Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из математке -

Гаус-Бонеова теорема

Ученик:
Урош Свилар IVд

Ментор:
др Лука Милићевић

Београд, јун 2021.

Садржај

1

Увод

Диференцијална геометрија је математичка дисциплина која се бави геометријским својствима простора помоћу диференцијалног рачуна и линеарне алгебре.

У овом раду ћемо се бавити једном од најзначајнијих теорема у диференцијалној геометрији, Гаус-Бонеовој теореми. Она представља повезаност површи и њене закривљености, као и њене Ојлерове карактеристике, појмом из области топологије. Теорема је названа по немачком математичару Карл Фридрих Гаусу и француском математичару Пјер Осиан Бонеу. Гаус је развио једну верзију теореме али је није објавио, а Боне је објавио један специјални случај.

У овом раду ће најпре бити дефинисани потребни појмови из области диференцијалне геометрије, као што су Гаусова и геодезијска закривљеност и фундаменталне форме. Потом ћемо се упознати са тополошким појмом Ојлерова карактетристика. Затим ће бити исказана и доказана локална и глобална Гаус-Бонеова теорема. На крају ћемо представити пар специјалних случајева које нам помажу да разумемо широку примену и значај ове теореме.

2

Основни појмови

2.1 Појмови из диференцијалне геометрије

Дефиниција 2.1 Диференцијабилна крива у $\mathbb{R}^3$ је пресликавање $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, где I представља интервал $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Пресликавање α представљамо као $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ где су x, y и z диференцијабилне функције. Диференцијабилна крива у $\mathbb{R}^2$ се дефинише на исти начин.

Дефиниција 2.2 Глатко парче површи је диференцијално пресликавање $r : U \to \mathbb{R}^3$, где $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Тада $r(U)$ представља глатку површ у $\mathbb{R}^3$.

Дефиниција 2.3 Прва фундаментална форма је скаларни производ примењен на тангентном простору тачке $p \in \Sigma$.

Нека је $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ крива у $\mathbb{R}^2$, и нека је $\alpha = r \circ \gamma$ крива у $\Sigma \subset R^3$. Имамо:

$$\alpha(t) = r(u(t), v(t))$$

$$\alpha'(t) = r_u u'(t) + r_v v'(t)$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{r_u \cdot r_u (u')^2 + 2 r_u \cdot r_v (u')(v') + r_v \cdot r_v (v')^2}$$

Нека су E, F и G следеће функције*(коефицијенти прве фундаменталне форме)*

$$E = r_u \cdot r_u,$$

$$F = r_u \cdot r_v,$$

$$G = r_v \cdot r_v.$$

Узмимо сада два вектора $x = ar_u + br_v$ и $y = cr_u + dr_v$. Њихова прва фундаментална форма је једнака $(x, y) = Eac + F(ad + bc) + Gb^2$.
Израчунавањем можемо да добијемо да је $|r_u \times r_v| = \sqrt{EG - F^2}$.
Пример 2.1.1 Нека је $r(U)$ сфера полупречника a тј.

$$r(u, v) = (asin(u/a)cos(v), asin(u/a)sin(v), acos(u/a)).$$

Имамо да су коефицијенти прве фундаменталне форме

$$E = 1, F = 0, G = a^2sin^2(u/a).$$

Дефиниција 2.4 Друга фундаментална форма такође представља симетричну билинеарну форму на тангентном простору. Израз $Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2$ представља другу фундаменталну форму, где су L, M и N коефицијенти друге ф. форме.
Нека је $n(u, v)$ јединични вектор нормалан на $r(u, v)$. Тада су коефицијенти друге фундаменталне форме једнаки

$$L = -r_u \cdot n_u,$$

$$M = -\frac{1}{2}(r_u \cdot n_v + r_v \cdot n_u),$$

$$N = -r_v \cdot n_v.$$

Пример 2.1.2 Узмимо поново сферу полупречника a. Тада су коефицијенти друге фундаменталне форме једнаки

$$L = -1/a, M = 0, N = -asin^2(u/a).$$

Дефиниција 2.5 Гаусова закривљеност површи $r(U)$ у тачки (u, v) је једнака $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$, где су E, F, G, L, M и N коефицијенти прве и друге фундаменталне форме у тангентном простору тачке $(u, v) \subseteq U$.

Пример 2.1.3 Искористимо резултате из прва два примера. Добијамо да је Гаусова закривљеност сфере полупречника a једнака

$$K = \frac{(-1/a)(-asin^2(u/a))}{a^2sin^2(u/a)} = \frac{1}{a^2}.$$

Дефиниција 2.6 Нека је S^2 сфера полупречника 1, и нека је $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ крива таква да $\alpha(I) \subset S^2$. Тада је геодезијска закривљеност у тачки s једнака

$$k_g = (\alpha(s) \times \alpha'(s)) \cdot \alpha''(s).$$

2.2 Ојлерова карактеристика

Дефиниција 2.2.1 Нека је Σ компактна глатка површина. Нека су $\Sigma_1, \Sigma_2 ... \Sigma_n$ дисјунктне компактне површи такве да $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup ... \cup \Sigma_n = \Sigma$. Тада дефинишемо области као наведене површи, ивице као заједничке криве тих површи и темена као заједничке тачке ивица. Овај процес називамо поделом.

Дефиниција 2.2.2 Нека је над компактном глатком површином Σ извршена подела са V темена, E ивица и F области. Ојлерова карактеристика површи Σ је $\chi(\Sigma) = V - E + F$.

Наведимо неке вредности Ојлерове карактеристике.

Тривијално, свака дуж има 2 темена, 1 ивицу и 0 области па је χ дужи једнака 1.

χ сфере је једнака 2. Имамо више различитих могућих подела сфере, једна од њих је на 4 темена, 6 ивица и 4 области. Ако посматрамо неку поделу сфере, њу можемо да посматрамо као конвексан полиедар са кривим странама и ивицама, што значи да и сваки конвексан полиедар има χ једнако 2. Лако се може закључити да је χ тела са n шупљина једнака $2-2n$, нпр. χ торуса је 0.

3

Гаус-Бонеова теорема

Најпре ћемо представити локалну Гаус-Бонеову теорему:
Теорема 3.1 (Гаус-Боне, локална) Нека је $r : U \to \Sigma$ глатко парче компактне површи $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ и нека је $\alpha : I \to \Sigma$ изломљена глатка затворена крива у Σ, што значи да је $\alpha(I)$ криволинијски многоугао. Нека он обухвата површ $R \subset \Sigma$ и има n унутрашњих углова $\theta_1, \theta_2 ... \theta_n$(унутрашњи углови овде представљају углове између тангенти кривих у теменима многоугла). Даље, нека је K Гаусова закривљеност површи Σ и нека је k_g геодезијска закривљеност криве α. Тада је:

$$\int_R K \, dA = (2-n)\pi - \int_\alpha k_g \, ds + \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

Глобална теорема предстаља теорему примењену на целу површ Σ.
Теорема 3.2 (Гаус-Боне, глобална) Нека је Σ компактна површ са Гаусовом закривљеношћу K. Тада је:

$$\int_\Sigma K \, dA = 2\pi\chi(\Sigma)$$

4

Доказ Гаус-Бонеове теореме

4.1 Доказ локалне Гаус-Бонеове теореме

У доказу локалне теореме ћемо користити познату Гринову теорему.

Теорема 4.1 (Грин) Нека је $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ изломљена глатка затворена крива $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, која ограничава површину $S \subset \mathbb{R}^2$, и нека су P и Q глатке функције $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Тада важи:

$$\int_\alpha P\frac{du}{dt} + Q\frac{dv}{dt}\,dt = \int_S Q_u - P_v\,dudv$$

Доказ локалне Гаус-Бонеове теореме: Нека је α глатка затворена крива која припада парчету $r(U)$ неке површи Σ и која затвара површину R. Први корак је да помоћу Грам-Шмитовог поступка ортонормализације нађемо базу вектора $\{e_1, e_2\}$ који су међусобно нормални, за тангентни простор сваке тачке, почевши од базе $\{r_u, r_v\}$. У поступку користимо коефицијенте прве фундаменталне форме.

$$e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}}$$

Овиме смо постигли да e_1 има дужину 1.

$$e_1 \cdot r_v = \frac{F}{\sqrt{E}}$$

Да би e_2 било нормално на e_1 одузимамо пројекцију вектора r_v на e_1 од r_v.

$$r_v - (e_1 \cdot r_v)e_1 = r_v - \frac{Fr_u}{E}$$

Након тога нам остаје још да дефинишемо e_2 тако да има дужину 1.

$$|r_v - \frac{Fr_u}{E}| = \sqrt{G - \frac{F^2}{E}}$$

$$e_2 = \frac{r_v - \frac{Fr_u}{E}}{\sqrt{G - \frac{F^2}{E}}}$$

Овиме смо добили тражену базу $\{e_1, e_2\}$. Даље, нека је $\beta : I \to U$ крива коју пресликавање r слика у α, тако да је $r(\beta(s)) = \alpha(s)$, за свако $s \in I$. Посматрајмо следећи интеграл:

$$I = \int_\beta e_1 \cdot e_2' \, ds$$

Наш циљ је да израчунамо овај интеграл на два различита начина. Један од начина је помоћу Гринове теореме:

$$I = \int_\beta e_1 \cdot (e_{2u}u' + e_{2v}v') \, ds$$

$$I = \int_\beta Pu' + Qv' \, ds$$

Овде смо заменили $P = e_1 \cdot e_{2u}$ и $Q = e_1 \cdot e_{2v}$. Сада на основу Гринове теореме имамо:

$$I = \int_{r^{-1}(R)} Q_u - P_v \, dudv$$

Потребно је израчунати $Q_u - P_v$. Имамо $Q_u = e_{1u} \cdot e_{2v} + e_1 \cdot e_{2uv}$ и $P_v = e_{1v} \cdot e_{2u} + e_1 \cdot e_{2uv}$, па следи $Q_u - P_v = e_{1u} \cdot e_{2v} - e_{1v} \cdot e_{2u}$. Сада ћемо увести нормалан јединични вектор:

$$n = e_1 \times e_2$$

Доказаћемо да је $Q_u - P_v$ једнако $n \cdot (n_u \times n_v)$. Имамо:

$$n \cdot (n_u \times n_v) = (e_1 \times e_2) \cdot (n_u \times n_v) = (e_1 \cdot n_u)(e_2 \cdot n_v) - (e_1 \cdot n_v)(e_2 \cdot n_u)$$

Пошто су вектори n и e_1 међусобно нормални имамо $e_1 \cdot n_u = -e_{1u} \cdot n$, а слично добијамо и за остале комбинације. Следи:

$$n \cdot (n_u \times n_v) = (e_{1u} \cdot n)(e_{2v} \cdot n) - (e_{1v} \cdot n)(e_{2u} \cdot n)$$

Даље, ако у већ добијено $Q_u - P_v = e_{1u} \cdot e_{2v} - e_{1v} \cdot e_{2u}$ заменимо e_{1u} (слично и остале изводе) као $e_{1u} = (e_{1u} \cdot e_2)e_2 + (e_{1u} \cdot n)n$ (могуће јер $\{e_1, e_2, n\}$ чине базу међусобно нормалних вектора), добијамо:

$$Q_u - P_v = ((e_{1u} \cdot e_2)e_2 + (e_{1u} \cdot n)n) \cdot ((e_{2v} \cdot e_1)e_1 + (e_{2v} \cdot n)n) -$$

$$((e_{1v} \cdot e_2)e_2 + (e_{1v} \cdot n)n) \cdot ((e_{2u} \cdot e_1)e_1 + (e_{2u} \cdot n)n)$$

Сви чланови облика $(\alpha a) \cdot (\beta b)$ $(a \neq b,\ \{a, b\} \subset \{e_1, e_2, n\})$ су једнаки нули па остаје:

$$Q_u - P_v = (e_{1u} \cdot n)n \cdot (e_{2v} \cdot n)n - (e_{1v} \cdot n)n \cdot (e_{2u} \cdot n)n$$

$$Q_u - P_v = (e_{1u} \cdot n)(e_{2v} \cdot n) - (e_{1v} \cdot n)(e_{2u} \cdot n)$$

$$Q_u - P_v = n \cdot (n_u \times n_v)$$

Јединични вектор смо могли да уведемо и помоћу r_u и r_v. Тада имамо:

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

$$n \cdot (n_u \times n_v) = \frac{(r_u \times r_v) \cdot (n_u \times n_v)}{|r_u \times r_v|} = \frac{(r_u \cdot n_u)(r_v \cdot n_v) - (r_u \cdot n_v)(r_v \cdot n_u)}{|r_u \times r_v|}$$

Последњи израз представљамо преко коефицијената прве и друге фундаменталне форме као

$$n \cdot (n_u \times n_v) = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Из овога следи

$$Q_u - P_v = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}} = K\sqrt{EG - F^2}.$$

Вратимо се на наш интеграл. Замењујући $Q_u - P_v$ са $K\sqrt{EG - F^2}$ добијамо

$$I = \int_{r^{-1}(R)} K\sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Из чега следи

$$I = \int_R K\, dA.$$

Овиме смо добили леву страну једнакости теореме.
Сада ћемо интеграл $I = \int_\beta e_1 \cdot e_2' \, ds$ решити тако што ћемо наћи вредности e_1 и

e_2 у свакој тачки криве β. Нека је $\delta(s)$ угао између $\alpha'(s)$ и вектора e_1 у тачки $\alpha(s)$. Имамо:

$$\alpha'(s) = |\alpha'(s)|(\cos(\delta)e_1 + \sin(\delta)e_2) = \cos(\delta)e_1 + \sin(\delta)e_2$$

$$\alpha''(s) = e_1' \cos(\delta) - e_1 \sin(\delta)\delta' + e_2' \sin(\delta) + e_2 \cos(\delta)\delta'$$

Нека је $\eta = n \times \alpha'$. Како је $n \times \alpha' = -\sin(\delta)e_1 + \cos(\delta)e_2$ имамо:

$$\alpha'' = \delta'\eta + e_1' \cos(\delta) + e_2' \sin(\delta)$$

Сада следи:

$$k_g = \alpha'' \cdot \eta = \delta'|\eta|^2 + (e_1' \cos(\delta) + e_2' \sin(\delta)) \cdot \eta$$

$$k_g = \delta' + (e_1' \cos(\delta) + e_2' \sin(\delta)) \cdot (-\sin(\delta)e_1 + \cos(\delta)e_2)$$

$$k_g = \delta' - \sin^2\delta(e_1 \cdot e_2') - \sin\delta\cos\delta(e_1 \cdot e_1') + \cos^2\delta(e_2 \cdot e_1') + \sin\delta\cos\delta(e_2 \cdot e_2')$$

Пошто је $e_1 \cdot e_1' = 0$ и $e_2 \cdot e_2' = 0$ следи:

$$k_g = \delta' + \cos^2\delta(e_2 \cdot e_1') - \sin^2\delta(e_1 \cdot e_2')$$

Из $e_1 \cdot e_2 = 0$ добијамо $e_1' \cdot e_2 = -e_1 \cdot e_2'$ па је:

$$k_g = \delta' - e_1 \cdot e_2'$$

Сада ако се вратимо на наш интеграл имамо:

$$I = \int_\beta e_1 \cdot e_2' \, ds = \int_\beta \delta'(s) - k_g \, ds$$

$$I = \int_\beta \delta'(s) \, ds - \int_\alpha k_g \, ds$$

Пошто је наша затворена крива изломљена нећемо имати $\int_\beta \delta'(s) \, ds = 2\pi$, већ:

$$\int_\beta \delta'(s) \, ds = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i$$

где су ϑ_i спољашњи углови многоугла $\alpha(I)$. Из $\theta_i = \pi - \vartheta_i$ следи:

$$\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i = n\pi - \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

па је:

$$\int_{\beta} \delta'(s)\, ds = (2-n)\pi + \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

Све заједно добијамо:

$$I = (2-n)\pi - \int_{\alpha} k_g\, ds + \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

па смо добили и десну страну једнакости из чега следи тврђење теореме:

$$\int_{R} K\, dA = (2-n)\pi - \int_{\alpha} k_g\, ds + \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

□

4.2 Доказ глобалне Гаус-Бонеове теореме

Остало нам је да докажемо глобалну Гаус-Бонеову теорему.

Доказ глобалне Гаус-Бонеове теореме: Поделимо Σ на криволинијске многоуглове P_j, за које важи $P_j \subset r_j(U_j)$, за неке глатке делове површи $r_j : U_j \to \Sigma$. Идеја је да сумирамо једнакости добијене коришћењем локалне Гаус-Бонеове теореме за сваки многоугао.

Сума Гаусових закривљености је:

$$\sum_j \int_{P_j} K\, dA = \int_{\Sigma} K\, dA$$

Нека многоугао P_j има n_j страница. Приметимо да j узима F вредности и да је сума свих n_j једнака $2E$, јер се свака ивица броји у два многоугла. Тада је:

$$\sum_j (2-n_j)\pi = 2\pi F - 2\pi E$$

Када сумирамо $\int k_g\, ds$ добијамо 0, јер се свака крива појављује у суми два пута, са супротним оријентацијама, поништавајући саму себе.

Када сумирамо суме углова добијамо:

$$\sum_j \sum_i \theta_{ij} = 2\pi V$$

Дакле, када све спојимо добијамо:

$$\int_\Sigma K\,dA = 2\pi F - 2\pi E + 0 + 2\pi V$$

Како је Ојлерова карактеристика једнака $F - E + V$ имамо:

$$\int_\Sigma K\,dA = 2\pi\chi(\Sigma)$$

Овиме је доказ завршен.

$\square$

5

Специјални случајеви

5.1 Специјални случај равни

Сада кад смо доказали Гаус-Бонеову теорему, хајде да видимо како би изгледала у случају да $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$. Како је Гаусова закривљеност равни једнака нули, имамо

$$\int_\alpha k_g \, ds = (2-n)\pi + \sum_{i=1}^{n} \theta_i.$$

тј. користећи спољашњи угао ϑ_i као у доказу теореме

$$\int_\alpha k_g \, ds + \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i = 2\pi.$$

Показали смо да геодезијска закривљеност представља извод угла ϕ између тангентног вектора α' криве α и x-осе тј

$$k_g(t) = \phi'(t).$$

Нека су $t_i \in I$, $i = 1, 2, ...n$, вредности параметра t у којима су темена криволинијског многоугла $\alpha(I)$. Имамо да за сваку страну овог многоугла важи

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(t) \, ds = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi'(t) \, ds = \lim_{t \to t_{i+1}^-} \phi(t) - \lim_{t \to t_i^+} \phi(t).$$

Када сумирамо цео многоугао добијамо

$$\int_\alpha k_g \, ds = \lim_{t \to t_1^-} \phi(t) - \lim_{t \to t_n^+} \phi(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \lim_{t \to t_{i+1}^-} \phi(t) - \lim_{t \to t_i^+} \phi(t).$$

С друге стране, знамо да је

$$\vartheta_i = \lim_{t \to t_i^+} \phi(t) - \lim_{t \to t_i^-} \phi(t).$$

Пошто је у једноставној затвореној криви тотална промена угла ϕ једнака 2π имамо да је све заједно

$$\int_\alpha k_g \, ds + \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i = 2\pi.$$

Овиме смо показали специјалан случај равни.
У случају да α није једноставна затворена крива, него нпр. да има једну пресечну тачку са самом собом (”осмица”), тада би тотална промена угла ϕ била једнака нули и било би

$$\int_\alpha k_g \, ds + \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i = 0.$$

5.2 Специјални случај сфере

У овом случају је занимљиво размотрити површину троугла на сфери. Такође, знамо да је геодезијска закривљеност сфере једнака нули што нам веома поједностављује теорему. Уз још $n = 3$ добијамо

$$\pi + \int_R K \, dA = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3.$$

Гаусова закривљеност на сфери је константна и износи $1/r^2$, где је r полупречник сфере. Одатле следи

$$\int_R K \, dA = \frac{1}{r^2} P,$$

где је P површина геодезијског троугла.
Из овога добијамо да је површина геодезијског троугла једнака

$$P = r^2(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi).$$

6

Закључак

У овом раду смо дефинисали диференцијабилну криву, глатко парче поврсрхи, прву и другу фундаменталну форму, Гаусову и геодезијску закривљеност, а потом и поделу површи и Ојлерову карактеристику. Затим смо представили и доказали Гаус-Бонеову теорему. На крају смо бацили поглед на два специјална случаја. У првом смо доказали теорему у случају када је површ планарна, а у другом смо израчунали површину сферног троугла.

Желео бих да се захвалим ментору Луки Милићевићу на пруженој помоћи.

Литература

[1] Mark Powell, Introduction to Differentiable Geometry, 2014. https://maths.dur.ac.uk/users/mark.a.powell/DiffGeomCurvesSurfaces.html

[2] Manfredo P. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, 1976. http://www2.ing.unipi.it/griff/files/dC.pdf

[3] Peter Petersen, Classical Differential Geometry, 1998.

[4] Yan-Bin Jia, Gaussian and Mean Curvatures, 2020.