Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

- из математике -

Хиперболичка геометрија

Ученик:
Синиша Јанковић IVб

Ментор:
Војислав Пантић

Београд, јун 2021.

Садржај

1 Увод

1.1 Еуклидови „Елементи”

Потреба за изучавањем геометрије јавља се још у најранијим људским заједницама. Само порекло речи (на старогрчком *geo*-земља, *metron*-мерити) указује на то да је геометрија у својим почетним облицима представљала просто обављање разних мерења, неопходних за поделу територије, изградњу кућа и решавање осталих проблема практичне природе. Прве назнаке разумевања особина геометријских облика везују се за древне цивилизације Вавилона и Египта. На основу сачуваних списа, сматра се да је у овом стадијуму геометрија представљала емпиријску науку, скуп правила која су служила за израчунавања дужина, површина или запремина.

Најстарији примери дедуктивног извођења ових правила јављају се у старој Грчкој. Неки од првих доказа везују се за име филозофа **Талеса из Милета**, који је живео у 7. и 6. веку пре нове ере. Његовим путем наставља и **Питагора са острва Самоса** (6. век пре нове ере), коме се приписује оснивање школе **Питагорејаца**. Ова организација се састојала од пробраних филозофа и математичара тог времена, а њихова учења дуго су била обавијена велом тајне и чувана од шире јавности.

Услед убрзаног развоја геометрије, јавио се проблем систематизације и организације знања. *Елементи* **Хипократа са Хиоса** (5. век пре нове ере), јесу први покушај да се геометрија тог времена обједини и представи у једној књизи. Наслов *Елементи* јесте латински превод старогрчке речи и означава дедуктивно засновану геометрију. Нажалост, велика већина овог дела данас је изгубљена, те се не може много говорити о његовој важности.

Нама најзначајније дело из овог времена свакако су **Еуклидови** *Елементи*. Еуклид, математичар из Александрије, живео је између 350. и 250. године пре нове ере. У својим *Елементима*, који су се састојали од тринаест томова, поставио је основне ставове геометрије и обезбедио њено чврсто аксиоматско заснивање. Поред тога, *Елементи* су написани тако да формирају „логички ланац”, односно свако тврђење може се извести на основу претходно наведених тврђења. О значају овог дела довољно говори чињеница да је оно све до 19. века представљало основно штиво у изучавању геометрије.

Седми, осми, девети и десети том *Елемената* посвећени су теорији пропорција и аритметици (у геометријској форми), док су остали чисто геометријски. Сваки том почиње дефиницијама појмова којима ће се касније оперисати. На почетку прве књиге налазе се двадесет и три дефиниције од којих ћемо неке навести:

I – *Тачка је оно што нема делова.*

II – *Линија је дужина без ширине.*

III – *Крајеви линије су тачке.*

IV – *Права је линија која има исти положај у односу на све своје тачке.*

V – *Површина је оно што има само дужину и ширину.*

VI – *Границе површине су линије.*

VII– *Раван је површина која има исти положај у односу на све праве које леже у њој.*
VIII – *Угао у равни је је узајамни нагиб двеју линија у равни које се секу и које не леже на истој правој.*
X – *Ако права, која стоји на другој правој, образује са овом два суседна једнака угла, сваки од њих је прав, а подигнута права зове се нормална на оној на којој стоји.*
XI – *Туп угао је онај који је већи од правог.*
XII – *Оштар угао је онај који је мањи од правог.*
XIII – *Граница је оно што је крај ма чега.*
XIX – *Праволинијске фигуре су оне које су ограничене правама; тростране су ограничене са три, четворостране са четири, а многостране са више од четири праве.*
XXIII – *Паралелне су оне праве које се налазе у равни и које се продужене у бескрајност са обе стране не секу једна са другом.*

Јасно је да са становишта савремене математике, ове дефиниције не могу представљати ништа озбиљније до пуке илустрације датих појмова. Саме формулације нису довољно прецизне и захтевају разумевање израза попут „дужина”, који нису дефинисани. Међутим, у Еуклидово време, овако систематичан приступ био је револуционаран и послужио је као модел за све будуће искораке у овом смеру.

После дефиниција Еуклид наводи постулате и аксиоме, односно тврђења која се усвајају без доказа.

Постулати:

I – *Захтева се да се од сваке тачке до било које друге тачке може повући права линија.*
II – *И да се свака права може неограничено продужити.*
III – *И да се из произвољног средишта може произвољним полупречником описати круг.*
IV – *И да су сви прави углови једнаки.*
V – *И да увек када права, секући се са другим двема правима, са овима на истој страни гради унутрашње углове чији је збир мањи од два права угла, ове се праве секу са стране где је тај збир мањи од два права угла.*

Аксиоме:

I – *Величине једнаке свака понаособ трећој, једнаке су међу собом.*
II – *И ако једнаким додамо једнаке, добићемо једнаке.*
III – *И ако од једнаких одузимамо једнаке, добићемо једнаке.*
IV – *И ако неједнаким додамо једнаке, добићемо неједнаке.*
V – *И ако удвостручимо једнаке добићемо једнаке.*
VI – *И половине једнаких, једнаке су међу собом.*
VII – *И оне које се поклапају једнаке су.*
VIII – *И цело је веће од дела.*
IX – *И две праве не могу затварати простор.*

Као што можемо да видимо, аксиоме нису све нужно геометријске природе. За неке од њих (IV, V, VI и IX) сумња се да уопште припадају Еуклиду. У неким каснијим издањима *Елемената* четврти и пети постулат се убрајају у аксиоме, па се стога пети постулат може некада назвати једанаестим аксиомом.

Са друге стране, постулати представљају основне особине геометријског простора који познајемо. Прва три су изразито битна јер обезбеђују чврсту подлогу теорији геометријских конструкција. Приметно је и одступање у сложености код формулације петог постулата. Његова комплексност вековима је наводила математичаре да га одбацују као основни став. Како ћемо касније утврдити, управо у петом постулату огледа се генијалност Еуклида и логичка одрживост његове геометрије. Препознавши важност овог става, Еуклид је будућим генерацијама математичара оставио изузетно тежак проблем који ће на своје решење чекати готово два миленијума.

1.2 Проблем петог постулата

Да ли је пети постулат непоходно уврстити у полазна тврђења да би Еуклидова геометрија задржала свој облик? Чини се да ни сам Еуклид није могао са сигурношћу да одговори на ово питање. Наиме, првих двадесет и осам ставова *Елемената* се уопште не позивају на пети постулат. Може бити да је Еуклид намерно одлагао његову употребу не би ли покушао да развије геометрију на основу прва четири постулата.

Током наредних векова уследили су безбројни покушаји да се пети постулат докаже. Већина ових „доказа” настојала је да га сведе на еквивалентно тврђење за које би се испоставило да је истинито због своје „очигледности”. Управо овим позивањем на интуитивно разумевање геометријског простора губи се исправност доказа. Математичка дедукција не дозвољава оваква одступања.

Ипак, покушаји да се пети постулат докаже нису били потпуно узалудни. Вишевековни рад на овом проблему произвео је читав низ његових логичких еквивалената, који су и данас од великог значаја. Сада ћемо навести неке од њих.

Занимљив је рад **Ђованија Сакерија (G. Sacheri 1667–1733)** на ову тему. У свом делу *Еуклид, очишћен свих мрља* Сакери покушава да докаже пети постулат индиректним путем. Наиме, он посматра четвороугао $AA'B'B$ који има два права угла на основици AB и чије су странице AA' и BB' једнаке. Из симетрије ове фигуре добија се да углови у теменима A' и B' морају бити међусобно једнаки. Када би се испоставило да су они једнаки $\frac{\pi}{2}$, добили бисмо тврђење еквивалентно петом постулату и сам проблем би био решен. Сакери претпоставља супротно и своди задатак на два могућа случаја; угао је или туп или оштар. Хипотезу тупог угла успева да потпуно исправно доведе до контрадикције, међутим, хипотеза оштрог угла му задаје велике потешкоће. У покушају да дође до противуречности, он изводи читав низ наизглед апсурдних тврђења и развија комплексан геометријски систем. На крају успева да пронађе „противуречност” ослањајући се на чињеницу да се нека од изведених тврђења, према његовим речима, косе са „природом праве”. Да би додатно потврдио свој резултат, он рачуна дужину неке дужи на два начина и добија различите вредности, што износи као финални аргумент. Међутим, до овога је дошао направивши грешку у рачуну, те његов доказ остаје некомплетан. Упркос томе, Секаријев рад на хипотези оштрог угла је веома значајан јер показује прве назнаке правог одговора на питање петог постулата.

Швајцарски математичар **Јохан Хајнрих Ламберт (J. H. Lambert 1728–1777)** 1766. године објављује дело под називом *Теорија паралелних линија* где подобно анализира проблем петог постулата. Као и Сакери, и он полази од еквивалентног тврђења. Ламберт посматра четвороугао $ABCD$ који има три права угла у теменима A, B и C и покушава да докаже да је угао у тачки D такође прав. Слично Сакерију, претпостављајући супротно, и он своди проблем на две могућности. Исправним поступком се решава хипотезе тупог угла, али наилази на компликације у другом случају. Ламберт се посвећује даљем развијању ове претпоставке, међутим не успева да пронађе противуречност. За разлику од својих претходника, он као да предосећа праву природу овог проблема, примећујући неку врсту аналогије са сферном геометријом. „Склон сам чак да поверујем да је ова хипотеза тачна на некаквој имагинарној сфери. Мора постојати узрок услед кога се она у равни ни издалека не може оборити онако лако како се то може учинити са хипотезом тупог угла.”, пише Ламберт.

Године 1794. француски математичар **Адријен-Мари Лежандр (Adrien-Marie Legendre 1752–1833)** објављује *Елементе геометрије*, прво дело те врсте које се структурно разликовало од Еуклидовог. Овај уџбеник садржао је доказ петог постулата, који је у каснијим издањима више пута мењан и надограђиван. Ниједна верзија доказа није била тачна, али Лежандров приступ проблему је умногоме допринео разумевању овог проблема. Наиме, он се бавио успостављањем везе између петог постулата и збира унутрашњих углова у троуглу. Лежандрови ставови гласе:

I – *Збир углова било ког троугла није већи од* π.

II – *Ако постоји троугао код кога је збир углова једнак* π, *онда је збир углова сваког троугла једнак* π.

III – *Ако постоји оштар угао такав да нормала подигнута у ма којој тачки његовог крака сече други крак, пети постулат важи.*

IV – *Постоји троугао коме је збир унутрашњих углова* π *ако и само ако за сваку тачку* B *и праву* a *која је не садржи, у њима одређеној равни постоји највише једна права* b *која садржи* B *и нема заједничких тачака са* a.

Четврта теорема представља еквиваленцију између постојања троугла са сумом углова π и тврђења познатијег као **Плејферова аксиома (John Playfair 1748–1819)**. Ова аксиома је заправо још један чувени еквивалент петог постулата. На тај начин, Лежандр га директно повезује са збиром углова у троуглу.

Први став је доказан потпуно независно од петог постулата, и важи само на основу прва четири.

1.3 Геометрија Лобачевског

Почетком деветнаестог века долази до великог обрта у потрази за доказом петог постулата. До решења ове вишевековне загонетке долази руски математичар **Николај Иванович Лобачевски (Николай Иванович Лобачевский 1792–1856)**. Он први јасно износи став да се пети постулат не може извести из прва четири. Свој рад на овом проблему Лобачевски започиње на сличан начин као и његови претходници. У циљу да докаже пети постулат, он полази од раније поменуте Плејферове аксиоме:

Плејферова аксиома. *За сваку праву и тачку ван ње, у равни њима одређеној, постоји највише једна права која пролази кроз ту тачку и дисјунктна је са том правом.*

Лобачевски претпоставља супротно, да постоје бар две такве праве, и развија нови систем у потрази за контрадикцијом. Међутим, након извођења читавог низа тврђења, он почиње да схвата да противуречност заправо не мора постојати. Даљим формулисањем својих теорема, Лобачевски установљава да је открио потпуно нову геометрију (којој даје назив „имагинарна геометрија”) која, као и Еуклидова, представља логички одржив систем. Иако не успева потпуно да докаже конзистентност своје геометрије, он врши алгебарску анализу њених основних једначина и тиме пружа релативно задовољавајући одговор. Нешто касније, француском математичару **Анрију Поенкареу (Henri Poincaré 1854–1912)** полази за руком да коначно покаже ову непротивуречност. Детаљи тог поступка биће приказани у наредним поглављима.

Дакле, у геометрији Лобачевског пети постулат не важи, већ је замењен својом негацијом. Чињеница да добијени систем не садржи контрадикцију директно показује да је овај став неопходан за дефинисање еуклидске геометрије.

Мали је број савременика Лобачевског који су заиста схватили значај овог открића. Треба напоменути да су до сличних резултата дошли, независно један од другог, мађарски математичар **Јанош Бољај (János Bolyai 1802–1860)** и чувени немачки математичар **Карл Фридрих Гаус (Carl Friedrich Gauß 1777–1855)**. Бољај је своје радове објавио три године након Лобачевског и, као и Рус, наишао на скептицизам у јавности, док се Гаус уздржавао публикација јер је сматрао да га нико неће разумети.

Како ћемо видети у наредним поглављима, геометрија Лобачевског (тј. хиперболичка геометрија, како се данас често назива) у многоме се разликује од еуклидске. Неки појмови, попут праве или троугла, добијају наизглед апсурдан облик који се коси са уобичајеним схватањем простора. Важно је разумети да је, упркос чињеници да нам је еуклидска геометрија ближа и лакша за разумевање, геометрија Лобачевског једнако тачна и постојана. Њен највећи значај је управо у том искораку у апстрактна изучавања, који је нужан за напредак у свакој науци.

2 Основни ставови хиперболичке геометрије

2.1 Апсолутна геометрија

Под апсолутном геометријом сматрамо систем заснован искључиво на прва четири Еуклидова постулата. Термин апсолутна геометрија потиче од Јаноша Бољаја. Као што смо имали прилике да видимо у претходном поглављу, изузимањем петог постулата могуће је развити комплексан скуп геометријских тврђења која су тачна и у еуклидској и у хиперболичкој геометрији. Примера ради, Лежандров први став изведен је без коришћења петог постулата, те се он сматра истинитим у апослутној геометрији.

Аксиоме апсолутне геометрије представљају основу и еуклидске и хиперболичке геометрије. Подељене су у четири групе: аксиоме инциденције, распореда, подударности и непрекидности. Овде их нећемо износити, већ ћемо се ослонти на њихову формулацију у наведеној литератури (видети [4] стр. 25).

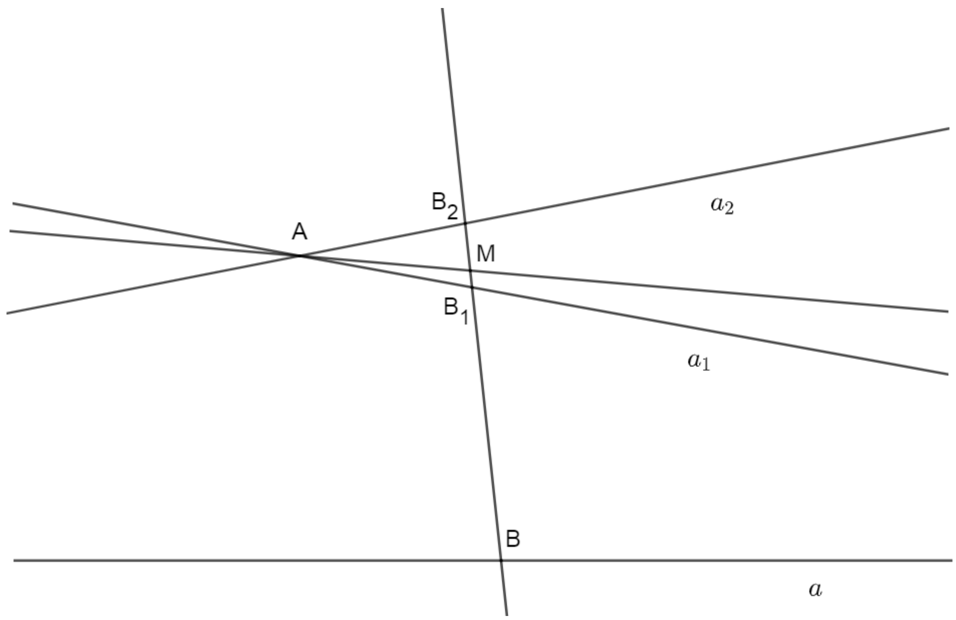
2.2 Аксиома Лобачевског и полазна тврђења

Аксиома VL. *Постоје права a и тачка A која јој не припада, такве да у њима одређеној равни постоје бар две праве које садрже тачку A и са правом a немају заједничких тачака.*

У наше испитивање хиперболичке геометрије полазимо управо од ове аксиоме, познате као **аксиома Лобачевског**. Заједно са прва четири постулата она чини основу овог система. Иако аксиома **VL** сама по себи заиста представља негацију Плејферове аксиоме, оно што је за нас битније јесте да повлачи следеће, јаче тврђење:

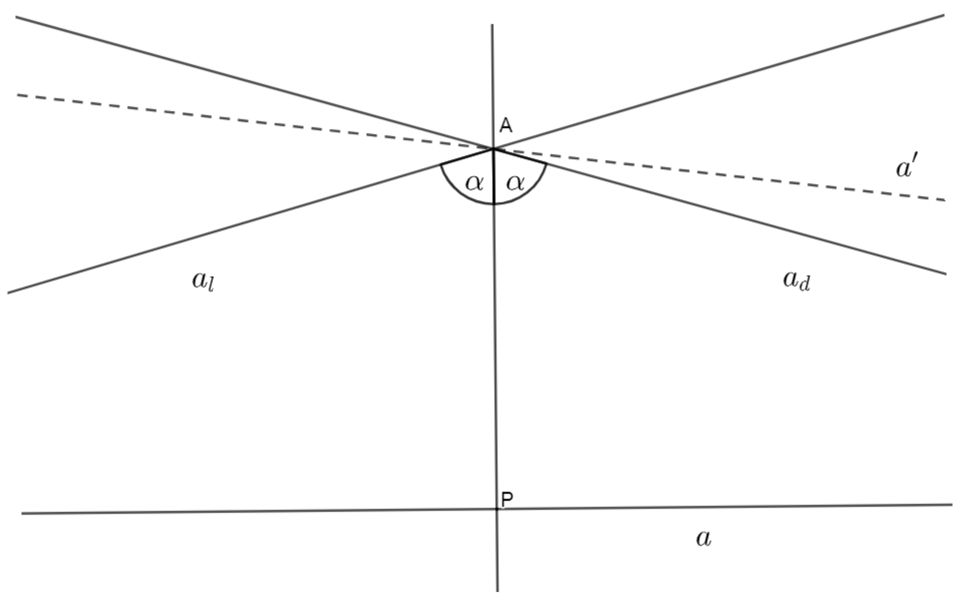
Теорема 2.2.1. *За сваку праву a и тачку A ван ње, у њима одређеној равни постоје бар две праве које садрже A и немају заједничких тачака са a.*

Покажимо да постоји бесконачно много правих које имају наведену особину. Нека су a_1 и a_2 две праве које садрже A и немају заједничких тачака са a. Нека је B_2 тачка праве a_2 која се не налази са исте стране праве a_1 са које је права a. Ако сада спојимо тачку B_2 са ма којом тачком B праве a, новонастала дуж ће сећи праву a_1 у тачки B_1. Нека је M произвољна тачка дужи B_1B_2. Сада ћемо показати да права одређена са AM нема заједничких тачака са правом a. Претпоставимо супротно и узмимо да права AM сече праву a у тачки C. Ако се тачка налази на правцу од A према M, добијамо троугао MBC чију страницу MB сече права a_1. Према Пашовој аксиоми, права a_1 мора сећи страницу BC овог троугла. Јасно нам је да то не може бити, јер тада добијамо да се a_1 и a секу. Ако претпоставимо да се тачка пресека налази у правцу од M према A сличним поступком добијамо да праве a_2 и a имају заједничких тачака. У оба случаја долазимо до контрадикције. Како смо тачку M бирали произвољно, јасно је да тврђење важи за сваку тачку дужи B_1B_2. Дакле:



Теорема 2.2.2. *За сваку праву a и тачку A ван ње постоји бесконачно много правих које садрже A и немају заједничких тачака са a.*

Из доказа теореме **2.2.2.** можемо закључити да се „између” две праве дисјунктне са a не може налазити права која је сече. Ова тврдња сугерише постојање неке врсте граничних линија у тачки A, које ће делити остале праве на оне које секу и оне које не секу a. Означићемо две такве границе. Једну ћемо звати десна (a_d), а другу лева (a_l) гранична права (слика). Све праве које садрже A и не секу праву a, пролазиће „између” наших граница (нпр. права a' на слици). Оне праве које је секу пролазиће „испод” граничних права, попут нормале AP.



Приметићемо да, због симетрије, праве a_l и a_d образују исти угао α са нормалом. Овај угао је свакако позитиван, али такође важи и да је мањи од $\frac{\pi}{2}$. Интуитивно, уколико би био једнак $\frac{\pi}{2}$, праве a_l и a_d би се поклопиле, и добили бисмо јединствену праву кроз A која нема заједничих тачака са a.

Сада ћемо размотрити неке особине овако задатих граничних права, које ће нам омогућити да дефинишемо паралелност у хиперболичкој геометрији. Докази следећих тврђења су изостављени, због своје обимности.

Теорема 2.2.3. *Нека је a_d десна гранична права скупа правих које пролазе кроз тачку A и не секу праву a. Тада је a_d десна граница аналогног скупа правих у било којој својој тачки.*

Другим речима, уколико утврдимо да је у некој тачки права a_d гранична правој a, важиће да јој је она гранична у свакој својој тачки. Овај однос између правих више не зависи од одабира тачке на a_d. Сада можемо просто рећи да је права a_d гранична правој a у одређеном смеру.

Теорема 2.2.4. *Ако је b гранична права за праву a у одређеном смеру, онда је и права a граница за праву b у истом смеру.*

Дефиниција 2.2.1. *За праву b кажемо да је паралелна правој a у одређеном смеру, ако она представља граничну праву за a у том смеру.*

Приметно је колико се дефиниција паралелности у геометрији Лобачевског разликује од оне у еуклидској. Ипак, теоремом **2.2.4.** обезбедили смо симетричност овој релацији, односно исказ „a и b су паралелне” је потпуно легитиман и јасан.

Дефиниција 2.2.2. *Оштар угао α (означен на слици горе) између нормале на праву a и паралелне праве a_d (односно a_l) зове се угао паралелности.*

Дефиниција 2.2.3. *За праве a и b кажемо да су хиперпаралелне, ако немају заједничких тачака и нису паралелне.*

Кроз сваку тачку у равни пролази бесконачно много правих које су хиперпаралелне датој правој, и оне се налазе између њој граничних, односно паралелних линија.

2.3 Паралелност и хиперпаралелност

Сада ћемо се осврнути на неке особине паралелних и хиперпаралелних правих, које ће нам помоћи да створимо јаснију слику о овим односима.

Теорема 2.3.1. *Сваку тачку равни садржи тачно једна права која је паралелна датој правој у одређеном смеру.*

Теорема 2.3.2. *Две праве паралелне трећој у неком смеру, паралелне су међусобно у истом смеру.*

Теорема 2.3.3. *Две праве управне на трећу су међусобно хиперпаралелне.*

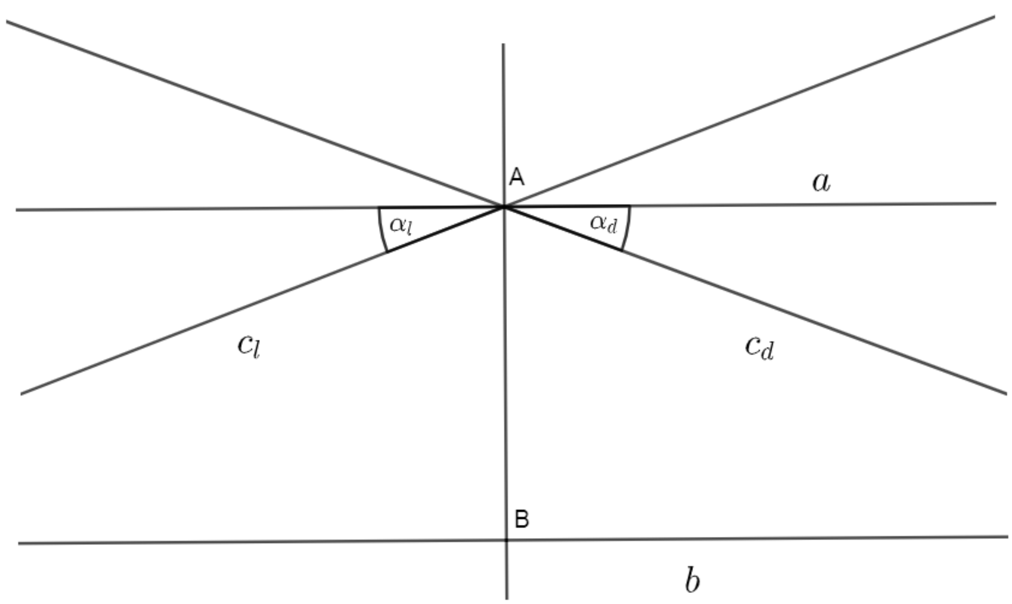
Докажимо теорему **2.3.3**. Нека су праве a и b нормалне на праву c у тачкама A и B, респективно. Ако бисмо претпоставили да се a и b секу у C, добили бисмо троугао ABC чији је збир унутрашњих углова већи од π, што је у контрадикцији са Лежандровим првим ставом. Дакле, ова могућност отпада још у апсолутној геометрији. Ако су a и b пак паралелне, добијамо да је угао између AB (као нормале на b) и праве a једнак $\frac{\pi}{2}$. Нешто раније показали смо да овај угао мора бити строго мањи од $\frac{\pi}{2}$, па поново долазимо до контрадикције. Преостаје нам да су a и b хиперпаралелне, што је и требало показати. Као последицу ове теореме имамо и њено следеће уопштење:

Последица 2.3.1. *Две праве које при пресеку са трећом граде једнаке наизменичне углове су међусобно хиперпаралелне.*

Теорема 2.3.4. *Сваке две хиперпаралелне праве имају једну заједничку нормалу, од које се на обе стране неограничено удаљавају једна од друге.*

Занимљиво је да уколико пројектујемо једну од две хиперпаралелне праве на другу, добијамо одсечак коначне дужине. Иако може звучати чудно, ово тврђење се прилично једноставно доказује. Нека су a и b две хиперпаралелне праве и нека је AB $(A \in a, B \in b)$ њихова заједничка нормала. Нека су c_l и c_d две праве из тачке A, које су паралелне правој b улево, односно удесно. Од раније нам је познато да су углови паралелности $\angle BAc_l$ и $\angle BAc_d$ оштри. Јасно је да су и њима комплементни углови са правом $(\alpha_l, \alpha_d$ на слици) оштри.

Подигнимо нормале у свакој тачки праве a. Ако би свака нормала секла праву b у некој тачки, морала би сећи и неку од права c_l и c_d. Дакле, добијамо оштре углове α_l и α_d за које важи да нормала у свакој тачки једног крака сече други крак. Ако се сада позовемо на Лежандров трећи став, следи да пети постулат важи, што је контрадикција.



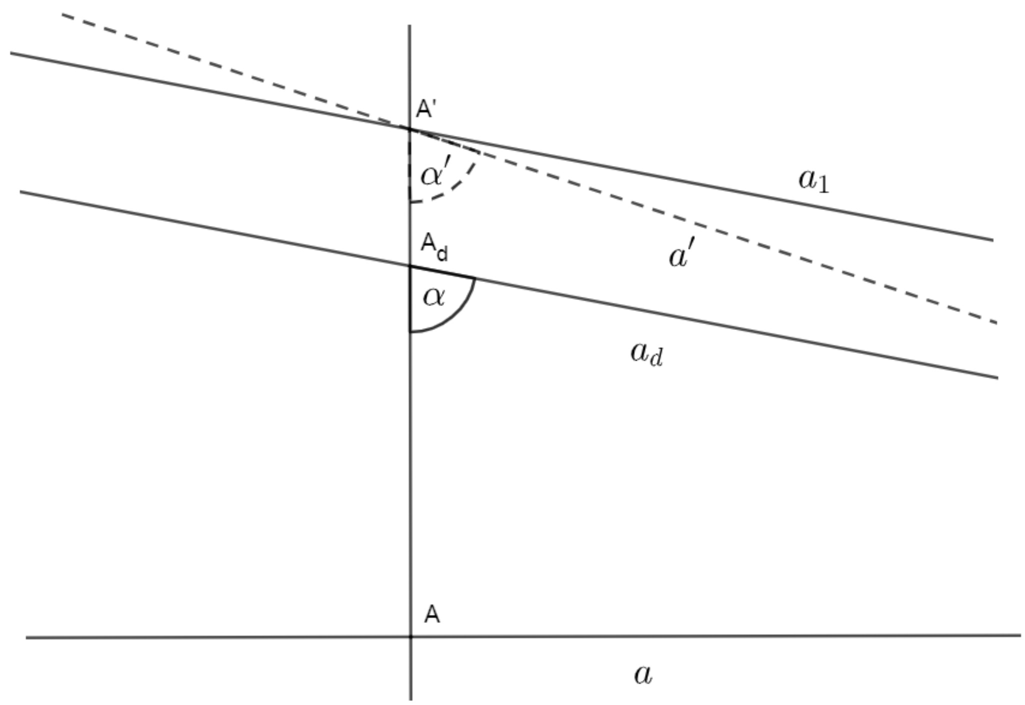
Нормале у тачкама довољно удаљеним од A неће сећи праву b. Ако су C_l и C_d граничне тачке лево, односно десно од , јасно је да све тачке пројекције праве b на

a припадају дужи C_lC_d.

Посматрајмо сада праву a и тачку A ван ње. Из теореме **2.3.1.** знамо да тачку A садржи тачно једна права паралелна са a у одређеном смеру. Поставља се питање да ли постоји зависност између положаја тачке A и угла паралелности у њој.

Теорема 2.3.5. *Угао паралелности у тачки A је монотона функција њеног растојања од праве a.*

Штавише, ова функција је строго опадајућа; што се више удаљавамо од праве a, угао паралелности је све оштрији. Показаћемо ово својство. Посматрамо праву a и њој паралелну праву a_d. Нека је A_dA $(A \in a, A_d \in a_d)$ дуж нормална на a. Нека је A' произвољна тачка праве AA_d. Циљ нам је да докажемо да уколико важи $A'A > A_dA$ онда важи и $\alpha' < \alpha$. Ако кроз тачку A' повучемо праву a_1 тако да она гради угао α са $A'A$, на основу последице **2.3.1.** праве a_d и a_1 су хиперпаралелне. Јасно је да се права паралелна правој a_d која садржи A' мора наћи "испод"праве a_1 (у одабраном смеру), па јој самим тим одговара угао мањи од α. На основу теореме **2.3.2.** дата права је паралелна и правој a, чиме је теорема доказана.

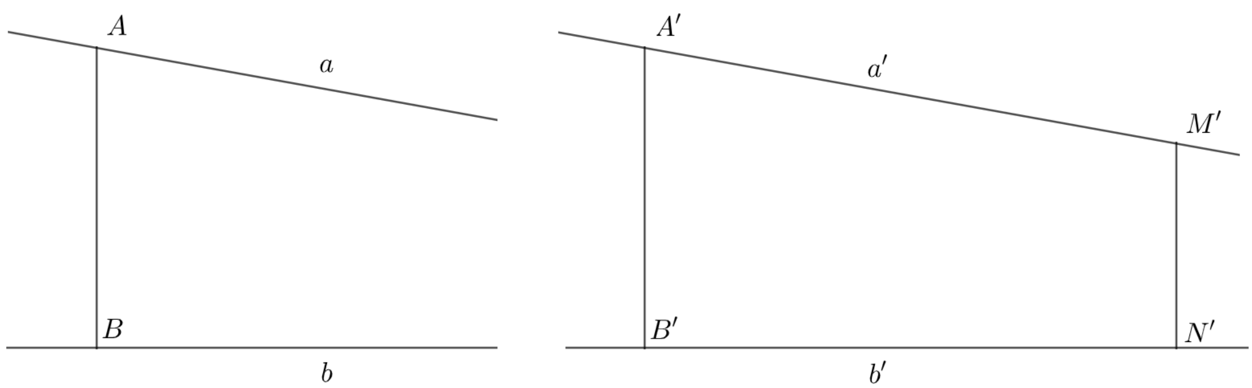


Функција о којој говоримо јесте такозвана **функција Лобачевског**. Поред тога што је монотона, она је и непрекидна и узима све вредности у интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$. Када удаљеност тачке A од дате праве тежи бесконачности, угао паралелности тежиће нули. Супротно, када је тачка A сасвим близу праве a, угао ће тежити правом углу. У овом случају, паралелне праве заузимају сличан међусобни положај као у еуклидској геометрији. Заиста, нећемо погрешити ако кажемо да на малим растојањима хиперболичка геометрија веома подсећа на еуклидску. Ово запажање додатно ћемо потврдити у следећем поглављу.

Теорема 2.3.6. *Паралелне праве се асимптотски приближавају у смеру паралелности.*

Нека су a и b две праве паралелне удесно. Уочимо произвољну тачку A на правој a и из ње спустимо нормалу AB на b. Треба показати да ће за произвољно мало ε на правој b постојати довољно удаљена тачка N тако да важи $MN < \varepsilon$, где је $M \in a, MN \perp b$.

Посматрајмо произвољну праву b' и тачку M' која се налази ван ње, тако да је нормала $M'N'$ на b мања од ε. Повуцимо праву a' кроз тачку M' тако да је a' паралелна b' удесно. Замислимо сада да померамо тачку B' по правој b', од тачке N' на леву страну. Како је угао паралелности увек оштар, нормала $A'B'$ $(A \in a')$ ће у овом смеру непрекидно расти, тако ће у неком моменту достићи дужину AB. Сада ћемо ову фигуру транслирати тако да се права b' поклопи са b, а тачка B' са тачком B. Како је $AB = A'B'$, тачке A' и A ће се поклопити, а пошто кроз A постоји јединствена права паралелна правој b у десно, поклопиће се и праве a' и a. Сада је N' тачка праве b, а M' тачка праве a, тако да важи $M'N' < \varepsilon$.



У еуклидском простору, сваке две праве које се приближавају морају се сећи у некој довољно удаљеној тачки. Са тог становишта, концепт правих линија које се асимптотски приближавају потпуно је нов и указује на одређену „закривљеност” саме хиперболичке равни.

У еуклидском простору, сваке две праве које се приближавају морају се сећи у некој довољно удаљеној тачки. Са тог становишта, концепт правих линија које се асимптотски приближавају потпуно је нов и указује на одређену „закривљеност” саме хиперболичке равни.

3 Особине троугла

3.1 Збир унутрашњих углова троугла

Како смо видели у првом поглављу, Лежандр је успео да успостави везу између петог постулата и збира унутрашњих углова троугла. Из његовог првог става знамо да је ова сума увек мања или једнака π. Посматрајмо сада Лежандров четврти став. Раније је наглашено да он представља еквиваленцију између Плејферове аксиоме и постојања троугла чији је збир углова π. Читава хиперболичка геометрија се заснива на негацији ове аксиоме, па лако долазимо до закључка да у овом систему не постоји такав троугао. Сада из првог става директно следи:

Теорема 3.1.1. *Збир унутрашњих углова у троуглу је строго мањи од π.*

Ова особина није специфична само за троуглове. Посматрајмо неки прост n-тоугао у равни. Уколико уочимо тачку P у његовој унутрашњости и повежемо је са теменима, поделићемо дати полигон на n троуглова. Збир унутрашњих углова n-тоугла сада се може представити преко збира углова новонасталих троуглова. Означимо те углове са α_i, β_i и γ_i при чему се углови γ_i налазе код темена P. Ако са θ_i обележимо унутрашње углове n-тоугла, важи:

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \qquad \mathbf{(1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) < n\pi \qquad \mathbf{(2)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 2\pi \qquad \mathbf{(3)}$$

Из **(1)**, **(2)** и **(3)** следи:

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i < (n-2)\pi$$

Последица 3.1.1. *Збир унутрашњих углова простог n-тоугла је мањи од $(n-2)\pi$.*

Дакле, у хиперболичкој геометрији, збир унутрашњих углова многоугла је мањи него у еуклидској геометрији.

3.2 Подударност троуглова

Од раније су нам позната четири става који одређују подударност два троугла у еуклидској геометрији. Интересантно је питање да ли, и на који начин аксиома Лобачевског утиче на ове односе између фигура. Испоставља се да се у хиперболичкој геометрији задржавају прва четири става, али им је могуће додати и нови, пети став подударности.

Теорема 3.2.1. *Два троугла су подударна ако и само ако су им одговарајући унутрашњи углови подударни.*

Доказаћемо ову теорему. Посматрајмо троуглове ABC и $A'B'C'$ који имају подударне одговарајуће углове (углови код темена A, B, C су редом једнаки угловима у A',B',C'). Претпоставимо да они нису подударни, нпр. да странице AB и $A'B'$ нису једнаке. Без умањења општости нека је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка K тако да је $AK = A'B'$. Нека је сада L тачка на правој AC за коју важи $AL = A'C'$. Из става „СУС” знамо да су троуглови AKL и $A'B'C'$ подударни, те важе следеће једнакости међу угловима:

$$\angle AKL = \angle A'B'C' = \angle ABC$$
$$\angle ALK = \angle A'C'B' = \angle ACB$$

Сада посматрамо два могућа случаја:

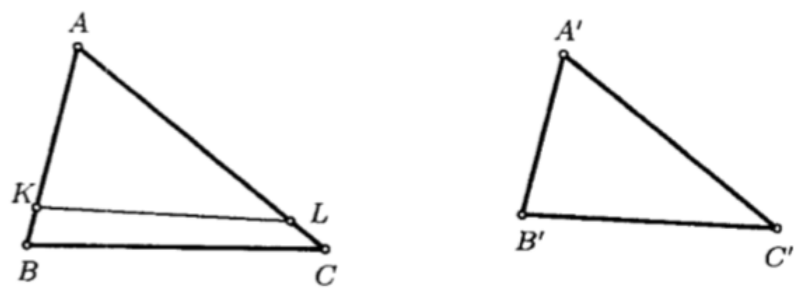
1) L се налази између тачака A и C. У овом случају имамо:

$$\angle AKL = \angle ABC = \pi - \angle BKL$$
$$\angle ALK = \angle ACB = \pi - \angle CLK$$

Из чега добијамо да је збир углова четвороугла $BCLK$:

$$\angle ABC + \angle BKL + \angle ACB + \angle CLK = 2\pi$$

што је немогуће.



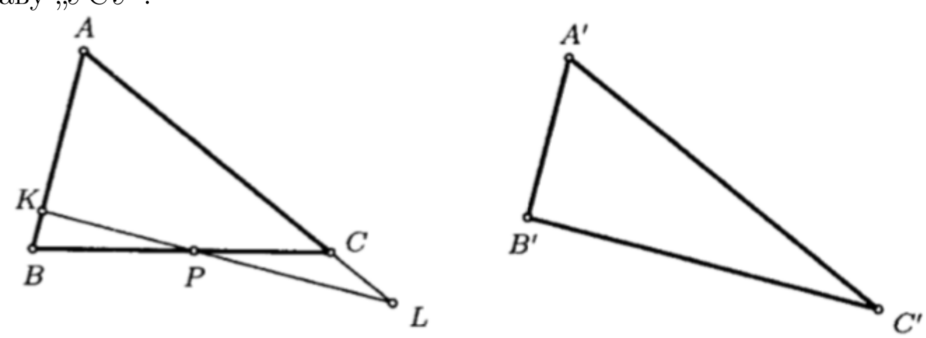
2) L се налази негде на продужетку дужи AC или је $L \equiv C$. Као и малопре важи:

$$\angle AKL = \angle ABC = \pi - \angle BKL$$

Нека је P тачка пресека дужи KL и BC (у граничном случају $P \equiv C$). Ако посматрамо углове новодобијеног троугла BKP:

$$\angle ABC + \angle BKL + \angle BPK = \pi + \angle BPK$$

Добијамо да је сума углова тог троугла већа од π, што је поново контрадикција. Дакле, претпоставка да је $AB > A'B'$ није била добра. Аналогно одбацујемо и $AB < A'B'$, па преостаје $AB \cong A'B'$, одакле директно следи подударност троуглова ABC и $A'B'C'$ по ставу „УСУ”.

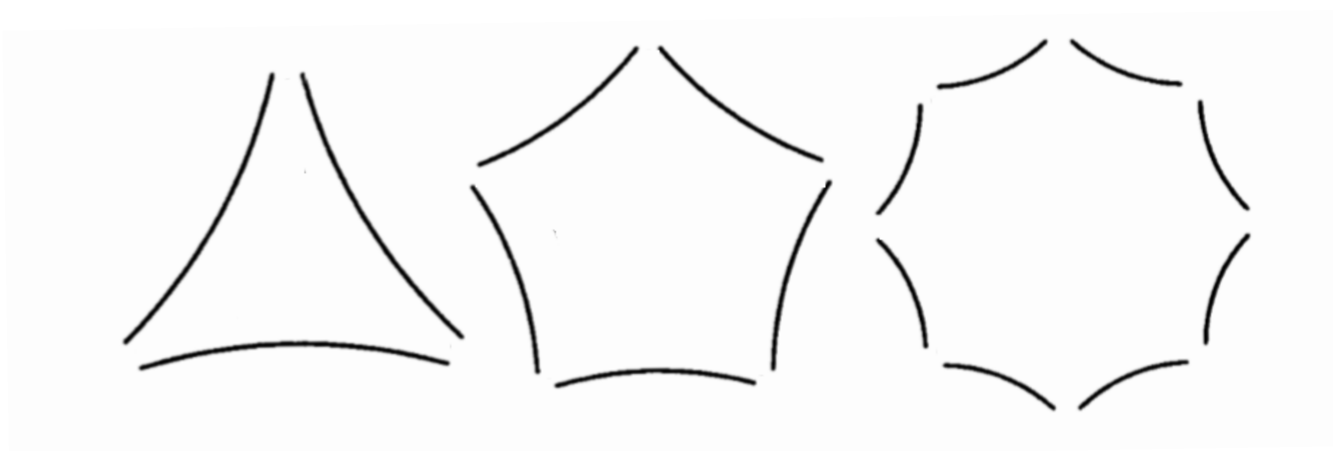


Приметимо да се претходним тврђењем потпуно губи концепт сличности фигура, односно, у хиперболичкој геометрији свака сличност представља подударност. Јасно је да је сада троугао (самим тим и многоугао) једнозначно одређен својим угловима.

3.3 Асимптотски троуглови

У другом поглављу смо дефинисали паралелност правих у хиперболичкој геометрији. Закључили смо да се две паралелне праве заправо асимптотски приближавају. Замислимо да се оне срећу у некој бесконачно далекој тачки. Ту тачку ћемо звати **несвојствена тачка**(или **несвојствено теме**). Овај назив је оправдан из простог разлога што таква тачка није „реална”, већ постоји само у замишљеној бесконачности.

Дефиниција 3.3.1. *Асимптотски полигони су полигони који имају несвојствено теме, односно бар један пар суседних страница који чине паралелне полуправе.*



Многоугао може имати и више оваквих темена, а могуће је и да су му сва темена несвојствена. Специјално, троугао може имати једно, два или три несвојствена темена. Испоставиће се да овако одабрани троуглови задржавају већину особина „обичних” троуглова. Сада ћемо навести неке од битнијих.

Теорема 3.3.1. *У асимптотском троуглу ABC (са несвојственим теменом у C), збир углова је мањи од π.*

Због тога што је C пресек правих које се асимптотски приближавају, допустићемо да угао код овог темена узме вредност 0. Збир углова у овом троуглу сада је одређен само са два угла. Ако би важило $\angle BAC + \angle ABC = \pi$ онда би према последици **2.3.1** праве BC и AC биле хиперпаралелне, што је контрадикција.

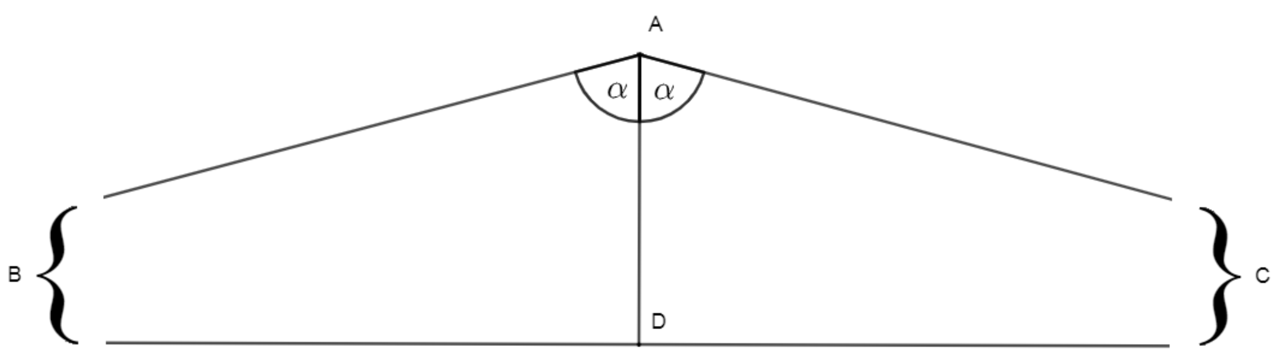
Теорема 3.3.2. *Асимптотски троуглови ABC и $A'B'C'$ (са несвојственим теменима C и C') су подударни ако и само ако важи:*
(1) $AB = A'B'$ *и* $\angle ABC = \angle A'B'C'$
(2) $\angle BAC = \angle B'A'C'$ *и* $\angle ABC = \angle A'B'C'$

Нешто раније смо показали да је угао паралелности јединствено одређен удаљеношћу тачке од дате праве. Према томе, спуштањем висина из својствених темена троуглова можемо једноставно доказати дату теорему. Детаље доказа остављамо читаоцу.

Како смо углу у тачки C (односно C') доделили вредност 0, можемо приметити да сада став **(1)** веома подсећа на теорему **3.2.1**. Као и „обични”, и асимптотски троуглови су јединствено одређени својим позитивним угловима. Када посматрамо троуглове са два несвојствена темена, долазимо до следеће теореме:

Теорема 3.3.3. *Двоструко асимптотски троуглови ABC и $A'B'C'$ (са несвојственим теменима B и C,односно B' и C') су подударни ако и само ако су им углови код темена A и A' подударни.*

Спустимо нормалу AD на BC ($A'D'$ на $B'C'$). Ова нормала поделиће наш троугао на два асимптотска, који су према теореми **3.3.2** подударни. Овиме смо показали да је висина из тачке A (A') уједно и симетрала угла, па из полазне једнакости $\angle BAC = \angle B'A'C'$ добијамо $\angle BAD = \angle B'A'D' = \angle CAD = \angle C'A'D'$. Сада на основу теореме **3.3.2** важи $\triangle BAD \cong \triangle B'A'D'$ и $\triangle BAC \cong \triangle B'A'C'$, односо $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



Међутим, шта се дешава са троуструко асимптотским троугловима? Како код њих не постоји угао позитивне вредности, на који начин су они одређени? Одговор на ово питање сам се намеће, и формулисаћемо га следећом теоремом:

Теорема 3.3.4. *Сви троструко асимптотски троуглови су међусобно подударни.*

Спуштањем „висина” из темена A и A' (како се ради о несвојственом темену, ми суштински конструишемо праву нормалну на BC и паралелну AB) троструко асимптотских троуглова ABC и $A'B'C'$, поделићемо их на двоструко асимптотске. Сва четири двоструко асимптотска торугла су одређена углом $\frac{\pi}{2}$. На основу теореме **3.3.3**, они морају бити подударни, одакле директно следи подударност троуглова ABC и $A'B'C'$.

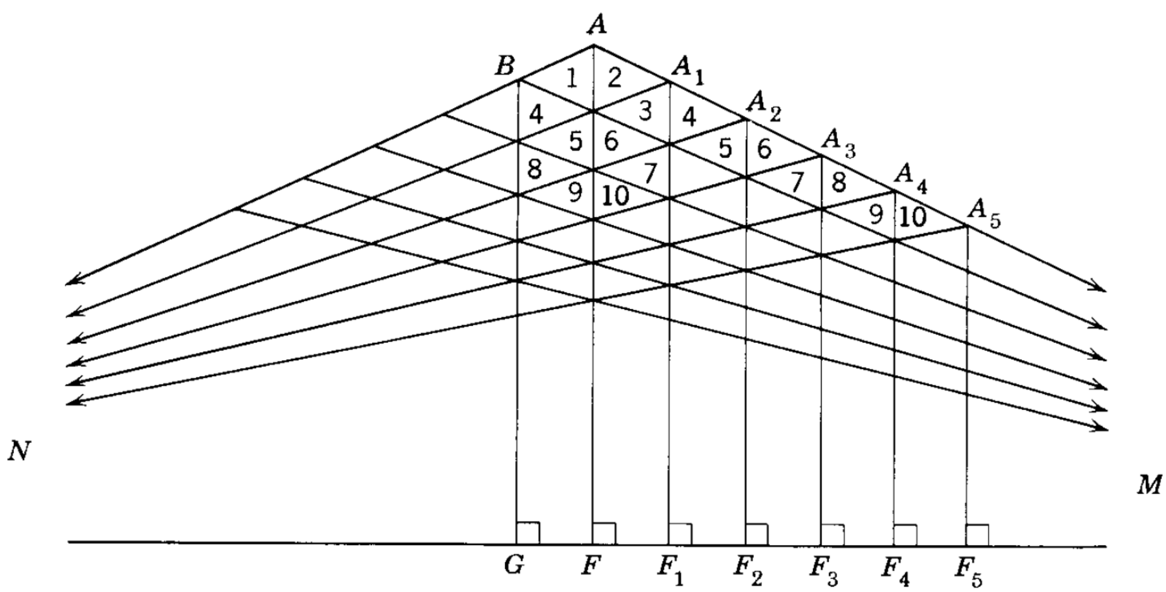
Интуитивно, теорема је у сагласности са петим ставом подударности. Сви троструко асимптотски троуглови имају по три „нула” угла, те на неки начин можемо рећи да су слични, односно подударни.

3.4 Површина и угаони дефект

Теорема 3.4.1. *Површина троугла са несвојственим теменом је коначна.*

Ова теорема може наизглед деловати контраинтуитивно, јер у питању је троугао чије су две странице продужене у бесконачно. Да ли је заиста могуће да и у том случају површина остаје коначна? Погледајмо илустрацију доказа.

Нека је ABM асимптотски троугао са несвојственим теменом M. Пресликајмо дати троугао у односу на симетралу угла код A, како бисмо добили нови асимптотски троугао AA_1N, где је N несвојствено теме. Нека је F_1 подножје симетрале угла у тачки A_1 (како је A_1MN двоструко асимптотски, ова права се поклапа са нормалом) на праву MN. Ако сада пресликамо праву BM у односу на праву A_1F_1, она ће сећи AM у некој тачки A_2. Штавише, због симетрије, тачка A_2 ће се налазити на истој висини као и тачка пресека правих BM и A_1N. Сада ћемо пресликати троугао A_1A_2N у односу на праву AF. Добијамо нови троугао чија својствена темена припадају AN док му је несвојствено теме M. Наставићемо са пресликавањем праве BM у односу на симетрале углова у тачкама $A_2, A_3, A_4 \ldots$ и сваки пут ћемо новонастали троугао пресликати у односу на AF. Како све време сликамо у односу на симетрале угла, важиће $FF_1 \cong F_1F_2 \cong F_2F_3 \ldots$ Из овога се може показати да смо ABM поделили на низ мањих троуглова, тако да сваки има свог пара унутар петоугла $ABGF_1A_1$ коме је подударан. На слици су подударни троуглови означени истим бројевима. Јасно је да је сада површина троугла ABM ограничена коначном површином петоугла $ABGF_1A_1$.



Како смо нешто раније приметили, двоструко и троструко асимптотске троуглове могуће је изделити на коначан број једноструких, те и њихова површина мора остати коначна.

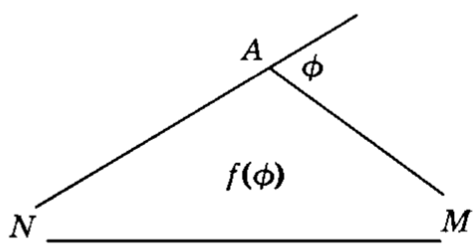
Сада када знамо да сваки троугао у хипербличкој равни има коначну површину, осврнућемо се на израз за рачунање те вредности. Један од најелегантнијих поступака за извођење ове формуле дело је управо великог Гауса. Он је успео да у седам једноставних корака покаже једну од најлепших теорема у хиперболичкој геометрији. Анализирајмо нешто измењену верзију његовог доказа. Неке од следећих тврђења смо већ показали, те им нећемо посвећивати посебну пажњу.

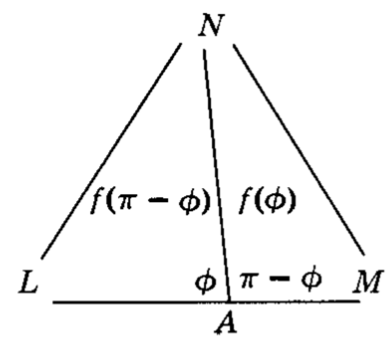
Корак 1. *Сви троструко асимптотски троуглови су међусобно подударни.*

Корак 2. *Површина троструко асимптотског троугла има коначну вредност* $\boldsymbol{T}$.

Корак 3. *Површина двоструко асимптотског троугла је функција спољашњег угла код његовог својственог темена.*

Дату функцију означићемо са $f(\phi)$. Од раније позната функција Лобачевског нам даје везу између угла паралелности и удаљености тачке од праве. Показали смо да са порастом угла паралелности висина опада, па можемо наслутити сличну зависност и у овом случају. Као и функција Лобачевског, и ова функција биће непрекидна. Међутим, Гаус посматра спољашњи угао, како би функција била монотоно растућа.





Корак 4. $f(\phi) + f(\pi - \phi) = T$

Овај корак можемо лако замислити. Потребно је поставити два двоструко асимптотска троугла са суплементним угловима један до другог. Наравно, мора бити $0 < \phi < \pi$. Када пустимо да ϕ тежи π, наш двоструко асимптотски троугао ће личити на троструко асимптотски. Када овај угао пак тежи нули, наш троугао ће се „склопити”, односно површина ће му тежити нули. Према томе, можемо проширити домен наше функције: $f(0) = 0$ односно $f(\pi) = T$.

Корак 5. $f(\phi) + f(\psi) + f(\pi - \phi - \psi) = T$

Слично као у кораку **4**, ово можемо разумети као уклапање три двоструко асимптотска троугла чији збир унутрашњих углова 2π.

Корак 6. $f(\phi) + f(\psi) = f(\phi + \psi)$

Због дефинисаности мора важити $\phi \geqslant 0, \psi \geqslant 0$ и $\phi + \psi \leqslant \pi$. Ако применимо формулу из корака **4** на угао $\phi + \psi$, добијамо:

$$f(\phi + \psi) + f(\pi - \phi - \psi) = T$$

односно на основу корака **5**:

$$f(\phi+\psi)+f(\pi-\phi-\psi)=f(\phi)+f(\psi)+f(\pi-\phi-\psi)=T$$

одакле директно следи корак **6**.

На основу корака 6, и чињенице да је $f(\phi)$ непрекидна, можемо закључити да важи $f(\phi)=\mu\phi$, односно, $f(\phi)$ је линеарна функција.

Корак 7. *Површина било ког троугла ABC може се одредити формулом:*

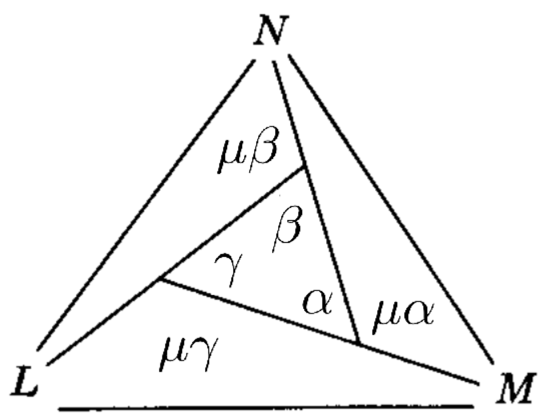
$$P=\mu(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$$

где су α,β,γ унутрашњи углови тог троугла.

При овом кораку, Гаус је посматрао троугао ABC чије је странице циклично продужио. Овим поступком добио је троструко асимптотски троугао NLM, унутар кога се налази троугао ABC. Остатак унутрашњости испуњавају три двоструко асимптотска троугла, чије су површине одређене угловима α,β и γ, односно:

$$P+\mu\alpha+\mu\beta+\mu\gamma=T=\mu\pi$$

одакле директно следи формула за P. Израз $(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$ зваћемо **угаоним дефектом** троугла ABC.



Можемо изабрати јединицу мере такву да је површина троструко асимптотског троугла π, односно тако да је $\mu=1$. Формула сада има облик:

$$P=\pi-\alpha-\beta-\gamma$$

Приметимо да када површина троугла тежи нули, сума углова мора тежити π. Дакле, веома мали троуглови у хиперболичкој геометрији подсећају на оне у еуклидској. Ово се уклапа са ранијим закључком да су две геометрије сличне на малим раздаљинама.

Такође, приметна је сличност између формула за површину троугла у хиперболичкој и сферној геометрији. На сфери ова формула има облик:

$$P=R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$$

где R представља полупречник сфере. Штавише, ако допустимо $R^2=-1$, ове две формуле биће идентичне. Са те тачке гледишта, хиперболичку геометрију можемо посматрати као геометрију на сфери чији је полупречник имагинарна јединица i. Сетимо се да је Ламберт приликом својих изучавања наслутио управо овакво решење петог постулата. Његово нагађање да је хипотеза оштрог угла тачна на „некаквој имагинарној сфери” у потпуности је предвидело расплет ове вишевековне загонетке.

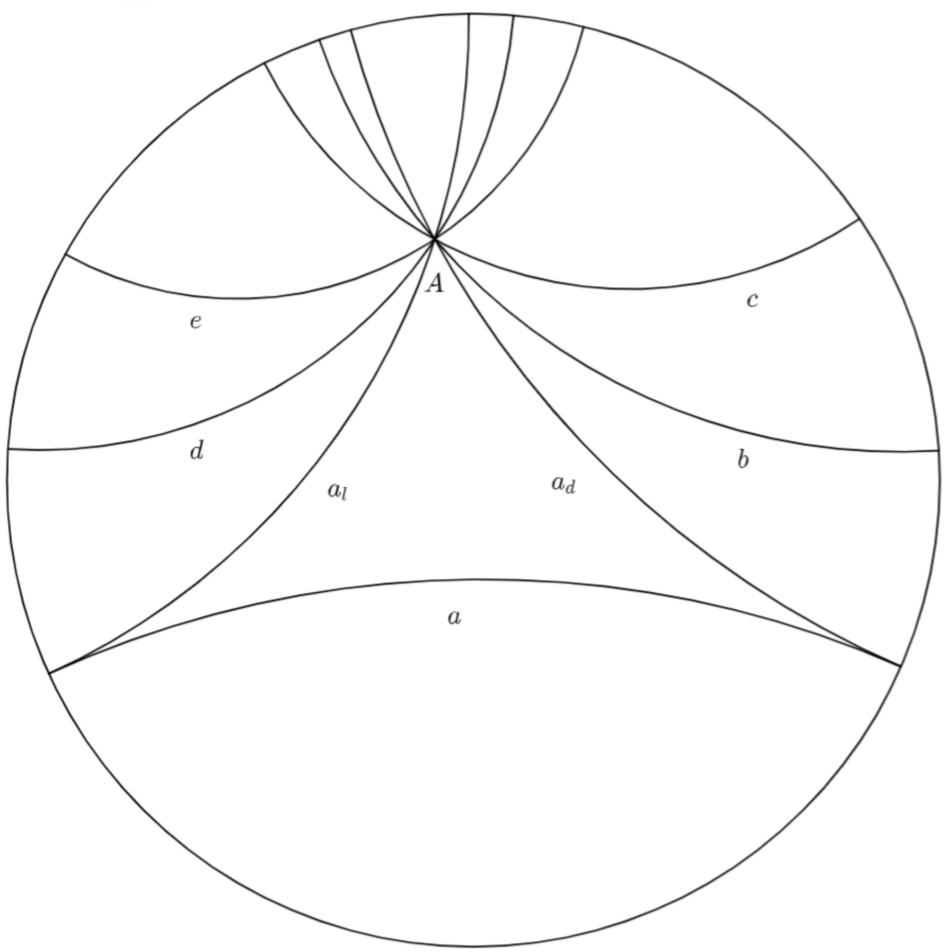
4 Модели хиперболичке геометрије

Један од главних проблема који су се јавили са открићем хиперболичке геометрије јесте питање логичке одрживости. Како је до тог момента еуклидска геометрија сматрана јединственом, није постојала потреба за довођењем њене непротивуречности у питање. Уопште узев, када говоримо о конзистентности неког логичког система који укључује „бесконачне", испоставља се да је немогуће „из њега самог" доказати његову „истинитост". Ово тврђење је познато као Геделова теорема, названо по немачком филозофу **Курту Геделу (Kurt Gödel 1938–1978)**.

Према томе, питање се своди на релативну истинитост, односно, да ли је хиперболичка геометрија „подједнако истинита" као и еуклидска? Одговор је потврдан и, као што је раније поменуто, до њега је први дошао Анри Поенкаре. Он је успео да конструише први модел хиперболичке геометрије у еуклидској равни.

4.1 Поенкареов диск модел

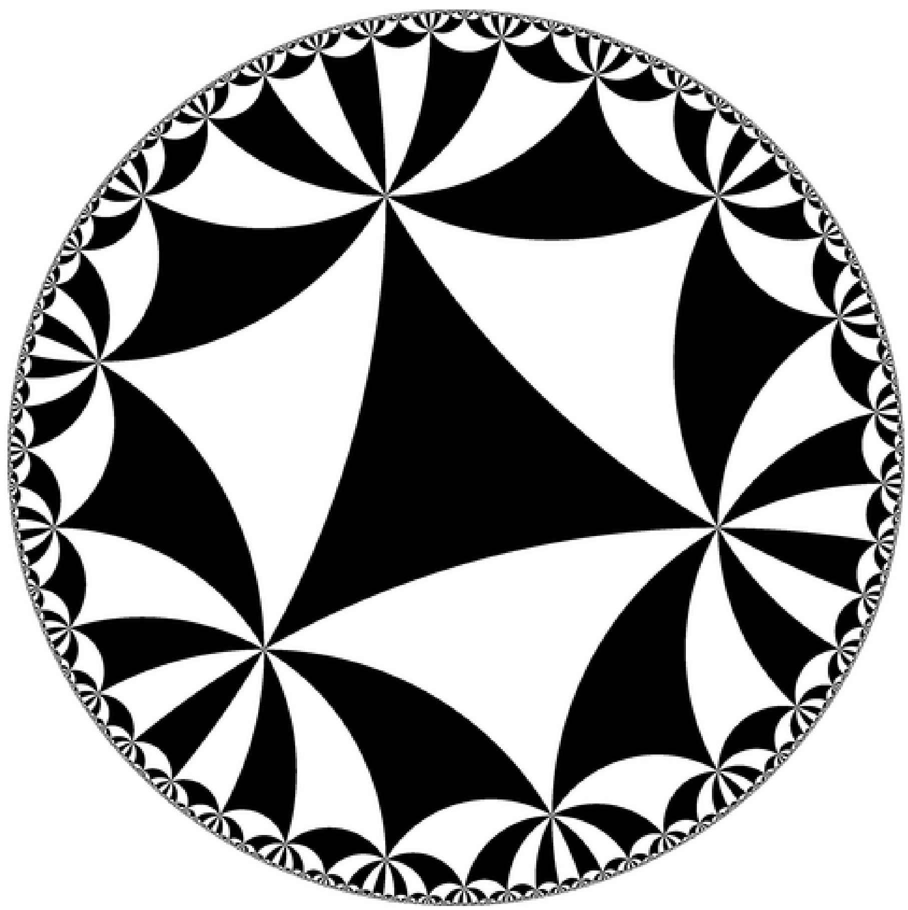
Поенкареова идеја јесте да се хиперболичка раван преслика у унутрашњост произвољног круга еуклидске равни. Овај круг зваћемо **апсолутом**. Притом, сваки пар међусобно инверзних тачака представља једну хиперболичку тачку, док сваки круг нормалан на апсолуту одговара хиперболичкој правој. На слици видимо како аксиома Лобачевског изгледа на диск моделу.



Праве a_l и a_d су паралелне правој a, док су јој праве b, c, d и e хиперпаралелне. Битно је приметити да Поенкареов диск модел чува углове, док су односи дужина деформисани. Око центра апсолуте дужине су сличне реалним, а што се више удаљавамо од њега, њихова веродостојност се губи. Близу ивица апсолуте реална удаљеност између две тачке је много пута већа од оне коју измеримо на моделу.

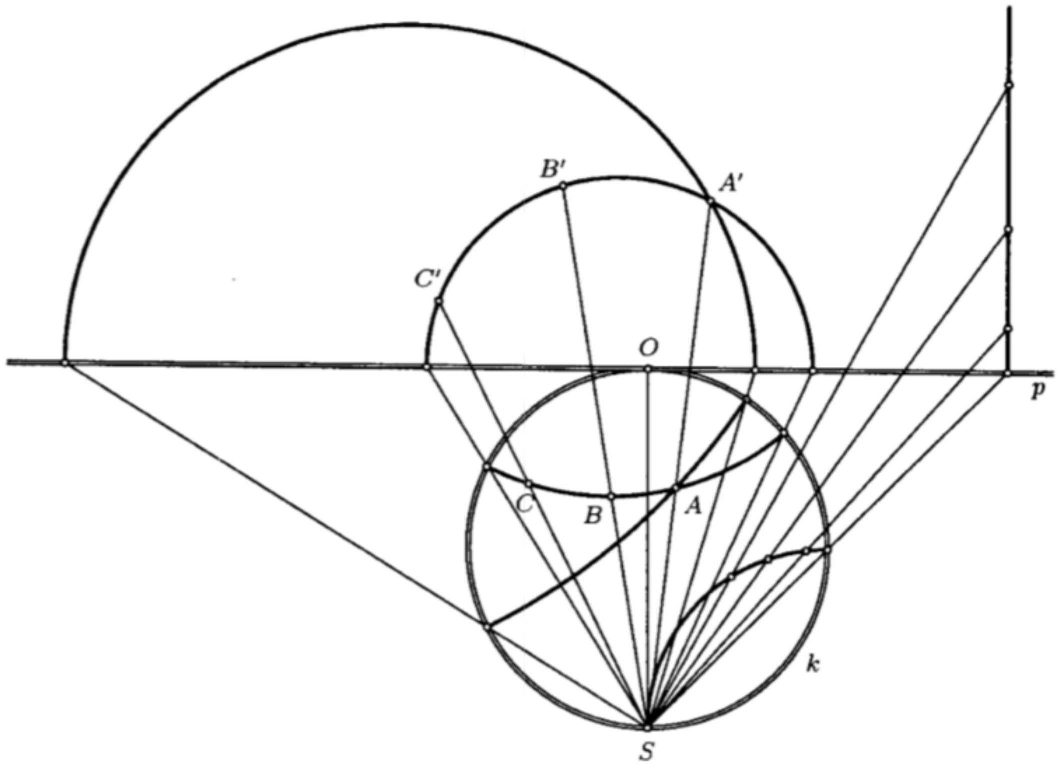
О самој апсолути треба размишљати као о бесконачности. Приметимо да се праве a_d и a секу управо на овој линији. Нешто раније смо показали да се паралелне праве асимптотски приближавају, и дефинисали смо несвојствено теме као њихов пресек у бесконачности. У том контексту диск модел заиста добро приказује овај однос.

Како бисмо добили јаснију представу изгледу диск модела, посматрајмо следећу слику. Сви црни и бели троуглови међусобно су подударни, без обзира на то што ближе апсолути изгледају мањи. Они су померени према ивици, и самим тим су њихове странице представљене као краће. Уколико бисмо померали овако поплочану раван, троуглови би се наизменично ширили и скупљали у зависности од тога да ли се крећу ка центру или од њега.

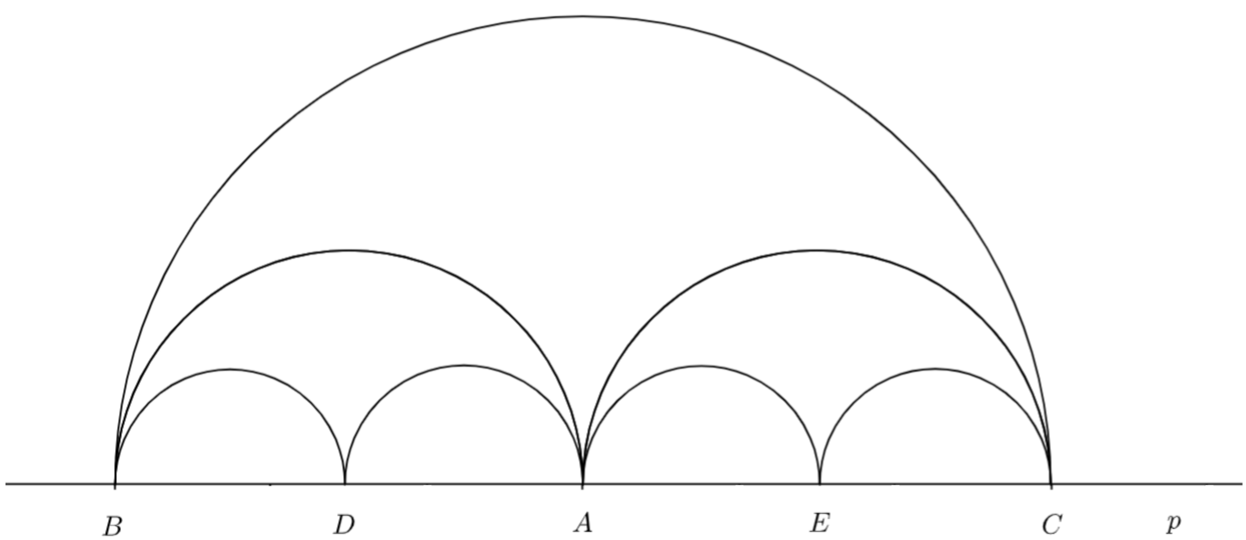


4.2 Поенкареов полуравански модел

Посматрајмо апсолуту k и праву p која је додирује у некој тачки O. Нека је S тачка кружнице k дијаметрално супротна тачки O. Инверзијом у односу на круг са центром у S полупречника SO, кружница k сликаће се управо у p, док ће се унутрашњост круга пресликати у полураван одређену том правом. Познато је да инверзија чува углове, тако да смо овим поступком заправо добили још један модел хиперболичке геометрије познат као **Поенкареов полуравански модел**.



Слично као код диск модела, хиперболичке праве представљене су полукруговима чији је пречник на правој p. Како је кружница пресликана у ову праву, сада она преузима улогу „бесконачности”. Поново се сусрећемо са губитком односа дужина, само на нешто другачији начин. Посматрајмо тростроуко асимптотске троуглове ABC, BDA и AEC. Као у случају диск модела, слика би нас и овог пута „преварила” - раније смо доказали да су ови троуглови подударни, мада се тако не чини.



5 Значај геометрије Лобачевског

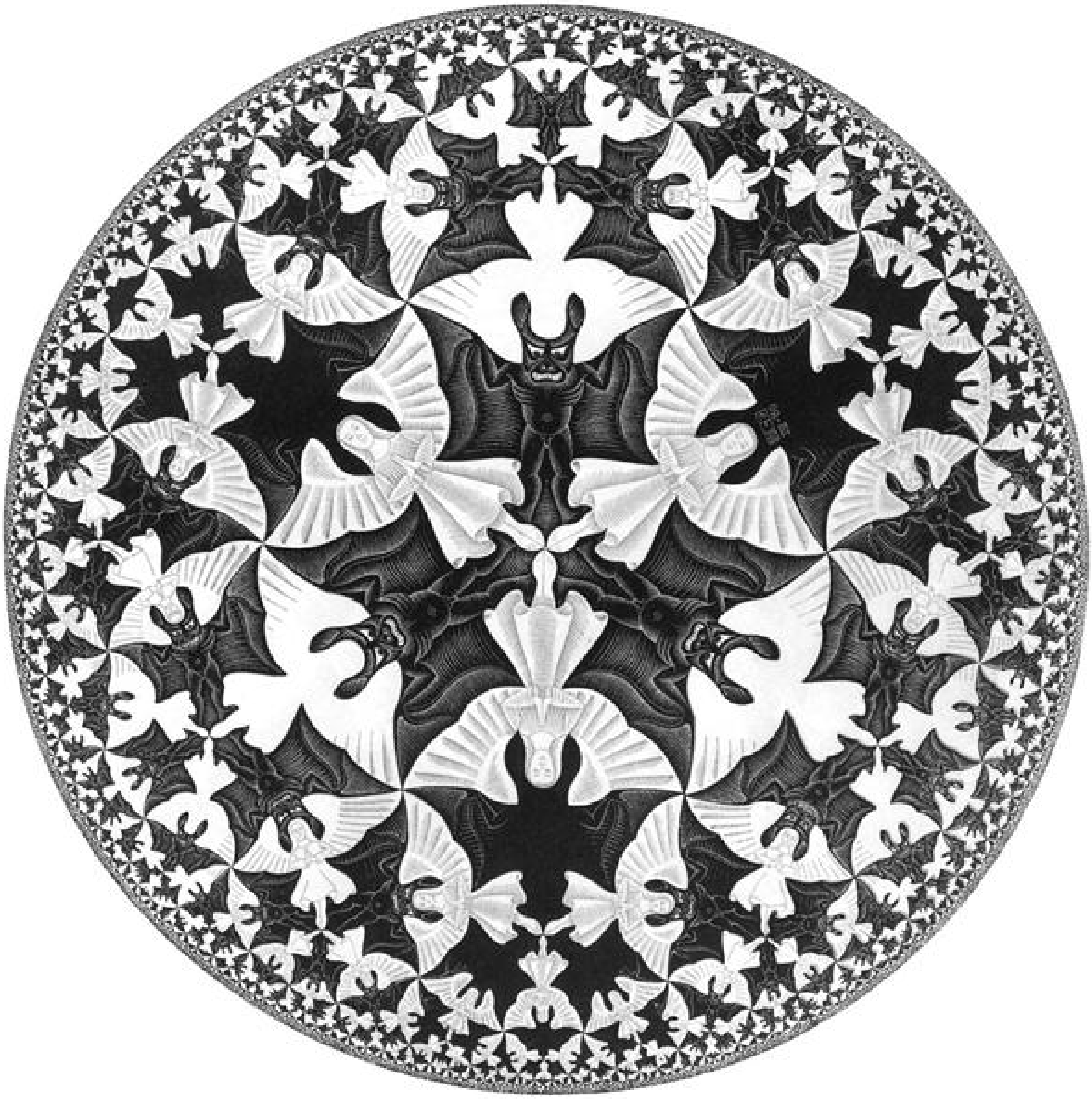
За време живота Лобачевског, његова геометрија сматрана је апсурдним покушајем да се доскочи проблему петог постулата. Због своје потпуне апстракције, ретко ко је наслућивао њен значај.

Хиперболичка геометрија, као идеја, представља огроман искорак за науку тог времена. Тиме што је довео у питање јединственост еуклидске геометрије, Лобачевски је подстакао нови начин размишљања инспиришући многа будућа открића. Неки математичари, попут **Бернарда Римана (Bernhard Riemann 1826–1866)**, развили су сопствену геометрију, додатно доприносећи визији о различитим начинима да се сагледа наш простор. Најзначајнији следбеник ове идеје јесте **Херман Минковски (Hermann Minkowski 1864–1909)**. Његова просторно-временска геометрија била је од изузетног значаја за физику 20. века. **Алберт Ајнштајн (Albert Einstein 1879–1955)** је уз помоћ ове геометрије успоставио чувену теорију релативитета. Она представља одличан показатељ да се универзум не може описати само еуклидском геометријом.

Поред доприноса математици и физици, хиперболичка геометрија је нашла своју примену и у уметности и култури. Занимљив изглед облика у равни инспирисао је холандског сликара **Мориса Ешера (Maurits Cornelis Escher 1898-1972)** да начини неколико изузетних дела на ову тему. Његов серијал слика под називом *Circle limit* базира се на Понекареовом диск моделу.

Слика 1: *Circle Limit III*

Слика 2: *Circle Limit IV*



Литература

[1] Николай В. Ефимов, *Высшая геометрия*, превод: Милица Илић-Дајовић, Просвета, Београд, 1949.

[2] Harold S. M. Coxeter, *Introduction to geometry*, John Wiley and Sons, Торонто, 1969.

[3] Зоран Лучић, *Еуклидска и хиперболичка геометрија*, Grafitti и Математички факултет, Београд, 1994.

[4] Милан Митровић, Михаило Вељковић, Срђан Огњановић, Љубинка Петровић, Ненад Лазаревић, *Геометрија за први разред Математичке гимназије*, Круг, Београд, 2013.