вектора.

Што је веће L , то се размак између дозвољених вредности \vec{k} смањује. Уколико узмемо довољно велико L , вредности постају квази-континуалне јер је густина \vec{k} веома велика, па је прилично добра апроксимација да, уместо да

пребројавамо чворове решетке, нађемо запремину \vec{k} -простора и поделимо је са запремином једне ћелије. Тада израз (3.31) можемо да запишемо као:

$$\bar{E} = \frac{V}{8\pi^3} \int dV_{\vec{k}} \bar{N}_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \quad (3.39)$$

Запишемо сада $\int dV_{\vec{k}}$ користећи сферне координате.

$$\int dV_{\vec{k}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z = \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} k^2 \sin \theta dk d\theta d\varphi \quad (3.40)$$

Можемо одмах да решимо интеграл по угловима:

$$\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \quad (3.41)$$

Онда, користећи (3.30) и (3.40), израз (3.39) можемо да запишемо као:

$$\bar{E} = \frac{V}{8\pi^3} 4\pi \int_0^{+\infty} dk k^2 \frac{\hbar ck}{e^{\frac{\hbar ck}{k_B T}} - 1} \quad (3.42)$$

Уведимо смену $\omega = ck$. Тиме добијамо:

$$\bar{E} = \frac{V}{2\pi^2 c^3} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\hbar \omega^3}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1} \quad (3.43)$$

Одавде можемо да изведемо спектралну густину енергије:

$$\frac{\bar{E}(\omega)}{V} = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3 \left(e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1 \right)} \quad (3.44)$$

Ово је, заправо, Планков закон зрачења на температури T .

Квантна теорија поља предвиђа да ће Риндлер посматрач са убрзањем $a_p = \frac{c^2}{\rho}$ детектовати присуство честица чак и када се квантно поље налази у стању вакуума $|000\dots\rangle$. Штавише, за Риндлер посматрача, честице ће бити расподелене по модовима поља према Бозе-Ајнштајновој расподели која одговара термалној равнотежи на температури:

$$k_B T(\rho) = \frac{\hbar c}{2\pi \rho} = \frac{\hbar a_p}{2\pi c} \quad (3.45)$$

где је k_B Болцманова константа. Ово је тзв. Унруов ефекат. $T(\rho)$ се назива Унруова температура и њу би, бар у теорији, Риндлер посматрач могао да измери. Што је веће убрзање a_p Риндлер посматрача, то је већа и Унруова температура коју он детектује; у близини Риндлеровог хоризонта она постаје бесконачна. Насупрот томе, инерцијални посматрачи виде управо вакуумско стање квантног поља и за њих је $T = 0$.

4

Гравитација и црна рупа

4.1 Ајнштајнове једначине поља

Након Опште теорије релативности, гравитацију више не третирамо као силу, већ као својство самог простор-времена. Материја закривљује простор-време и та закривљеност простор-времена се манифестује као гравитација. Динамика простор-времена описана је Ајнштајновим једначинама поља:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

где $R_{\mu\nu}$ представља Ричијев тензор, R Ричијев скалар, Λ космолошку константу, $g_{\mu\nu}$ метрику простор-времена (која је и резултат решавања Ајнштајнових једначина), G_N гравитациону константу и $T_{\mu\nu}$ тензор енергије импулса. Ајнштајнове једначине поља нам, заправо, говоре да је закривљеност простор-времена пропорционална енергији/импулсу у тој тачки простор-времена. Материја закривљује простор-време, док простор-време одређује начин кретања материје.

Ако узмемо да је $\Lambda = 0$ и $T_{\mu\nu} = 0$, добијамо Ајнштајнове вакуумске једначине:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \quad (4.2)$$

Биркхофова теорема каже да је Шварцшилдова метрика (метрика која описује геометрију Шварцшилдове црне рупе) јединствено, сферно-симетрично и стационарно решење вакуумских Ајнштајнових једначина.

4.2 Шварцшилдова метрика

Уведимо Шварцшилдове координате (t, r, θ, ϕ) , где t представља временску координату, а r, θ, ϕ сферне координате. Оне покривају простор изван црне

рупе, односно изван хоризонта догађаја.

Шварцшилдова метрика описује геометрију Шварцшилдове црне рупе. У Шварцшилдовим координатама она је дата са:

$$ds^2 = -c^2 f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.3)$$

где је $f(r)$ дато изразом:

$$f(r) = 1 - \frac{R_s}{r} \quad (4.4)$$

R_s представља Шварцшилдов радијус, односно радијус црне рупе масе M :

$$R_s = \frac{2MG_N}{c^2} \quad (4.5)$$

Пошто $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ представља метрику на сфери, онда израз (4.3) можемо записати као:

$$ds^2 = -c^2 f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.6)$$

Једноставности ради, посматраћемо све дуж једног радијалног правца који се налази у екваторијалној равни црне рупе, односно важи $d\theta = 0$ и $d\phi = 0$. Онда нам се израз (4.3) своди на:

$$ds^2 = -c^2 f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 \quad (4.7)$$

Тачка $r = 0$ одговара центру црне рупе и представља геометријски сингуларитет. За $r = R_s$ је $f(r) = 0$, тако да су и све тачке на хоризонту догађаја сингуларне. Међутим, овде се ради о координатном сингуларитету јер је закривљеност простор-времена на хоризонту коначна. Видимо да за $r < R_s$ функција $f(r)$ постаје негативна и долази до промене сигнатуре метрике, тј. као да временска и просторна координата мењају улоге. Унутар хоризонта догађаја, кретање ка сингуларитету постаје неизбежно.



Слика 4.1: Црна рупа и један радијални правац.

4.3 Сопствено време и право растојање

Посматрајмо два догађаја која су се десила на истом месту, односно за које је $dr = 0$. Тада је:

$$ds^2 = -c^2 f(r) dt^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (4.8)$$

Имамо да је сопствено време између та два догађаја:

$$d\tau = \sqrt{f(r)} dt \quad (4.9)$$

За бесконачно удаљеног посматрача важи:

$$d\tau = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} dt = dt \quad (4.10)$$

Одавде се види да координата t , заправо, представља сопствено време бесконачно удаљеног посматрача. Фактор $\sqrt{f(r)}$ се назива фактор гравитационог црвеног помака. Замислимо да неки посматрач на неком растојању $r > R_s$ емитује неки светлосни сигнал ка $r = \infty$. Веза између енергије сигнала који је емитовао тај посматрач и енергије коју читава посматрач у бесконачности је:

$$h\nu_\infty = h\nu_r \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} \quad (4.11)$$

Фреквенција сигнала у бесконачности ће бити мања него фреквенција емитованог сигнала, односно, ићи ће према црвеном делу спектра, па се зато фактор $\sqrt{f(r)}$ назива фактор гравитационог црвеног помака.

Када би емитовали фотон са самог хоризонта догађаја ($r = R_s$), имали бисмо бесконачни црвени помак.

Као што можемо да дефинишемо сопствено време, тако можемо и да дефинишемо право растојање (*proper distance*). Право растојање је растојање између два догађаја која се дешавају у истом временском тренутку ($dt = 0$) за посматрача у бесконачности. Онда израз (4.7) можемо да запишемо као:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{f(r)}} dr^2 = d\rho^2 \quad (4.12)$$

Одатле је:

$$d\rho = \frac{1}{\sqrt{f(r)}} dr \quad (4.13)$$

Овако смо добили диференцијалну једначину која раздваја променљиве. Њеним решавањем добијамо израз за право растојање:

$$\rho = \int_{R_s}^r \frac{1}{\sqrt{f(r)}} dr \quad (4.14)$$

Оно представља растојање посматрача од хоризонта догађаја.

4.4 Геометрија у близини хоризонта

Сада ћемо испитати геометрију у близини хоризонта догађаја Шварцшилдове црне рупе ($r \approx R_s$). Користећи Тејлоров развој добијамо:

$$f(r) = f(R_s) + f'(R_s)(r - R_s) + \dots = f'(R_s)(r - R_s) + \dots \quad (4.15)$$

Што смо ближе хоризонту догађаја, то је апроксимација боља. Онда израз (4.13) можемо да запишемо као:

$$d\rho = \frac{dr}{\sqrt{f'(R_s)(r - R_s) + \dots}} \quad (4.16)$$

Добили смо диференцијалну једначину која раздваја променљиве. Њеним решавањем се добија:

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{f'(R_s)}} \sqrt{r - R_s} + \dots \quad (4.17)$$

Из (4.15) и (4.17) следи да је:

$$f(r) = \left[\frac{1}{2} f'(R_s) \right]^2 \rho^2 + \dots \quad (4.18)$$

Уведимо величину:

$$K = \frac{c^2}{2} f'(R_s) = \frac{c^4}{4G_N M} \quad (4.19)$$

која представља гравитационо убрзање на хоризонту догађаја онако како га мери посматрач у бесконачности. Онда је:

$$f(r) = \frac{K^2 \rho^2}{c^4} + \dots \quad (4.20)$$

У близини хоризонта догађаја, Шварцшилдова метрика поприма следећи облик:

$$ds^2 = -\frac{K^2 \rho^2}{c^2} dt^2 + d\rho^2 \quad (4.21)$$

Ако уведемо нову „time-like” координату:

$$\eta = \frac{Kt}{c^2} \quad (4.22)$$

добивамо:

$$ds^2 = -c^2 \rho^2 d\eta^2 + d\rho^2 \quad (4.23)$$

На овај начин смо добили Риндлерову метрику. Геометрија у околини хоризонта догађаја Шварцшилдове црне рупе је иста као геометрија Риндлеровог простора (десног Риндлеровог „wedge-a,,). Стационарни посматрач у близини хоризонта догађаја, на растојању $\rho \approx 0$ одговара Риндлер посматрачу у простору Минковског са Риндлеровом координатом $\rho = const$, тј. са убрзањем $a_p = \frac{c^2}{\rho}$. Та веза је један специјалан случај Ајнштајновог принципа еквиваленције¹.

Убрзање стационарног посматрача ($r = const.$) у Шварцшилдовој геометрији је:

$$a(r) = \frac{c^2 R_s}{2r^2 \sqrt{f(r)}} \quad (4.24)$$

Ако се посматрач налази у близини црне рупе ($r \approx R_s$) можемо да апроксимирамо једначину (4.24), па имамо да је:

$$a(r) \approx \frac{c^2 R_s}{2R_s^2 \sqrt{f'(R_s)} (r - R_s)} = \frac{c^2 \sqrt{f'(R_s)}}{2\sqrt{r - R_s}} \quad (4.25)$$

¹Принцип еквиваленције каже да је гравитационо поље локално еквивалентно (неразличиво од) неинерцијалног система са константним убрзањем у простору Минковског

Користећи израз (4.17), добијамо да је у близини хоризонта догађаја:

$$a(r) \approx \frac{c^2}{\rho} \quad (4.26)$$

што одговара убрзању Риндлер посматрача са истом ρ -координатом. С друге стране, посматрач у бесконачности мери убрзање стационарног посматрача у $r > R_s$:

$$a_\infty(r) = a(r)\sqrt{f(r)} \approx \frac{c^2\sqrt{f'(R_s)}}{2\sqrt{r-R_s}}\sqrt{1-\frac{R_s}{r}} = \frac{c^2\sqrt{f'(R_s)}}{2\sqrt{r}} \quad (4.27)$$

Ако се посматрач налази на хоризонту догађаја ($r = R_s$), онда посматрач у бесконачности мери убрзање:

$$a_\infty = \frac{c^2\sqrt{f'(R_s)}}{2\sqrt{R_s}} = \frac{c^2}{2}f'(R_s) = K \quad (4.28)$$

4.5 Температура црне рупе

Температура коју мери Риндлер посматрач који се креће убрзањем a_p је температура Унруовог ефекта (3.45). С обзиром да су стационарни посматрачи ($r = const.$) у близини хоризонта догађаја Шварцшилдове црне рупе (стационарни посматрачи су неинерцијални посматрачи јер им светске линије нису геодезици) еквивалентни Риндлер посматрачима у простору Минковског, можемо да закључимо да ће и они детектовати термално зрачење на температури:

$$k_B T_{BH}(r) = \frac{\hbar a(r)}{2\pi c} \quad (4.29)$$

Ово је температура Хокинговог зрачења црне рупе. За посматрача који се налази у близини хоризонта догађаја ($r \approx R_s$), користећи апроксимацију (4.26), важи:

$$k_B T_{BH}(r) \approx \frac{\hbar c}{2\pi \rho} \quad (4.30)$$

Посматрач у бесконачности мери температуру:

$$k_B T_{BH} = \frac{\hbar K}{2\pi c} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G_N M} \quad (4.31)$$

и њу називамо температуром црне рупе.

4.6 Ентропија црне рупе

Температура, енергија и ентропија су повезане следећом општом релацијом:

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} \quad (4.32)$$

Користећи температуру добијену у (4.31), имамо:

$$\frac{dS}{dE} = \frac{8\pi G_N M k_B}{\hbar c^3} \quad (4.33)$$

Знамо да за Шварцшилдову црну рупу важи:

$$E = Mc^2 \quad (4.34)$$

па кад то уврстимо у израз (4.33), добијамо:

$$\frac{dS}{dE} = \frac{8\pi G_N k_B}{\hbar c^5} E \quad (4.35)$$

Добили смо диференцијалну једначину која раздваја променљиве. Њеним решавањем, уз услов да је $S(E=0) = 0$, налазимо израз за ентропију:

$$S = \frac{4\pi G_N k_B}{\hbar c^5} E^2 = \frac{4\pi G_N k_B M^2}{\hbar c} \quad (4.36)$$

Знамо да је радијус црне рупе (Шварцшилдов радијус):

$$R_s = \frac{2G_N M}{c^2} \quad (4.37)$$

Површина црне рупе је:

$$A = 4\pi R_s^2 = \frac{16\pi G_N^2 M^2}{c^4} \quad (4.38)$$

Ентропија Шварцшилдове црне рупе је сада:

$$S = \frac{Ac^3 k_B}{4\hbar G_N} \quad (4.39)$$

Планкова дужина је дата изразом:

$$\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} \quad (4.40)$$

Тада важи да је:

$$\frac{S}{k_B} = \frac{A}{4\ell_P^2} \quad (4.41)$$

Ово је Бекенштајн-Хокингова формула. Ентропија црне рупе је пропорцијална површини хоризонта догађаја, а не запремини црне рупе. Ово је битна разлика у односу на друге физичке системе.

5

Закони термодинамике црних рупа

Топлотни капацитет црне рупе дефинишемо као:

$$C = T \frac{dS}{dT} < 0 \quad (5.1)$$

Одавде видимо да са порастом температуре црне рупе, смањује се њена ентропија. Ово је веома необично, с обзиром да у већини система важи да са порастом температуре, расте и ентропија.

За црну рупу можемо да напишемо и њена четири закона термодинамике:

- Нулти закон термодинамике црне рупе: Гравитационо убрзање на хоризонту догађаја K је исто на свим тачкама хоризонта догађаја. Аналогија је са нултим законом термодинамике да ако се систем налази у термодинамичкој равнотежи, температура му је иста у свакој тачки.
- Први закон термодинамике црне рупе:

$$c^2 dM = T dS + \Omega dJ + \Phi dQ = \frac{c^2 K}{8\pi G_N} dA + \Omega dJ + \Phi dQ \quad (5.2)$$

где је Ω угаона брзина црне рупе, J угаони момент црне рупе, Φ електростатички потенцијал на хоризонту догађаја, а Q наелектрисање црне рупе.

- Други закон термодинамике црне рупе: Површина хоризонта догађаја A у изолованом систему никада не опада. Аналогија са другим законом термодинамике да ентропија изолованог система никада не опада. Уколико посматрамо две црне рупе које се спајају, укупна ентропија

новонастале црне рупе не сме бити мања од збира ентропија полазних црних рупа, односно површина хоризонта догађаја новонастале црне рупе није мања од збира површина хоризоната догађаја полазних црних рупа.

- Трећи закон термодинамике црне рупе: Није могуће ниједним процесом, небитно колико идеализованим, довести гравитационо убрзање хоризонта догађаја K на нулу у коначном броју корака. Аналогија са трећим законом термодинамике да није могуће достићи апсолутну нулу у коначно много корака у небитно колико идеализованом процесу.

6

Закључак

Црне рупе представљају једну од највећих енигми модерне физике. Иако их је Ајнштајн предвидео у својој Општој теорији релативности, на њихов доказ постојања смо чекали више од сто година. Многе од феномена које везујемо за црне рупе је у овом тренутку немогуће потврдити. Међутим, то нас не спречава да и даље откривамо нове појаве везане за њих. „Важно је не престајати постављати питања.”¹

Ову прилику бих желео да искористим да се захвалим мојим менторима доктору Драгољубу Гочанину и докторки Александри Димић на уложеном труду и стрпљењу без кога овај рад не би постојао. Посебно бих се захвалио докторки Александри Димић на прелепе четири године које је провела са нама и научила нас многе ствари, не само из физике, него и самог живота. Такође бих се захвалио и доктору Драгољубу Кечкићу на пренетом знању из математике у протекле две године.

¹The important thing is not to stop questioning. (Albert Einstein)

Литература

- [1] The Life and Death of Stars: White Dwarfs, Supernovae, Neutron Stars, and Black Holes, <https://www.youtube.com/watch?v=4xIQGbYur9Q&t=286s>
- [2] Carroll, S. M. (2019). Spacetime and geometry. Cambridge University Press.
- [3] Bekenstein, J. D. (1972). Black holes and the second law. *Lett. Nuovo Cim*, 4(737), 113.
- [4] Hong Liu, MIT OpenCourseWare, Lecture Notes on Holographic duality, <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-821-string-theory-and-holographic-duality-fall-2014/lecture-notes>.
- [5] Leonard Susskind, Messenger Lecture 2: Black Holes and the Holographic Principle, https://www.youtube.com/watch?v=_3Z8RxXmoWU.