Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из математке -

Функције генератрисе и примене

Ученик:
Вељко Радић IVд

Ментор:
др Лука Милићевић

Београд, јун 2021.

Садржај

0 Увод

У овом раду ћемо проучити особине генераторних функција представљених као реални степени редови. Најпре ћемо се бавити искључиво алгебарским особинама испитујући такозване формалне степене редове, а затим ћемо укључити и питање конвергенције и на тај начин прећи на аналитичке особине. При крају сваког дела рада дајемо пар примера примене описане технике. Ту се посебно истиче решавање разних рекурентних једначина, метод змијског уља којим се могу израчунати многе комбинаторне суме које би се врло тешко израчунале на било који други начин, као и такозване моментне генераторне функције помоћу којих доказујемо централну граничну теорему. На самом крају наводимо још пар примена из разних математичких области. Треба нагласити да чињеница да се бавимо искључиво реалним степеним редовима знатно смањује опсег примене. Многе аналитичке особине које се даље могу користити за асимптотску процену величине чланова низа, захтевају рад са комплексним степеним редовима, те тако и комплексну анализу која превазилази градиво средње школе.

Такође, желео бих да се захвалим свом ментору Луки Милићевићу пре свега на приближавању разних сложених математичких идеја кроз четири године менторске наставе, али и на корисним саветима при писању овог рада.

1 Формална теорија

У овом поглављу ћемо се бавити искључиво алгебарским особинама степених редова. Низу $a_0, a_1, ...$ придружујемо формални степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ где променљива x представља само "носач" низа и не смемо је мењати конкретним бројевним вредностима јер не знамо за које вредности ред конвергира. Управо због проблема конвергенције се и бавимо формалним степеним редовима. Чак и ако никад не конвергирају (рецимо $a_n = n!$) генераторне функције задате као формални степени редови могу бити корисне. Испоставља се да се и лако може прећи са формалних степених редова на питање конвергенције и њихове аналитичке особине. Такође, треба нагласити да формални степени редови суштински представљају уопштење полинома, као и да се на исти начин понашају при сабирању и множењу. Важно је напоменути да ће се даље у раду подразумевати да је реч о формалним степеним редовима са реалним коефицијентима сем ако није другачије назначено.

1.1 Основне операције, прстенаста структура и инверзи

Као што је већ споменуто формални степени редови представљају уопштење полинома, те је очекивано да имају прстенасту структуру. У овом подпоглављу ћемо детаљно дефинисати све особине и операције над формалним степеним редовима, као и показати да испољавају прстенасту структуру.
Да бисмо уопште почели да се бавимо формалним степеним редовима, потребно је дефинисати кад су два формална степена реда једнака.

Дефиниција 1. *Нека су дата два формална степена реда $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Они су једнаки, тј. важи $A = B$, ако и само ако за свако $n \in \mathbb{N}_0$ важи $a_n = b_n$.*

Затим, дефинишимо основне операције - сабирање и множење.

Дефиниција 2. *Нека су дата два формална степена реда* $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *и* $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. *Дефинишимо њихов збир* $A + B = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$, *тј. формални степени ред који "носи" низ* $a_n + b_n$.

Множење дефинишемо као Кошијев производ.

Дефиниција 3. *Нека су дата два формална степена реда* $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *и* $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. *Дефинишимо њихов производ* $AB = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *где је* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Очито је да је $A = \sum_{n=0}^{\infty} 0x^n$ адитивни идентитет, као и да је $B = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0x^n$ мултипликативни идентитет[1]. Лако се проверавају и остале особине и добијамо да формалне степени редови граде комутативни прстен са мултипликативним идентитетом и операцијама множења и сабирања. Како је доказ чисто техничке природе, нећемо га овде наводити.

Теорема 1. *Нека је* F *скуп свих формалних степених редова. Структура* $(F, +, \cdot)$ *је комутативни прстен са мултипликативним идентитетом.*

Такође, лако доказујемо да је прстен формалних степених редова заправо и интегрални домен.

Теорема 2. *Прстен формалних степених редова је интегрални домен.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Тада би постојала два формална степена реда $A \neq 0$ и $B \neq 0$ таква да $AB = 0$. Како је $A \neq 0$ и $B \neq 0$ постоје индекси $i, j \in \mathbb{N}_0$ таква да $a_i \neq 0$ и $b_j \neq 0$. Изаберимо најмање такве i, j. Тада би очигледно коефицијент у њиховом производу уз $i+j$ био $a_i b_j \neq 0$, те њихов производ не би био једнак 0. $\square$

Одузимање дефинишемо на уобичајен начин као $A - B := A + (-B)$ где је $-B = \sum_{n=0}^{\infty} -b_n x^n$ адитивни инверз формалног степеног реда B. Такође, како постоји мултипликативни идентитет, поставља се питање који формални степени редови имају мултипликативни инверз. Одговор нам даје следећа лема.

Теорема 3. *Нека је дат формални степени ред* $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Он има мултипликативни инверз* $\frac{1}{A}$, *тј. постоји формални степени ред* $\frac{1}{A}$ *такав да* $A\frac{1}{A} = 1$, *ако и само ако је* $a_0 \neq 0$.

[1] У даљем делу рада користимо једноставнију ознаку и пишемо 0 уместо A, као и 1 уместо B.

Доказ. Ради лакше нотације обележићемо инверз са B. Ако он постоји, онда би важило $AB = 1$, те би из дефиниције множења формалних степених редова следило $a_0 b_0 = 1$, одакле видимо $a_0 \neq 0$.
Претпоставимо $a_0 \neq 0$. Лако се добија да формални степени ред који "носи" низ задат са

$$b_0 = \frac{1}{a_0}$$
$$b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} \quad \forall n \geq 1$$

задовољава $AB = 1$. □

Поставља се питање да ли је мултипликативни инверз јединствен уколико постоји, али из основних особина комутативног прстена следи да јесте. Треба навести да ћемо у даљем делу рада осим ознаке $\frac{1}{A}$ користити и ознаку A^{-1}.

Сада ћемо дефинисати и рационалне степене формалних степених редова. Испоставља се они понашају слично као и рационални степени реалних бројева, тј. за свако $n \in \mathbb{N}$ и формални степени ред A такав да је слободан члан различит од 0, постоје највише два реална формална степена реда B таква да $B^n = A$. Уколико постоје два, онда се они разликују само по знаку.
Ради лакше нотације дефинишимо $S(A) = a_0$ где је A формални степени ред, а a_0 његов слободни члан.

Теорема 4. *Нека је A произвољан формални степени ред такав да $S(A) \neq 0$ и нека је n произвољан природан број. Разликујемо 3 случаја*

- $2 \nmid n$ - *Тада постоји јединствен формални степени ред B такав да $B^n = A$.*

- $2 \mid n$ *и* $S(A) < 0$ - *Тада не постоји формални степени ред B такав да $B^n = A$.*

- $2 \mid n$ *и* $S(A) > 0$ - *Тада постоје тачно два формална степена реда B_1 и B_2 таква да $B_1^n = A$ и $B_2^n = A$ и важи $B_1 + B_2 = 0$.*

Доказ. Без умањења општости нека је $|S(A)| = 1$. Уколико постоји Bтакво да $B^n = A$, онда очито важи $|S(B)| = 1$.

Најпре, приметимо да за $2 \mid n$ и $S(A) = -1$ очито не постоји ниједан одговарајући формални степени ред B.

Такође, можемо приметити да важи следеће тврђење. С обзиром да је доказ лак овде ћемо га изоставити.

Лема. *Дата су два формална степена реда A и B таква да $|S(A)| = 1$, $S(B) = \pm 1$ и $B^n = A$ за неки природан број n. Тада постоје функције више промењљивих $f_{n,2}$, $f_{n,3}$... такве да важи следеће*

$$\begin{aligned} \pm n b_1 &= a_1 \\ \pm n b_2 + f_{n,2}(b_1) &= a_2 \\ \pm n b_3 + f_{n,3}(b_1, b_2) &= a_3 \\ &\dots \\ \pm n b_k + f_{n,k}(b_1, b_2 \dots, b_{k-1}) &= a_k \\ &\dots \end{aligned}$$

Јасно је да одређивањем b_0 одређујемо и остале коефицијенте. Уколико је $2 \nmid n$ очито постоји само једна опција. Са друге стране, за $2 \mid n$ и $S(A) = 1$ постоје две могућности, те два решења B_1 и B_2. Очито је да је и $-B_1$ решење, те важи $B_1 + B_2 = 0$. $\square$

Сада се поставља питање који формални степени ред је једнак $A^{\frac{1}{n}}$ у случају када постоје два формална степена реда B_1 и B_2 таква да $B_1^n = A$ и $B_2^n = A$. Надаље ћемо у тим случајевима са $A^{\frac{1}{n}}$ означавати формални степени ред са позитивним слободним чланом. Такође, дефинишемо и $A^{\frac{p}{q}} := (A^{\frac{1}{q}})^p$ где важи $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in N$. Следећа теорема нам говори да су рационални степенови добро дефинисани на тај начин, као и да имају очекивана својства.

Теорема 5. *Нека су A и B формални степени редови такви да $S(A)S(B) > 0$. Дати су цели бројеви $a, m \in \mathbb{Z}$ и природни бројеви $b, n \in \mathbb{N}$такви да важи $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, као и рационални бројеви $q_1 = \frac{k}{l}, q_2 \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$. Важи*

1. $(A^a)^m = (A^m)^a$.
2. $(AB)^a = A^a B^a$.
3. $A^m = B^m \wedge m \neq 0 \wedge S(A)S(B) > 0 \implies A = B$.
4. $A^{\frac{a}{b}} = A^{\frac{m}{n}}$.

5. $(A^{q_1})^n = A^{nq_1}$.

6. $(A^{q_1})^{\frac{1}{n}} = A^{\frac{q_1}{n}}$.

7. $(A^{q_1})^{q_2} = (A^{q_2})^{q_1}$.

8. $A^{q_1} \times A^{q_2} = A^{q_1+q_2}$.

Доказ. 1. Очито.

2. Важи јер је скуп формалних степених редова комутативни прстен.

3. Лако следи из претходне теореме.

4. Из дефиниције и горенаведених особина степеновања се лако добија следеће

$$(A^{\frac{a}{b}})^{bn} = ((A^{\frac{1}{b}})^a)^{bn} = (((A^{\frac{1}{b}})^a)^b)^n = (((A^{\frac{1}{b}})^b)^a)^n = (A^a)^n = A^{an}$$

као и

$$(A^{\frac{m}{n}})^{bn} = (((A^{\frac{1}{n}})^m)^{bn} = (((A^{\frac{1}{n}})^m)^n)^b = (((A^{\frac{1}{n}})^n)^m)^b = (A^m)^b = A^{mb}.$$

Како важи $an = mb$, из претходног следи $A^{\frac{a}{b}} = A^{\frac{m}{n}}$.

5. Слично као претходно.

6. Слично као претходно.

7. Слично као претходно.

8. Слично као претходно.

□

Осим сабирања и множења, као и на основу њих дефинисаног одузимања и дељења, дефинисаћемо и композицију формалних степених редова на очекиван начин. Да бисмо то учинили најпре је потребно да размотримо случај бесконачне суме формалних степених редова. Како у прстену формалних степених редова нема конвергенције треба да пазимо да не долази до бесконачних сума приликом рачунања неког коефицијента. Такође, очигледно се ни резултујући степени ред не разликује уколико мењамо редослед којим сабирамо. Сада лако добијамо следеће.

Теорема 6. *Нека су A и B два формална степена реда. Тада постоји $A \circ B$ ако и само ако је A полином или $b_0 = 0$.*

Применом горње теореме и очигледне једнакости $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ добијамо следеће.

Теорема 7. *Нека је $A = 1 - B$ формални степени ред такав да $S(A) = 1$. Важи*

$$\frac{1}{A} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k.$$

Треба нагласити специјалан случај горње теореме који се често користи - коефицијент уз x^k у формалном степеном реду $\frac{1}{1-tx}$ је t^k.

1.2 Алгебарски изводи и други оператори

Изводе формалних степених редова дефинишемо на очекиван начин.

Дефиниција 4. *Нека је $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Дефинишемо алгебарски извод*

$$D(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

Лако се доказују све очекиване особине аналитичког извода.

Теорема 8. *Нека су A и B два формална степена реда. Важи*

1. $D(A + B) = D(A) + D(B)$.
2. $D(AB) = D(A)B + AD(B)$.
3. $D(\frac{1}{A}) = -\frac{D(A)}{A^2}$ *уколико* $\frac{1}{A}$ *постоји.*
4. $D(\frac{A}{B}) = \frac{D(A)B - AD(B)}{B^2}$ *уколико* $\frac{1}{B}$ *постоји.*
5. $D(A \circ B) = (D(A) \circ B)D(B)$ *уколико је* $A \circ B$ *дефинисано.*

Извод вишег реда дефинишемо на очекиван начин. Дефинишимо $S(A) = a_0$. Лако се примећује да важи Маклоренов развој.

Теорема 9. *Нека је A формални степени ред. Важи*

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(k)}(S(A))}{k!} x^k.$$

Сада лако дефинишемо логаритме за формалне степене редове A такве да $S(A) = 1$. За остале се не може дефинисати јер одговарајуће бесконачне суме не постоје.

Дефиниција 5. *Нека је $A = 1 + B$ формални степени ред такав да $S(A) = 1$, тј. $S(B) = 0$. Дефинишимо*

$$L(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} B^k.$$

Докажимо очекиване особине.

Теорема 10. *Нека су A и B два формална степена реда таква да $S(A) = 1$ и $S(B) = 1$. Важи*

1. $D(L(A)) = \frac{D(A)}{A}$.
2. $L(AB) = L(A) + L(B)$.
3. $L(\frac{1}{A}) = -L(A)$.
4. $L(A^r) = rL(A)$ *за свако рационално* r.
5. $L(A) = 0 \iff A = 1$.
6. $L(A) = L(B) \iff A = B$.

Доказ. 1. Нека је $A = 1 + C$ за неко C такво да $S(C) = 0$. На основу дефинисаност бесконачних сума, као и доказане особине да извод пролази кроз суму, следи да извод пролази кроз дефинисане бесконачне суме, те користећи формулу за инверз добијамо

$$\begin{aligned}
D(L(A)) &= D(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} C^k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} D(\frac{(-1)^{k+1}}{k} C^k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} C^{k-1} D(C) \\
&= D(C) \sum_{k=0}^{\infty} (-C)^k \\
&= \frac{D(A)}{A}.
\end{aligned}$$

2. Важи

$$\begin{aligned} D(L(AB)) &= \frac{D(AB)}{AB} \\ &= \frac{D(A)B + AD(B)}{AB} \\ &= \frac{D(A)}{A} + \frac{D(B)}{B} \\ &= D(L(A) + L(B)) \end{aligned}$$

одакле очито следи $L(AB) = L(A) + L(B)$.

3. Очито из горе доказаног.

4. За цело r очито важи због горе доказаних једнакости. Ако је $r = \frac{p}{q}$, очито

$$pL(A) = L(A^p) = L((A^r)^q) = qL(A^r)$$

одакле следи тражено.

5. Очито из особина логаритма.

6. Очито из особина логаритма.

□

Сада можемо доказати биномну теорему којом лако проналазимо корене формалних степених редова. Међутим, пре него што је докажемо, уопштимо биномни коефицијент.

Дефиниција 6. *За произвољан реалан број r и ненегативан цео број k, дефинишемо биномни коефицијент на следећи начин*

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)...(r-(k-1))}{k!}.$$

Теорема 11. *Нека је r рационалан број и нека је A формални степени ред такав да $S(A) = 0$. Тада важи*

$$(1+A)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} A^k.$$

Доказ. Означимо десну страну са B. Довољно је доказати $L((1+A)^r) = L(B)$ односно $D(L((1+A)^r)) = D(L(B))$, тј. $D(rL(1+A)) = \frac{D(B)}{B} \iff rBD(A) = (1+A)D(B)$, што лако добијамо

$$
\begin{aligned}
(1+A)D(B) &= (1+A)\sum_{k=1}^{\infty} k\binom{r}{k}A^{k-1}D(A) \\
&= D(A)(\sum_{k=1}^{\infty} k\binom{r}{k}A^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} k\binom{r}{k}A^{k-1}) \\
&= D(A)(r + \sum_{k=1}^{\infty} k\binom{r}{k}A^{k} + \sum_{k=2}^{\infty} k\binom{r}{k}A^{k-1}) \\
&= D(A)(r + \sum_{k=2}^{\infty} A^{k-1}(k\binom{r}{k} + (k-1)\binom{r}{k-1})) \\
&= D(A)(r + \sum_{k=2}^{\infty} A^{k-1}r(\binom{r-1}{k-1} + \binom{r-1}{k-2})) \\
&= D(A)(r + \sum_{k=2}^{\infty} A^{k-1}r\binom{r}{k-1} \\
&= rD(A)(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{r}{k}A^{k}) \\
&= rBD(A).
\end{aligned}
$$

□

Преостаје дефинисати експоненцијалну функцију, што чинимо на следећи начин.

Дефиниција 7. *Нека је A формални степени ред такав да $S(A) = 0$. Дефинишимо*

$$E(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Докажимо очекиване особине.

Теорема 12. *Нека су A, B и C формални степени редови такви да $S(A) = 0$, $S(B) = 0$ и $S(C) = 1$. Важи*

1. *$D(E(A)) = D(A)E(A)$.*

2. *$E(A) = E(B) \iff A = B$.*

3. $L(E(A)) = A$.

4. $E(L(C)) = C$.

5. $E(rL(C)) = C^r$ *за свако рационално* r.

6. $E(A + B) = E(A)E(B)$.

Доказ. 1. Лако из дефиниција.

2. Важи $D(E(A)) = D(E(B))$, те $D(A)E(A) = D(B)E(B)$, тј. $D(A) = D(B)$ с обзиром да је $E(A), E(B) \neq 0$. Одатле директно следи $A = B$ јер $S(A) = S(B)$.

3. Важи $D(L(E(A))) = \frac{D(E(A))}{E(A)} = \frac{D(A)E(A)}{E(A)} = D(A)$ одакле следи $L(E(A)) = A$ с обзиром да је $S(L(E(A)) = S(A) = 0$.

4. Нека је $E(L(C)) = C'$ за неки формални степени ред C' такав да $S(C') = 1$. Из горе доказаног следи $L(C') = L(E(L(C))) = L(C)$, као и $C = C'$.

5. Користећи горе доказане особине логаритама, добијамо $L(E(rL(C))) = rL(C) = L(C^r)$ одакле следи $E(rL(C)) = C^r$.

6. Из горе доказаних једнакости следи

$$E(A)E(B) = E(L(E(A)E(B))) = E(L(E(A)) + L(E(B))) = E(A + B).$$

$\square$

1.3 Рачун обичних формалних степених редова

Поставља се питање како се обични формални степени редови понашају кад представљају генераторне функције низова. Како се мењају одговарајући формални степени редови приликом трансформација низова, рецимо померања индекса, множења коефицијената са полиномом и сличног?

Најпре, ради лакше нотације дефинишимо следећи симбол.

Дефиниција 8. *Симбол* $f \overset{osr}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ *означава да је* f *генераторна функција низа задата обичним степеним редом, тј.* $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Прво ћемо одговорити на питање померања индекса. Одговор је тривијалан.

Теорема 13. *Нека је дат низ реалних бројева такав да* $f \overset{osr}{\longleftrightarrow} a_n$ *и неки природан број* t. *Тада важи* $\frac{f-\sum_{k=0}^{t-1} a_k x^{k-1}}{x^t} \overset{osr}{\longleftrightarrow} (a_{n+t})_{n\geq 0}$.

Да бисмо разумели како се мења генераторна функција неког низа кад се сваки његов члан помножи неким полиномом, довољно је да разумемо како се мења генераторна функција низа кад се сваки његов члан помножи одговорајућим индексом. Заиста, поновним понављањем тог поступка лако бисмо добили како се мења генераторна функција кад сваки члан низа множимо неким степеном одговајућег индекса. Даље, то лако уопштавамо на произвољан полином користећи чињеницу да је генераторна функција збира два низа једнака збиру њиховим генераторних функција.

Теорема 14. *Нека је дат низ реалних бројева такав да* $f \overset{osr}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$. *Тада важи*

$$xD(f) \overset{osr}{\longleftrightarrow} (na_n)_{n\geq 0}.$$

Доказ. Важи

$$\begin{aligned}
xD(f) &= xD(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k) \\
&= x\sum_{k=0}^{\infty} D(a_k x^k) \\
&= x\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k
\end{aligned}$$

одакле очито следи тражено. □

Теорема 15. *Нека је дат низ реалних бројева такав да* $f \overset{osr}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ *и полином са реалним коефицијентима* $P(x)$. *Тада важи*

$$P(xD)(f) \overset{osr}{\longleftrightarrow} (P(n)a_n)_{n\geq 0}.$$

Доказ. Лако из горње теореме. □

Такође, можемо посматрати две генераторне функције f и g и запитати се ког низа је fg генераторна функција. Лако се добија следеће.

Теорема 16. *Нека су дата два низа реалних бројева таква да* $f \overset{osr}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ *и* $g \overset{osr}{\longleftrightarrow} (b_n)_{n\geq 0}$. *Тада важи*

$$fg \overset{osr}{\longleftrightarrow} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})_{n\geq 0}.$$

Посебно се значајним испоставља множење са $\frac{1}{1-x}$ јер на тај начин добијамо генераторну функцију парцијалних сума.

Теорема 17. *Нека је дат низ реалних бројева такав да* $f \overset{osr}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$. *Тада важи*

$$\frac{f}{1-x} \overset{osr}{\longleftrightarrow} (\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\geq 0}.$$

1.4 Примене

У овом потпоглављу изложићемо пар примена функција генератрисе задатих кроз обичне степене редове.

1.4.1 Рекурентне једначине

Испоставља се да генераторне функције лако решавају велику класу рекурентних једначина.

Пример 1. *Решити следећу рекурентну једначину*

$$a_{n+1} = 2a_n + n, \quad n \geq 0$$

где је $a_0 = 1$.

Доказ. Тражимо обичну генераторну функцију датог низа $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Из рекурентне једначине очито следи

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(2a_n + n)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n.\end{aligned}$$

Користећи особине обичних формалних степених редова, добијамо

$$\begin{aligned}\frac{A(x)-a_0}{x} &= 2A(x)+xD(\frac{1}{1-x})\\ \frac{A(x)-1}{x} &= 2A(x)+\frac{x}{(1-x)^2}\\ A(x)-1 &= 2xA(x)+\frac{x^2}{(1-x)^2}\\ A(x)(1-2x) &= \frac{x^2+(1-x)^2}{(1-x)^2}\\ A(x) &= \frac{2x^2-2x+1}{(1-x)^2(1-2x)}.\end{aligned}$$

Добијену рационалну функцију лако записујемо као збир парцијалних разломака

$$A(x)=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Знамо да за произвољну генератрису F, генератриса $\frac{F}{1-x}$ "носи" низ парцијалних сума[2], те следи да $a_n = 2\cdot 2^n-(n+1)=2^{n+1}-n-1$. □

Пример 2. *Пронаћи општи облик Фибоначијевог броја, тј. решити рекурентну једначину*

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n, \quad n\geq 0$$

где је $f_0=0$ *и* $f_1=1$.

Доказ. Тражимо обичну генераторну функцију датог низа $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. Из рекурентне једначине очито следи

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+1}+f_n)x^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.\end{aligned}$$

Користећи особине обичних формалних степених редова, добијамо

$$\begin{aligned}\frac{F(x)-a_0-a_1x}{x^2} &= \frac{F(x)-a_0}{x}+F(x)\\ F(x)-x &= F(x)x+x^2F(x)\end{aligned}$$

[2]Члан низа који одговара генераторној функцији $\frac{1}{(1-x)^2}$ се може добити и помоћу биномне формуле.

$$
\begin{aligned}
F(x)(1-x-x^2) &= x \\
F(x) &= \frac{x}{1-x-x^2}.
\end{aligned}
$$

Лако добијамо да су решења квадратне једначине $\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, те да се добијена рационална функција раставља на парцијалне разломке на следећи начин

$$
\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\phi_1 x} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\phi_2 x}.
$$

Сада је очито да важи $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi_1^n - \phi_2^n)$. Такође, како је $|\phi_2| < 1$, можемо приметити да важи следеће.

$$
f_n = \begin{cases} \left\lceil \frac{\phi_1^n}{\sqrt{5}} \right\rceil & \text{ако } 2 \nmid n \\ \\ \left\lfloor \frac{\phi_1^n}{\sqrt{5}} \right\rfloor & \text{иначе.} \end{cases}
$$

$\square$

Пример 3 (Модификовани СМО 2019/6)**.** *Решити рекурентну једначину*

$$
a_{n+1} = \frac{2020}{n} a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 1
$$

где је $a_0 = 0$ *и* $a_1 = 1$.

Доказ. Тражимо обичну генераторну функцију низа $\frac{a_n}{n}$, тј. $A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} x^k$. Лако добијамо остале потребне генераторне функције

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} x^k &= \sum_{k=1}^{\infty} D(\frac{a_{k+1}}{k+1} x^{k+1}) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} D(\frac{a_k}{k} x^k) \\
&= D(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{k} x^k) \\
&= D(A(x) - a_1 x) \\
&= D(A(x) - x) \\
&= D(A(x)) - 1
\end{aligned}
$$

и слично

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k &= \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1}x^k\\ &= x^2\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^k\\ &= x^2(D(A(x)).\end{aligned}$$

Из рекурентне једначине следи

$$\begin{aligned}D(A(x))-1 &= 2020A(x)+x^2D(A(x))\\ (1-x^2)D(A(x)) &= 2020A(x)+1\\ \frac{D(A(x))}{2020A(x)+1} &= \frac{1}{1-x^2}.\end{aligned}$$

Може се приметити да је лева страна извод одговарајућег логаритма, те следи

$$\begin{aligned}\frac{D(A(x))}{2020A(x)+1} &= \frac{1}{1-x^2}\\ \frac{D(2020A(x)+1)}{2020A(x)+1} &= \frac{2020}{1-x^2}\\ D(L(2020A(x)+1)) &= \frac{2020}{1-x^2}.\end{aligned}$$

Десна страна се такође лако може превести у парцијалне разломке и затим записати као извод одговарајућих логаритама. Добија се

$$D(L(2020A(x)+1)) = D(1010L(\frac{1+x}{1-x})).$$

Како очито важи $S(L(2020A(x)+1)) = S(1010L(\frac{1+x}{1-x}))$, следи

$$L(2020A(x)+1) = 1010L(\frac{1+x}{1-x}).$$

тј.

$$L(2020A(x)+1) = L((\frac{1+x}{1-x})^{1010}).$$

Одатле користећи доказане особине логаритама формалних степених редова добијамо

$$2020A(x)+1 = (\frac{1+x}{1-x})^{1010}$$

$$2020A(x) = (\frac{1+x}{1-x})^{1010} - 1$$
$$A(x) = \frac{(1+x)^{1010}(1-x)^{-1010} - 1}{2020}.$$

Из биномне теореме следи

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{ако } n = 0 \\ \sum_{k=0}^{1010} \frac{(-1)^k \binom{-1010}{t}\binom{1010}{n-t}}{2020} & \text{иначе.} \end{cases}$$

□

До рекурентних једначина можемо доћи и кроз комбинаторику. У следећем примеру ћемо такав случај илустровати кроз Каталанове бројеве C_n које дефинишемо као број триангулација правилног $n+2$-тоугла[3]. Такође, ради лакше нотације у даљем делу рада, нека је $C_0 = 1$.

Пример 4. *Дат је природан број $n > 2$. Пронаћи број триангулација правилног n-тоугла.*

Доказ. Потребно је пронаћи неку рекурентну везу између Каталанових бројева.
Посматрајмо произвољну страницу правилног n-тоугла. Она ће бити страница неког од троуглова у свакој триангулацији посматраног многоугла. Дакле, једино је питање које је треће теме тог троугла. Бирањем произвољног од преосталих $n-2$ темена, добијамо два мања многоугла, те лако долазимо до следећег

$$C_{n-2} = \sum_{k=1}^{n-2} C_{k-1}C_{n-2-k}$$

тј.

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.$$

Сада лако проналазимо генераторну функцију $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$. Очито важи

$$\frac{C(x)-1}{x} = C(x)^2$$

[3]Каталанови бројеви имају и многе друге интерпретације. Велики број њих је описан у [15].

$$xC(x)^2 - C(x) + 1 = 0$$
$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

С обзиром да $C_0 = 1$, важи

$$C(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Сада користећи биномну теорему добијамо

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x}) &= \frac{1}{2x}(1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{1}{2x}(1-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-4x)^k) \\
&= -\frac{1}{2x}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-4x)^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-4)^k x^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{k+1}(-4)^{k+1} x^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-\frac{(2k-1)}{2})}{(k+1)!}(-1)^{k+1}2^{2k+2}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{(2k-1)!!(-1)^k}{2^{k+1}}}{(k+1)!}(-1)^k 2^{2k+1}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(k+1)!}2^k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\frac{(2k-1)!!(k!2^k)}{k!^2}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}x^k
\end{aligned}$$

тј. $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. □

1.4.2 Метод змијског уља

Генераторне функције задате као обични степени редови се могу користити и за израчунавање сложених комбинаторних сума. Иако ради у великом броју случајева, метод је врло једноставан. Желимо да пронадјемо генераторну функцију која "носи" тражену суму и затим извучемо одговарајући коефицијент. Да бисмо пронашли експлицитан облик генератрисе мењамо редослед сумирања, затим подешавамо сабирке тако да се унутрашња сума лако може експлицитно представити и на крају решавамо добијену суму.

Пре него што пређемо на примере који ће илустровати гореописани процес навешћемо две генераторне функције које се често појављују у овој методи.

Теорема 18. *Важи*

$$\sum_{n} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x}).$$

Доказ. Да бисмо пронашли експлицитан облик прве генераторне функције, покушаћемо да другачије запишемо биномне коефицијенте, те да искористимо већ доказану биномну теорему. Заиста, лако се проверава да важи следеће

$$\binom{n+k}{k} = \binom{-(k+1)}{n}.$$

одакле очито следи тражени облик.
Друга генераторна функција је доказана у примеру о Каталановим бројевима. □

Сада илуструјемо описани метод кроз следећи пример.

Пример 5. *Дат је ненегативан цео број n. Израчунати следећу суму*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k}.$$

Доказ. Поступамо као што је описано

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} x^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{2k}2^{n-k}x^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}2^{-2k}x^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{2k}(2x)^{n+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(4x)^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{2k}(2x)^{n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(4x)^{-k}\frac{(2x)^{2k}}{(1-2x)^{2k+1}} \\
&= \frac{1}{1-2x}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x}{(1-2x)^2})^k \\
&= \frac{1}{1-2x}\frac{1}{1-\frac{x}{(1-2x)^2}} \\
&= \frac{1-2x}{(1-4x)(1-x)} \\
&= \frac{\frac{2}{3}}{1-4x}+\frac{\frac{1}{3}}{1-x}
\end{aligned}
$$

одакле очито следи

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{2k}2^{n-k}=\frac{2^{2n+1}+1}{3}.
$$

$\square$

Следећи пример је знатно сложенији, те би било прилично тешко израчунати суму на елементаран начин пребројавањем. Међутим, генераторним функцијама се и она лако израчунава.

Пример 6. *Дат су ненегативни цели бројеви n и m. Израчунати суму*

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}.
$$

Доказ. Фиксирајмо m. Важи

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}x^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{m+2k}x^{n+k}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{m+2k} x^n$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{-k} \frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}}$$
$$= \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{1}{k+1} (\frac{-x}{(1-x)^2})^k$$
$$= \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \frac{1}{\frac{-2x}{(1-x)^2}} (1 - \sqrt{1 + \frac{4x}{(1-x)^2}})$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{x^{m-1}}{(1-x)^{m-1}} (1 - \sqrt{\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}})$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{x^{m-1}}{(1-x)^{m-1}} (1 - \frac{1+x}{1-x})$$
$$= \frac{x^m}{(1-x)^m}$$

одакле следи

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{m+2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \binom{n-1}{m-1}.$$

□

Такође, занимљиво је што се некад испоставља да је метод змијског уља успешан у израчунавање неке суме иако није од помоћи приликом израчунавања специјалних случајева исте суме. Један од таквих примера је следећи познат идентитет

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n}{n-k} = \binom{3n}{n}.$$

Како се n појављује на три различита места у три различита облика n, $2n$ и $n-k$, не бисмо могли да применимо метод на дату суму. Међутим, уколико бисмо за свако појављивање увели нову променљиву добили бисмо следећи идентитет који се лако доказује методом змијског уља

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

Треба нагласити да постоји и метод којим се помоћу компјутера[4] могу

[4] Иако је за метод потребан компјутер, коначан доказ се лако може проверити ручно.

доказати многи сложени идентитети који су ван домашаја метода змијског уља. Међутим, и он има своје мане, њиме се не могу доказати неки једноставнији идентитети који се могу доказати методом змијског уља. Такође, за разлику од метода змијског уља, за примену овог метода је потребно знати чему је једнака дата сума, тј. обе стране идентитета. Више о том методу се може пронаћи у [1].

1.5 Експоненцијални степени редови

Уместо обичних степених редова некад се испоставља корисним посматрање експоненцијалних генераторних функција.

1.5.1 Рачун експоненцијалних степених редова

У овом потпоглављу ћемо испитати како се мења експоненцијална генераторна функција низа приликом трансформација истог. Многе промене остају исте као код обичних генераторних функција. Овде ћемо се бавити само оним особинама које се разликују.

Најпре, уведимо следећу дефиницију.

Дефиниција 9. *Симбол $f \overset{esr}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ означава да је f генераторна функција низа задата експоненцијалним степеним редом, тј. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$.*

Сада размотримо померање индекса низа. Лако се добија следеће.

Теорема 19. *Нека је дат низ реалних бројева такав да $f \overset{esr}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ и неки природан број t. Тада важи $D^{(t)}(f) \overset{esr}{\longleftrightarrow} (a_{n+t})_{n\geq 0}$.*

Поред померања индекса и множење се мења. Лако се добија следеће.

Теорема 20. *Нека су дата два низа реалних бројева таква да $f \overset{esr}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ и $g \overset{esr}{\longleftrightarrow} (b_n)_{n\geq 0}$. Тада важи*

$$fg \overset{esr}{\longleftrightarrow} (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k})_{n\geq 0}.$$

1.5.2 Примене

Следећи примери илуструју неке од случајева кад су експоненцијалне генераторне функције практичније од обичних. У питању је низ Белових бројева који пребројавају партиције скупа и број пермутација без фиксних тачака. Облик њихове рекурентне формуле чини експоненцијалне генераторне функције знатно кориснијим.

Пример 7. *Пронаћи $B(x)$ - експоненцијалну генераторну функцију Белових бројева.*

Доказ. Најпре је потребно одредити рекурентну формулу Белових бројева. Лако се примећује да важи следеће

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}.$$

Заиста, изаберимо произвољни елемент произвољног скупа од $n+1$ елемената. Од преосталих n елемената бирамо оне који се налазе у истој партицији као већ изабрани елемент. Уколико њих има k, преостале елементе можемо поделити у партиције на b_{n-k} начина, док споменутих k елемената можемо изабрати на $\binom{n}{k}$ начина, те горња рекурентна формула заиста важи.
Користећи особине експоненцијалних генераторних функција добијамо

$$\begin{aligned} D(B(x)) &= E(x)B(x) \\ \frac{D(B(x))}{B(x)} &= E(x) \\ D(L(B(x))) &= D(E(x))). \end{aligned}$$

Како је $S(L(B(x))) = 0$ и $S(E(x)) = 1$ следи

$$\begin{aligned} L(B(x)) &= E(x) - 1 \\ B(x) &= E(E(x) - 1). \end{aligned}$$

□

Пример 8. *Нека је n произвољан природан број. Одредити број пермутација без фиксних тачака скупа $[n]$.*

Доказ. Означимо тражени број са d_n. Потребно је пронаћи рекурентну формулу тог низа. Очито важи следеће

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!.$$

Одатле следи

$$D(x)E(x) = \frac{1}{1-x}$$

тј.

$$D(x) = E(-x)\frac{1}{1-x}$$

где је $D(x)$ експоненцијална генераторна функција низа d_n.
Сада следи

$$d_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

□

2 Аналитичка теорија

За разлику од досадашњег дела рада у ком смо се бавили генераторним функцијама користећи искључиво њихове алгебарске особине, у овом поглављу ћемо се осврнути на њихове аналитичке особине. На тај начин генераторне функције ће постати више од само ”носача” неког низа јер ћемо до сада мистериозну променљиву x моћи да мењамо и одређеним реалним вредностима. Међутим, треба напоменути да су за потпуну анализу аналитичких особина генераторних функција потребна одређена знања комплексне анализе која превазилазе оквире овог рада, те да ћемо се ми овде бавити искључиво генераторним функцијама реалних низова, тј. реалним степеним редовима. Детаљан преглед аналитичких особина генераторних функција заснованих на комплексној анализи је доступан у [13].

2.1 Основна питања

Нека је $a_0, a_1, ...$ низ реалних бројева. Посматрајмо његову генераторну функцију

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$$

Како је десна страна једнакости бесконачна сума, поставља се питање за које реалне вредности x она конвергира, тј. за које x је функција $f(x)$ дефинисана. Осим тога, намеће се и питање да ли је $f(x)$ диференцијабилна. Ако јесте, колико извода има? Да ли се извод поклапа са алгебарским изводом дефинисаним у претходном поглављу, тј. да ли можемо бесконачну суму диференцирати сабирак по сабирак? Шта важи за интеграл?
Да бисмо одговорили на та питања, нешто ћемо уопштити скуп функција које посматрамо - уместо степених редова, анализираћемо и остале бесконачне суме низова функција. Међутим, с обзиром да су оне задате као лимеси парцијалних сума, што су заправо нове функције, најпре ћемо се усредсредити на функције задате као лимеси низа функција.

2.2 Функције задате као лимеси низа функција

Нека је дат низ функција $f_0(x), f_1(x), ...$ које сликају неки подскуп реалних бројева у скуп реалних бројева. Посматрајмо функцију

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Питамо се да ли се непрекидност, диференцијабилност и интеграбилност функције f наслеђују из низа функција. Такође, занима нас је ли извод и интеграл могу да прођу кроз лимес. Испоставља се да функција f нема ниједну особину којој бисмо се надали.

Заиста функције задате са

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ако } x \geq 1 \\ x^n & \text{ако } 1 > x \geq 0 \end{cases}$$

су све непрекидне, док функција

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ако } x \geq 1 \\ 0 & \text{ако } 1 > x \geq 0 \end{cases}$$

очито није непрекидна.

На сличан начин можемо конструисати и низ диференцијабилних функција такав да функција дефинисана њиховим лимесом није диференцијабилна. Приметимо на графику претходног примера да је једина тачка у којој f_n нису диференцијабилне 1. Како у тој тачки долази до "шпица", све што је потребно да урадимо је да функције заоблимо око те тачке, што лако чинимо на следећи начин

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ако } x \geq 1 \\ \sin(x\pi/2)^n & \text{ако } 1 > x \geq 0. \end{cases}$$

На следећем примеру се огледају и чудне особине приликом интеграције. Посматрајмо функције које на графику граде једнакокраке троуглове површина $\frac{1}{2}$ све мањих основица и све већих висина. Оне су задате на следећи начин

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{ако } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2x & \text{ако } \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{ако } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Очито важи

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Сада лако рачунамо интеграле.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

и добијамо још један неинтуитиван резултат - вредности интеграла су различите!

Шта карактерише посматране низове функција? Зашто се испољавају неинтуитивне особине? Посматрајмо графике свих споменутих примера функција. Приметимо да ни у једном примеру график функције f није близу f_n за довољно велико n, тј у сваком од примера за довољно мало $\epsilon > 0$, трака дужине 2ϵ око графика f, по ϵ изнад и испод, не садржи у потпуности график ниједне функције f_n. Међутим, с обзиром на то да је

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

свакако да за свако ϵ и свако x за све довољно велике n, тачка $(x, f_n(x))$ припада споменутој траци. Дакле, у сваком од примера важи

$$(\forall\epsilon > 0)(\forall x)(\exists N(x,\epsilon))(n > N(x,\epsilon) \implies |f(x) - f_n(x)| < \epsilon)$$

али не и

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N(\epsilon))(\forall x)(n > N(\epsilon) \implies |f(x) - f_n(x)| < \epsilon).$$

Интуитивно делује да ако би важио и други услов, из ког очито следи први, односно ако би за свако ϵ 2ϵ-трака око графика f садржала графике f_n за довољно велике n, онда би добијена функција f испољавала све очекиване особине. Пре него што то и докажемо уведимо две дефиниције које осликавају два различита гореспоменута начина конвергенције низа функција.

Дефиниција 10. *Нека је дат низ функција $f_0, f_1, \ldots$. Кажемо да он тачкасто конвергира у f ако и само ако важи*

$$(\forall\epsilon > 0)(\forall x)(\exists N(x,\epsilon))(n > N(x,\epsilon) \implies |f(x) - f_n(x)| < \epsilon).$$

Дефиниција 11. *Нека је дат низ функција $f_0, f_1, \ldots$. Кажемо да он униформно конвергира у f ако и само ако важи*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N(\epsilon))(\forall x)(n > N(\epsilon) \implies |f(x) - f_n(x)| < \epsilon).$$

Најпре, докажимо најинтуитивнију од свих особина које очекујемо да низ функција које униформно конвергирају има.

Теорема 21. *Нека је дат низ функција $f_0, f_1, \ldots$ који униформно конвергира у функцију f која је интеграбилна на $[a,b]$. Ако је за свако n, f_n интеграбилна на $[a,b]$, онда важи*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Доказ. Како низ функција униформно конвергира у f, знамо да за свако $\epsilon > 0$ за свако довољно велико n важи

$$\begin{aligned}
|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx| &= |\int_a^b f(x) - f_n(x)\,dx| \\
&\le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \\
&\le \int_a^b \epsilon\,dx \\
&= \epsilon(b-a)
\end{aligned}$$

одакле очито следи тражено. □

Докажимо и да се и непрекидност понаша очекивано.

Теорема 22. *Нека је дат низ функција $f_0, f_1, \ldots$ који униформно конвергира у функцију f. Ако је за свако n, f_n непрекидна на $[a,b]$, онда је и f непрекидна на $[a,b]$.*

Доказ. Доказујемо да је f непрекидна око сваке тачке $x \in (a,b)$. Занемарујемо случајеве $x = a$ и $x = b$ јер су они техничке природе, те се следећи аргумент са врло малом модификацијом може применити и на њих.
Фиксирајмо $x \in (a,b)$. Како низ функција униформно конвергира у f, за свако $\epsilon > 0$ за свако довољно велико n и свако $y \in (a,b)$ важи

$$|f(y) - f_n(y)| < \epsilon/3$$

па тако и за x важи

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/3.$$

Одаберимо произвољно N које задовољава ту особину. С обзиром да је f_N непрекидна на $[a, b]$ за свако $\epsilon > 0$ постоји $\delta(\epsilon, x) \in (0, \min(b - x, x - a))$ т.д. за свако $y \in (x - \delta(\epsilon, x), x + \delta(\epsilon, x))$ важи

$$|f_N(x) - f_N(y)| < \epsilon/3.$$

Докажимо да је у тој $\delta(\epsilon, x)$-околини тачке x испуњен и услов потребан за непрекидност функције f. За свако $y \in (x - \delta(\epsilon, x), x + \delta(\epsilon, x))$, због (1) важи

$$|f(y) - f_N(y)| < \epsilon/3.$$

Комбинујући ову неједнакост са (2) и (3), путем неједнакост троугла добијамо

$$|f(x) - f(y)| < |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < \epsilon$$

чиме је доказано да је функција f непрекидна. □

Преостаје испитати да ли и извод задовољава жељене особине. Испоставља се да ни у случају униформне конвергенције, није све као што бисмо желели да буде. Лако је пронаћи низ функција такав да лимес извода чак ни не постоји за свако реално x, док је функција којој униформно конвергирају бесконачно диференцијабилна, рецимо $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$. Међутим, лако се модификују услови тако да ипак важи оно што смо желели што видимо кроз следећу теорему.

Теорема 23. *Нека је $f_0, f_1, \ldots$ низ функција диференцијабилних на $[a, b]$, који тачкасто конвергира у функцију f. Претпоставимо да низ функција $f_0', f_1', \ldots$ униформно конвергира у функцију g непрекидну на $[a, b]$. Онда је f диференцијабилна и*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x).$$

Доказ. Искористимо кључну претпоставку - униформну конвергенцију извода. За свако $x \in [a, b]$ због горе доказане теореме важи

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)\,dt &= \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) - f_n(a)\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(a).$$

Сада примењујући претпоставку да низ функција $f_0, f_1, ...$ тачкасто конвергира у функцију f добијамо

$$\int_a^x g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(x) - f(a).$$

Како је g непрекидна, за свако $x \in [a, b]$ важи

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

што је и требало доказати. □

Овим смо завршили испитивање функција задатих као лимеси других функција. Пронашли смо претпоставке које нам гарантују да добијена функција има жељене особине, те сада можемо лако започети испитивање функција задатих као бесконачне суме других функција.

2.3 Функције задате као бесконачне суме функција

Нека је дат низ функција $f_0, f_1, f_2, ...$ Посматрајмо функцију $f(x)$ задату са

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)...$$

Да бисмо испитали њене особине, дефинишемо аналогне термине као у случају функција задатих као лимеси других функција.

Дефиниција 12. *Нека је дат низ функција $f_0, f_1, f_2....$ Кажемо да бесконачна сума $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ тачкасто конвергира у f ако и само ако важи*

$$(\forall \epsilon > 0)(\forall x)(\exists N(x, \epsilon))(n > N(x, \epsilon) \implies |f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)| < \epsilon).$$

Дефиниција 13. *Нека је дат низ функција $f_0, f_1, ...$ Кажемо да бесконачна сума $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ униформно конвергира у f ако и само ако важи*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N(\epsilon))(\forall x)(n > N(\epsilon) \implies |f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)| < \epsilon).$$

Сада лако "преводимо" све леме у случај функција задатих као бесконачних сума других функција.

Теорема 24. *Нека је дат низ функција $f_0, f_1, f_2, \ldots$ т.д. бесконачна сума $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ униформно конвергира у функцију f која је интеграбилна на $[a,b]$. Ако је за свако n, f_n интеграбилна на $[a,b]$, онда важи*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

Доказ. Лако из сличне теореме из претходног потпоглавља. □

Теорема 25. *Нека је дат низ функција $f_0, f_1, f_2, \ldots$ т.д. бесконачна сума $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ униформно конвергира у функцију f. Ако је за свако n, f_n непрекидна на $[a,b]$, онда је и f непрекидна на $[a,b]$.*

Доказ. Лако из сличне теореме из претходног потпоглавља. □

Теорема 26. *Нека је дат низ функција $f_0, f_1, f_2, \ldots$ диференцијабилних на $[a,b]$ т.д. бесконачна сума $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ униформно конвергира у функцију f. Претпоставимо да бесконачна сума $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ униформно конвергира у функцију g непрекидну на $[a,b]$. Онда је f диференцијабилна и*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x) = g(x).$$

Доказ. Лако из сличне теореме из претходног потпоглавља. □

Тиме смо систематизовали претпоставке које низ функција треба да испуњава да би функција задата њиховом бесконачном сумом испољавала жељене особине. Приметимо да се у свакој од претпоставки појављује униформна конвергентност што је било и очекивано с обзиром на разлог због ког смо дефинисали униформну конвергентност. Међутим, како уопште да проверимо да ли је бесконачна сума низа функција униформно конвергентна? Да ли уопште и знамо неки нетривијалан низ функција који је униформно конвергентан? И коначно питање, да ли су степени редови униформно конвергентни на неком подскупу реалних бројева?

2.4 Вајерштрасов М-Тест и примене

Следећа теорема нам даје прилично широку класу низова функција таквих да је њихова бесконачна сума униформно конвергентна и тиме одговара на већину питања постављених на крају претходног потпоглавља.

Теорема 27. *Нека је дат низ функција* $f_0, f_1, f_2, \ldots$ *дефинисаних на неком подскупу реалних бројева* A *заједно са низом реалних бројева* M_n *таквих да важи*

$$(\forall x \in A)(|f_n(x)| \leq M_n).$$

Претпоставимо да је бесконачна сума $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ *конвергентна. Тада важи да бесконачна сума* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *униформно конвергира у неку функцију* f *на* A.

Доказ. Најпре покажимо да је функција задата са $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ правилно дефинисана на A, тј. да бесконачна сума тачкасто конвергира на A.
Из поредбеног теста добијамо да $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ конвергира на A, тј. да је $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ апсолутно конвергентна на A, одакле следи да је $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ конвергентна на A.
Преостаје доказати да сума тих функција заправо униформно конвергира у f. За свако $x \in A$ важи

$$\begin{aligned}
|f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x)| &= |\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n.
\end{aligned}$$

С обзиром да $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ конвергира, за довољно велико N, бесконачна сума $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n$ постаје произвољно мала, те добијамо да бесконачна сума функција $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ заиста униформно конвергира у f на A. □

Сада лако можемо наћи многе низова функција таква да њихова бесконачна сума униформно конвергира. Све што је потребно да урадимо је да изаберемо неку бесконачну суму са свим позитивним члановима и функције које су ограничене управо члановима те бесконачне суме. Међутим, преостаје питање када су степени редови униформно конвергентни. На њега одговарамо у следећој теореми, примењујући Вајештрасов М-Тест.

Теорема 28. *Нека је дат степени ред* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Претпоставимо да је конвергентан у тачки* $x_0 \neq 0$. *Тада за свако* $|x'| < |x_0|$ *важи да је степени ред униформно конвергентан на интервалу* $[-|x'|, |x'|]$.

Доказ. Фиксирајмо $x' \in (-|x_0|, |x_0|)$. Да бисмо применили Вајештрасов M-тест потребно је да проценимо $a_n x^n$ за $x \in [-|x'|, |x'|]$, што лако чинимо

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}| = |a_n x_0^n||\frac{x}{x_0}|^n.$$

Како $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ конвергира, знамо да постоји M т.д. за свако $n \in \mathbb{N}_0$ важи $|a_n x_0^n| \leq M$, те добијамо да за свако $x \in [-|x'|, |x'|]$ важи

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n||\frac{x}{x_0}|^n \leq M|\frac{x}{x_0}|^n.$$

С обзиром да је $|x| \leq |x'| < x_0$, тј. $\frac{x}{x_0} < 1$, бесконацна сума $\sum_{n=0}^{\infty} M|\frac{x}{x_0}|^n$ је очито конвергентна, те из Вајерштрасовог M-теста добијамо да је степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ заиста униформно конвергентан на интервалу $[-|x'|, |x'|]$ за свако $x' \in (-|x_0|, |x_0|)$. $\square$

Сада на основу тога што интеграл пролази кроз низ униформно конвергентних функција закључујемо да већина степених редова у околини нуле има жељене особине кад је реч о интеграцији. Такође, из тога што се непрекидност наслеђује из низа униформно конвергентних непрекидних функција добијамо да исто важи и за непрекидност. Преостаје питање шта се дешава са диференцирањем, на које нам одговор даје следећа лема.

Теорема 29. *Нека је дат степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Претпоставимо да је конвергентан у тачки $x_0 \neq 0$. Тада за свако $|x'| < |x_0|$ важи да је степени ред $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ униформно конвергентан на интервалу $[-|x'|, |x'|]$.*

Доказ. Фиксирајмо $x' \in (-|x_0|, |x_0|)$. Као и у претходној леми потребно је проценити $|(n+1)a_{n+1}x^n|$, што се опет лако може урадити. За свако $x \in [-|x'|, |x'|]$ важи

$$|(n+1)a_{n+1}x^n| = |\frac{n+1}{x_0}(n+1)a_{n+1}x_0^{n+1}\frac{x^n}{x_0^n}| = |\frac{n+1}{x_0}||a_{n+1}x_0^{n+1}||\frac{x}{x_0}|^n.$$

Исто као у доказу претходне леме добијамо да постоји M т.д. за свако n важи $|a_n x_0^n| \leq M$, те важи

$$|(n+1)a_{n+1}x^n| = |\frac{n+1}{x_0}||a_{n+1}x_0^{n+1}||\frac{x}{x_0}|^n \leq |\frac{M}{x_0}|(n+1)|\frac{x}{x_0}|^n.$$

Како је $|\frac{x}{x_0}| < 1$, применом Даламберовог теста добијамо да је $\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{M}{x_0}|(n+1)|\frac{x}{x_0}|^n$ конвергира, те из Вајерштрасовог M-теста следи да $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ униформно конвергира на $[-|x'|, |x'|]$. $\square$

Користећи доказану чињеницу да се диференцијабилност наслеђује из низа униформно конвергентних диференцијабилних функција добијамо да се већина степених редова у околини нуле понаша на жељени начин и кад је реч о диференцирању. Такође, из ове две леме о степеним редовима, можемо закључити да се они понашају на жељени начин за све x за које важи $|x| < R$ за неко R, као и да за све x т.д. $|x| > R$ чак ни не конвергирају. Намеће се питање како одредити R.

2.5 Радијус конвергенције степених редова

С обзиром да вредност R представља врло битну карактеристику степених редова, најпре ћемо навести следећу дефиницију.

Дефиниција 14. *Нека је дат степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ненегативан реалан број R такав да степени ред униформно конвергира на интервалу $(-R, R)$ и уопште не конвергира за x т.д. $|x| > R$ се назива* **радијус конвергенције** *тог степеног реда.*

Посматрајући само дефиницију, није уопште очигледно ни да произвољан степени ред има радијус конвергенције. Међутим, као што је напоменуто при крају претходног подпоглавља, из претходне две теореме из прошлог потпоглавља очито следи постојање радијуса конвергенције било ког степеног реда.
Вратимо се на питање постављено на крају претходног потпоглавља. Како одредити радијус конвергенције неког степеног реда? Следећа теорема нам даје одговор на њега.

Теорема 30. *Нека је дат степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Његов радијус конвергенције је $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.*

Доказ. Лако из кореног Кошијевог теста. □

Пример 9. *Радијус конвергенције степеног реда $e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ је ∞.*

Доказ. Користећи Стирлингову формулу добијамо

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \infty.$$

□

2.6 Примене

Као што се може приметити, све операције функционишу на исти начин и код формалних и аналитичких степених редова, те заиста можемо манипулисати формалним степеним редовима и тек на крају проверити питање конвергенције. На следећем примеру на тај начин рачунамо бесконачну суму.

Пример 10. *Испитати конвергенцију и израчунати следећу бесконачну суму уколико конвергира*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^2+5n+1}{n!}.$$

Доказ. Тражимо генераторну функцију $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^2+5n+1}{n!} x^n$. Користећи доказане особине формалних степених редова, лако добијамо

$$\begin{aligned} A(x) &= ((xD)^2 + 5xD + 1)(E(x)) \\ &= (x^2+x)E(x) + 5xE(x) + E(x) \\ &= x^2E(x) + 6xE(x) + E(x). \end{aligned}$$

где је наравно $E(x) = e^x$. Добијени израз очито конвергира за свако реално x, те и почетна генераторна функција конвергира. Тражену суму добијамо за $x = 1$ и она је $A(1) = 8e$. □

Поред тога аналитичке особине генераторних функција су често од помоћи у вероватноћи. За дискретну случајну променљиву X која узима ненегативне целобројне вредности дефинишемо њену генераторну функцију на очекиван начин

$$G_X(t) = \mathbb{E}[t^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$$

где је $p_k = \mathbb{P}(X = k)$.
Можемо приметити да је $G_X(s)$ дефинисана за све реалне s такве да $|s| \leq 1$. Заиста, радијус конвергенције је очито већи или једнак 1 с обзиром да важи $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Из истог разлога следи да је функција дефинисана за $s = 1$, као и за $s = -1$ због апсолутне конвергенције бесконачне суме.
Такође, очигледно је да генераторна функција садржи све информације о расподели дискретне случајне променљиве, те из ње лако налазимо основне особине расподеле као што су варијанса и очекивана вредност.

Теорема 31. *Нека је X дискретна случајна променљива која узима ненегативне целобројне вредности. Важи* *лабели()*

$$\mathbb{E}[X] = D(G_X(1))$$

лббели()

$$var(X) = D(L(G_X(1))) + D^{(2)}(L(G_X(1))).$$

Доказ. Лако. □

Осим тога, генераторне функције омогућују лако одређивање расподеле збира две независне дискретне случајне променљиве које узимају ненегативне целобројне вредности.

Теорема 32. *Нека су X и Y две независне дискретне случајне променљиве које узимају ненегативне целобројне вредности. Важи*

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

Доказ. С обзиром да су X и Y независне важи следеће

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[t^{X+Y}] = \mathbb{E}[t^X]\mathbb{E}[t^Y] = G_X(t)G_Y(t).$$

□

Међутим, шта уколико случајна променљива није дискретна односно не узима само ненегативне целобројне вредности? У том случају од користи нам постају такозване моментне генераторне функције, као и карактеристичне функције[1], али о њима неће бити реч у овом раду.

Дефиниција 15. *Нека је X случајна променљива. Дефинишимо њену моментну генераторну функцију као*

$$M_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX}).$$

Пример 11. *Одредити моментну генераторну функцију случајне променљиве која има Гаусову нормалну расподелу.*

Доказ. Важи

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{tX}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx\end{aligned}$$

[1] Више се може пронаћи у [12] и [14].

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tx - \frac{1}{2}x^2} dx \\
&= e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2 + tx - \frac{1}{2}x^2} dx \\
&= e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx \\
&= e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= e^{\frac{1}{2}t^2}.
\end{aligned}
$$

□

Споменута функција очито не мора да буде дефинисана у свакој реалној тачки $t \in \mathbb{R}$. Међутим, испоставља се да скуп вредности за које јесте дефинисана има сличну структуру као скуп вредности за које је реални степени ред дефинисан. То је потпуно природно с обзиром да моментна генераторна функција заиста јесте степени ред што ће бити доказано у некој од наредних теорема.

Теорема 33. *Нека је X случајна променљива. Означимо са T скуп реалних вредности за које је $M_X(t)$ дефинисана. Важи*

1. *Уколико је $M_X(t)$ дефинисано за неко $t \in \mathbb{R}$ онда $M_X(t) > 0$.*
2. *$0 \in T$, $M_X(0) = 1$.*
3. *$t > 0 \wedge t \in T \implies [0, t] \subseteq T$.*
4. *$t < 0 \wedge t \in T \implies [t, 0] \subseteq T$.*

Доказ.

1. Очигледно.
2. Очигледно.
3. Нека је $s \in [0, t]$ произвољан реалан број из интервала $[0, t]$. Важи

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{sX}] &= \mathbb{E}[e^{sX}\mathbf{1}_{X \geq 0}] + \mathbb{E}[e^{sX}\mathbf{1}_{X<0}] \\
&\leq \mathbb{E}[e^{tX}\mathbf{1}_{X \geq 0}] + P(X < 0) \\
&\leq M_X(t) + 1
\end{aligned}
$$

   одакле очито следи $\mathbb{E}[e^{sX}] < \infty$.

4. Слично као за $t > 0$.

□

Дакле, домен моментне генераторне функције је неки интервал који садржи нулу. Он не мора нужно бити нити затворен нити отворен, али овде нећемо давати примере за сваки од случаја.
Сада ћемо показати зашто се моментна генераторна функција уопште тако зове. Испоставља се да је она степени ред коме су коефицијенти моменти дате случајне променљиве.

Теорема 34. *Нека је X случајна променљива таква да је њена моментна генераторна функција $M_X(t)$ дефинисана за свако $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ за неки $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Важи*

1. *За сваки $k \in \mathbb{N}$ важи да је k-ти момент случајне променљиве X дефинисан, тј. $\mathbb{E}[X^k] \neq \pm\infty$.*
2. *За свако $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ важи*
$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} x^k.$$
3. *За свако $k \in \mathbb{N}$ важи*
$$M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k).$$

Доказ. Доказаћемо сва три тврђења одједном. За свако $t \in [0, \epsilon]$, важи

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} t^k].$$

Уколико би сума и очекивана вредност могли да замене места добили бисмо тражено. Међутим, да ли сума и очекивана вредност могу да замене места? Испоставља се да је то дозвољено кад сума апсолутних вредности сабирака има дефинисану очекивану вредност[2], тј. у овом случају $\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|X|^k}{k!} t^k] = \mathbb{E}[e^{t|X|}] < \infty$. То лако добијамо

$$e^{t|x|} \leq e^{tx} + e^{-tx} \implies \mathbb{E}[e^{t|X|}] \leq M_X(t) + M_X(-t) < \infty.$$

Одатле следи и $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$, па и $\mathbb{E}[X^k] < \infty$.
Дакле, важи

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^t X] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^k]}{k!} t^k.$$

одакле одмах следи и $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}[X^k]$. □

[2]Заправо се ради о специјалном случају Фубини-Тонелијеве теореме.

Сада ћемо доказати још неке особине моментне генераторне функције.

Теорема 35. *1. Нека је X случајна променљива. Важи*

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at).$$

2. Нека су $X_1, X_2, ..., X_n$ независне случајне променљиве. Важи

$$M_{X_1+X_2+...+X_n}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)...M_{X_n}(t).$$

Доказ. 1. Важи

$$M_{aX+b}(t) = \mathbb{E}[e^taX + b] = e^{bt}\mathbb{E}[e^{taX}] = e^{bt}M_X(at).$$

2. Важи

$$\begin{aligned} M_{X_1+X_2+...+X_n}(t) &= \mathbb{E}[e^{t(X_1+X_2+...+X_n)}] \\ &= \mathbb{E}[e^{tX_1}e^{tX_2}...e^{tX_n}] \\ &= \mathbb{E}[e^{tX_1}]\mathbb{E}[e^{tX_2}]...\mathbb{E}[e^{tX_n}] \\ &= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)...M_{X_n}(t). \end{aligned}$$

□

Навешћемо још две теореме, али без доказа, јер он превазилази оквире овог рада[3]. Оне ће бити кључне приликом доказа централне граничне теореме.

Теорема 36. *Нека су X и Y случајне променљиве такве да за неко $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ и свако $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ важи да су моментне генераторне функције $M_X(t)$ и $M_Y(t)$ дефинисане, као и $M_X(t) = M_Y(t)$. Тада X и Y имају исту функцију расподеле.*

Да бисмо навели другу теорему најпре нам је потребна следећа дефиниција.

Дефиниција 16. *Нека су X и $X_1, X_2, ...$ случајне променљиве и $F_X, F_{X_1}, F_{X_2}, ...$ њихове функције расподеле, редом. За сваки реалан број $x \in \mathbb{R}$ такав да је F_X непрекидна у x важи*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

Кажемо да низ случајно променљивих $X_1, X_2, ...$ конвергира по расподели у X и записујемо $X_n \xrightarrow{d} X$.

[3]Докази се могу пронаћи у [14].

Теорема 37. *Нека су* Y *и* $X_1, X_2, ...$ *случајне променљиве такве да за неко* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *важи да су моментне генераторне функције* $M_Y, M_{X_1}, M_{X_2}, ...$ *дефинисане на интервалу* $[-\epsilon, \epsilon]$*. Важи*

$$(\forall t \in [-\epsilon, \epsilon])(\lim_{n\to\infty} M_{X_n} = M_X) \implies X_n \xrightarrow{d} Y.$$

Сада ћемо навести пар примена моментних генераторних функција. Најпре, доказујемо већ споменуту централну граничну теорему.

Теорема 38 (Централна гранична теорема)**.** *Нека су* $X_1, X_2, ..$ *независне случајне променљиве из исте расподеле са очекивањем* μ *и варијансом* $\sigma^2 > 0$*. Нека је* $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$*. Важи*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

где је $N(0,1)$ *Гаусова нормална расподела са очекивањем* 0 *и варијансом* 1*.*

Доказ. Нека је M_n моментна генераторна функција случајне променљиве $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. Важи

$$\begin{aligned} M_n(t) &= \mathbb{E}(e^{\frac{t(S_n - n\mu)}{\sigma\sqrt{n}}}) \\ &= \mathbb{E}(e^{\frac{t(X_1-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}})\mathbb{E}(e^{\frac{t(X_2-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}})...\mathbb{E}(e^{\frac{t(X_n-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}}) \\ &= M_Y(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})^n \end{aligned}$$

где је M_Y моментна генераторна функција случајних променљивих $Y_1 = X_1 - \mu, Y_2 = X_2 - \mu, ...$
Моментну генераторну функцију M_Y можемо проценити Тејлоровим полиномом

$$\begin{aligned} M_Y(x) &= M_Y(0) + xM_Y'(0) + \frac{x^2}{2}M_Y''(0) + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{(x\sigma)^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Сада имамо

$$\begin{aligned} M_n(t) &= M_Y(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})^n \\ &= (1 + \frac{t^2}{2n} + o(\frac{t^2}{n}))^n \end{aligned}$$

што тежи $e^{\frac{t^2}{2}}$ кад $n \to \infty$. Како је $e^{\frac{t^2}{2}}$ моментна генераторна функција случајне променљиве из Гаусове нормалне расподеле, тиме смо доказали тражено. □

Помоћу моментних генераторних функција такође можемо побољшати оцене из Чебишовљевове неједнакости.

Пример 12. *Нека су* $X_1, X_2, ..$ *случајне променљиве које узимају вредност* $\pm\frac{1}{2}$ *са вероватноћом по* $\frac{1}{2}$. *Желимо да проценимо случајну променљиву* $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + ...$ *Из централне граничне теореме имамо*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\frac{S_n - n\mathbb{E}[X]}{var(X)\sqrt{n}} \in (A, B)) = \int_A^B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\
\Longrightarrow &\mathbb{P}(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in (A, B)) = \int_A^B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\
\Longrightarrow &\mathbb{P}(S_n \in (A\sqrt{n}, B\sqrt{n})) = \int_A^B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}$$

одакле очито следи да је S_n *најчешће реда* $\sqrt{n}$.
Дакле, за свако $c \in \mathbb{R}^+$ *врло ретко важи* $|S_n| > cn$. *Како можемо проценити колико ретко?*
Један метод је свакако Чебишовљевова неједнакост. Она нам даје следеће

$$\mathbb{P}(|S_n| > cn) \leq \frac{var(S_n)}{(cn)^2} = \frac{1}{c^2 n}.$$

Одатле се јасно види да тражена вероватноћа тежи нули кад $n \to \infty$. *Међутим, да ли можемо добити оцену која брже тежи нули?*
Уместо Чебишовљевове неједнакости, која представља Марковљеву неједнакост примењену на случајну променљиву $(X - \mathbb{E}[X])^2$, *примењујемо Марковљеву неједнакост на случајну променљиву* e^{tX} *и добијамо такву оцену*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n > cn) &= \mathbb{P}(e^{tS_n} > e^{tcn}) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}[e^{tS_n}]}{e^{tcn}} \\
&= (\frac{\mathbb{E}[tX_i]}{e^{tc}})^n \\
&= (\frac{\frac{e^t + e^{-t}}{2}}{e^{tc}})^n \\
&= (\frac{\cosh t}{e^{tc}})^n \\
&\leq (e^{\frac{t^2}{2} - tc})^n
\end{aligned}$$

где смо у последњем реду користили неједнакост $\cosh t \leq e^{\frac{t^2}{2}}$. *Добијена оцена важи за свако реално* t. *Диференцирањем добијамо да је минимум у*

$t = c$ и тад важи

$$\mathbb{P}(S_n > cn) \leq e^{\frac{-c^2 n}{2}}$$

што знатно брже тежи нули од претходно добијених $\frac{1}{c^2 n}$.

3 Још неке примене

На следећем познатом примеру је приказано колико се нека тврђења рутински доказују помоћу генераторних функција.

Пример 13. *Одредити збир првих n k-тих степенова.*

Доказ. Довољно је одредити генераторну функцију $F(x) = \sum_{r=0}^{n} r^k x^r$. На основу доказаних особина генераторних функција знамо да важи

$$F(x) = (xD)^k G(x)$$

где је $G(x) = \sum_{r=0}^{n} x^r = \frac{1-x^{r+1}}{1-x}$. Дакле, сума првих n k-тих степенова је $F(1)$ где је

$$F(x) = (xD)^k \frac{1-x^{r+1}}{1-x}$$

□

Пример 14. *Дат је природан број n такав да важи $(n, 210) = 1$. Посматрајмо уређене четворке (a, b, c, d) ненегативних бројева такве да им је збир n. Нека је S_n збир производа елемената тих четворки. Тада је S_n дељиво са n.*

Доказ. Посматрајмо обичну генераторну функцију која "носи" низ S_n. Очито важи следеће

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{a+b+c+d=n} abcd = (\sum_{n=0}^{\infty} nx^n)^4 = \frac{x^4}{(1-x)^8}.$$

Следи

$$S_n = \binom{n+3}{7} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{7!}$$

одакле јасно важи $n|S_n$. □

Следећи пример представља интересантну рекуренту формулу између броја партиција природних бројева, која потиче још од Ојлера. Он је пронашао и сличну рекурентну формулу за суму делилаца о којој се више може наћи у [4] где је тачно описан и начин на који је дошао до исте.

Пример 15. *Означимо са* $p(n)$ *број партиција целог броја* n*, тј. број решења једначине* $a_1 + 2a_2 + ... + ka_k + ... = n$ *у ненегативним целим бројевима. За свако* $n \in \mathbb{N}$ *важи*

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(p(n-(3k^2+k)/2) + p(n-(3k^2-k)/2).$$

Доказ. Најпре, пронађимо генераторну функцију која "носи" низ $p(n)$.

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + ...) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1}$$

Посматрајмо њен инверз $Q(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$. Означимо са $p_p(n)$ број партиција целог броја n на паран број различитих природних бројева. Аналаогно дефинишимо $p_n(n)$. Очито важи

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(p_p(k) - p_n(k))x^k.$$

Међутим, можемо ли пронаћи тачне вредности израза датих у коефицијентима? Следећа лема даје одговор.

Лема. *Нека је* $n \geq 0$*. Важи*

$$p_p(n) - p_n(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{ако } n = \frac{3k^2 \pm k}{2} \text{за неки ненегативан број цео број } k \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказ. С обзиром да се тврђење не доказује генераторним функцијама, нећемо овде наводити доказ. Он се може пронаћи у [8]. □

Дакле, важи

$$Q(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(x^{(3k^2+k)/2} + x^{(3k^2-k)/2})$$

те како је $Q(x)$ мултипликативни инверз $P(x)$ следи

$$(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n)(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(x^{(3k^2+k)/2} + x^{(3k^2-k)/2})) = 1$$

одакле добијамо тражено. □

Формалне генераторне функције могу да "носе" и низове чији чланови нису бројеви. Следећи пример приказује примену над низом полинома којом добијамо Њутнову везу између степених и елементарних симетричних полинома.

Пример 16. *Означимо степене и елементарне симетричне полиноме над* n *помењљивих на следећи начин*

$$p_k = \sum_{i=1}^{k} x_i^k$$

$$e_0 = 1 \quad \textit{ако} \quad k = 0$$

$$\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \quad \textit{ако} \quad 1 \le k \le n$$

$$e_k = 0 \quad \textit{ако} \quad k > n.$$

Важи

$$\sum_{k=1}^{k=N} (-1)^k p_k \sigma_{N-k} = N\sigma_N \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Доказ. Најпре одредимо одговарајуће генераторне функције. Лако се добија

$$\begin{aligned}
P(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{k+1} t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1} t^k \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} x_i^{k+1} t^k \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=0}^{\infty} (x_i t)^k \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - x_i t}
\end{aligned}$$

као и

$$\Sigma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k t^k = \prod_{k=1}^{n} (1 + x_i t).$$

Примећујемо да важи следеће

$$P(-t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 + x_i t} = D(L(\Sigma(t))) = \frac{D(\Sigma(t))}{\Sigma(t)}$$

тј.

$$P(-t)\Sigma(t) = D(\Sigma(t))$$

одакле поређењем коефицијената уз t^N добијамо тражено. □

Пример 17. *Дат је природан број n. Скуп природних бројева је подељен на n аритметичких прогресија са корацима d_i и почетком a_i. Важи*

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k} = 1.$
2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{d_k} = \frac{n-1}{2}.$

Доказ. Услов да датих n аритметичких прогресија покрива природне бројеве је очито еквивалентан са

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{a_i}}{1-x^{d_i}} = \frac{1}{1-x}.$$

Одатле добијамо

$$\sum_{k=1}^{n} x^{a_i} \frac{1-x}{1-x^{d_i}} = 1$$

тј.

$$\sum_{k=1}^{n} x^{a_i} \frac{1}{1+x+x^2+...+x^{d_i-1}} = 1 \quad (1).$$

За $x = 1$ се добија прва једнакост коју је требало доказати.
Диференцирањем (1) за $x = 1$ добијамо

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_i d_i - \frac{d_i(d_i-1)}{2}}{d_i^2} = 0$$

одакле помоћу прве једнакости добијамо тражено. □

Треба споменути да користећи горедобијене резултате могуће добити и следеће тврђење

$$\max(d_1, d_2, ..., d_n) < 2^{2^{n-1}}$$

чији доказ се може наћи у [6]. Такође је могуће доказати да постоје два различита $i, j \in [n]$ т.д. да $d_i = d_j$. Међутим, како су за доказ потребни комплексни степени редови, овде га нећемо наводити. Може се пронаћи у [7].

Користећи функцију генератрисе можемо доказати и постојање нерастављивог полинома произвољног степена над произвољним пољем $\mathbb{F}$ реда p где је p прост број. То је кључна чињеница приликом конструкције поља реда p^n за произвољан прост број p и природан број n.

Пример 18. *Нека је n природан број. Дато је поље $\mathbb{F}$ реда p где је p прост број. Постоји нерастављив полином степена n над тим пољем.*

Доказ. Покушајмо да пребројимо нерастављиве полиноме степена n над датим пољем. Нека је a_n њихов број. Потребно је показати $a_n > 0$.
С обзиром да желимо да одредимо низ a_n, било би добро да нађемо рекурентну везу између његових чланова. То није тешко учинити на следећи начин.
Бројимо моничне полиноме степена n. Њих очито има $N = p^n$. Са друге стране знамо да важи јединствена факторизација на нерастављиве чланове у прстену полинома над $\mathbb{F}$ јер је $\mathbb{F}$ поље. Можемо фиксирати број нерастављивих чланова сваког степена који деле дати полином и за сваки такав фиксиран облик полинома израчунати број полинома тог облика. На тај начин добијамо

$$\sum_{m_1+2m_2+3m_3+\ldots=n} \prod_{i\geq 1} \binom{a_i+m_i-1}{m_i} = p^n.$$

Тиме смо добили рекурентну везу низа a_n.
Како је добијена веза прилично сложена, не можемо директно из ње израчунати a_n, али можемо покушати следеће у нади да ћемо добити једноставнију рекурентну формулу

$$\begin{aligned}
(1-px)^{-1} &= \frac{1}{1-px} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p^k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{m_1+2m_2+3m_3+\ldots=k} \prod_{i\geq 1} \binom{a_i+m_i-1}{m_i} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m_1+2m_2+3m_3+\ldots=k} \prod_{i\geq 1} \binom{a_i+m_i-1}{m_i} x^{im_i} \\
&= \sum_{m_1,m_2,m_3,\ldots} \prod_{i\geq 1} \binom{a_i+m_i-1}{m_i} x^{im_i} \\
&= \prod_{i\geq 1} \sum_{m\geq 0} \binom{a_i+m-1}{m} x^{im} \\
&= \prod_{i\geq 1} \sum_{m\geq 0} (-x^i)^m \binom{-a_i}{m} \\
&= \prod_{i\geq 1} (1-x^i)^{-a_i}.
\end{aligned}$$

Логаритмовањем обе стране добијамо

$$L(1-px)=\sum_{k=1}^{\infty} a_i L(1-x^i).$$

По дефиницији логаритма важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(px)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{ik}}{k}$$

одакле изједначавањем коефицијената добијамо

$$\frac{p^n}{n} = \sum_{i|n} \frac{a_i}{\frac{n}{i}}$$

тј.

$$p^n = \sum_{i|n} i a_i.$$

И добили смо знатно једноставнију рекурентну формулу! Њу можемо још упростити Мебијусовом инверзијом[1]. Добијамо

$$na_n = \sum_{i|n} \mu(i) p^{\frac{n}{i}}$$

одакле јасно следи $a_n > 0$ с обзиром да $p^n > 1 + p + p^2 + ... + p^{n-1}$. $\square$

[1] Мебијусова инверзија је такође уско повезана са генераторним функцијама - Дирихлеовим редовима. О њима није било речи у овом раду, али се више може пронаћи у [1] где се може наћи и доказ Мебијусове инверзије.

Литература

[1] H. S. Wilf. *Generatingfunctionology*. 2006.

[2] I. Niven. *Formal Power Series*. 1969.

[3] M. Spivak. *Calculus*. 1967.

[4] G. Polya. *Induction and Analogy in Mathematics*. 1954.

[5] P. Soberon. *Problem-Solving Methods in Combinatorics*. 2013.

[6] T. Andreescu. G. Dospinescu. *Problems from the Book*. 2008.

[7] R. J. Simpson. *Covering the Integers with Arithmetic Progressions*. 1984.

[8] I. Niven. H. S. Zuckerman. H. L.Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. 1960.

[9] M. Новаковић. *Функције генератрисе*. 2004.

[10] P. J. Cameron. *Formal Power Series*. `http://www-groups.mcs.st-andrews.ac.uk/~pjc/Teaching/MT5821/1/l3.pdf`

[11] J. Martin. *Lecture notes for Prelims Probability*. `https://courses.maths.ox.ac.uk/node/view_material/45937`

[12] J. Martin. *Lecture notes for Part A Probability*. `https://courses.maths.ox.ac.uk/node/view_material/45738`

[13] P. Flajolet. R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. 2009.

[14] J. H. Curtiss. *A Note on the Theory of Moment Generating Functions*. 1942.

[15] R. Stanley. *Catalan Numbers*. 2015.