Математичка гимназија

Матурски рад из физике

Манифестација топологије у квантној механици

Сања Крндија

Ментори:
Ана Кнежевић
Стефан Ђорђевић

Београд, мај 2023.

Садржај

1 Увод у квантну механику

1.1 Ода квантној механици

Откриће квантне механике је до данас један од најзначајнијих преокрета у науци. Тера нас да се опростимо од интуиције коју смо мислили да имамо о свету у коме живимо. Многи научници су јој се дуго противили, баш због тога што је унела толику промену у физици за коју су неки веровали да је комплетирана наука. Међутим, све више су схватали да је неопходна, и да може да нам да добар увид у то како свет функционише.

Иако, као што ћемо видети, полази од наизглед врло необичних постулата, заправо описује концепте природе, и једна је од експериментално најбоље потврђених теорија које имамо.

Међутим, та сигурност у експерименту долази на потпуно нови, до тада невиђени начин. Сами резултати експеримента су статистичке природе. Насупрот класичној физици, где смо навикли да уз мање или веће потешкоће можемо да одредимо параметре којима је систем описан, у квантној механици је могуће говорити једино о вероватноћи да се нешто догоди. Самим тим, уопште нисмо у стању да искључимо могућност да се догоди било шта! Дакле, било је потребно да редефинишемо шта уопште значи да се систем сматра решеним.

Квантна механика заправо у лимесу довољно великог система, када су квантни ефекти занемарљиви, постаје класична механика. У класичној механици смо навикли да можемо све да одредимо са произвољном тачношћу, а једино што би нас у томе ограничавало је прецизност апаратуре. Чудновато, у квантној се јавља одређени ниво несигурности, такозване неодређености, која постоји на много фундаменталнијем нивоу. Наиме, ако ипак покушамо да се приближимо тачном резултату и отклонимо ту неодређеност, видећемо да се она само премести и поново исплива негде другде.

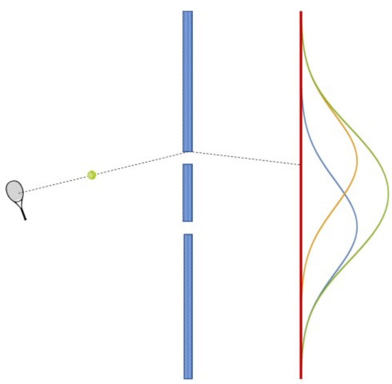
Једна од предности квантне механике је што све ово можемо математички јако добро да дефинишемо. Дакле, имамо објективни језик и алат којим морамо да се водимо како бисмо изградили нову интуицију у покушају да разумемо како свет функционише на најосновнијем нивоу. Али чак и када смо све необичне појаве прихватили, експериментално проверили и математички описали, нисмо ни начели питање које постоји колико и сама квантна механика. Који је њен здраворазумски, физички смисао и како да је интерпретирамо?

1.2 Јангов експеримент

Јангов експеримент са два прореза омогућава да јасно видимо мотивацију за настанак квантне механике пре него што је формално уведемо.

Поставка је врло једноставна. Замислимо препреку (као нпр. зид) са два отвора и иза те препреке застор на коме се налази детектор, тако да можемо да видимо, тј. измеримо где су завршили објекти који прођу кроз отворе.

Посматрајмо најпре шта се дешава када „гађамо“ препреку честицама, при чему замишљамо да је честица класичан објекат, као лопта или билијарска кугла (Слика 1). Оне честице које успеју да прођу кроз отворе ударају у препреку. На крају измеримо расподелу свих честица које су стигле до препреке.

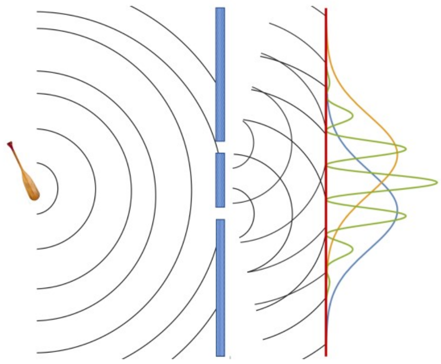


Слика 1: *Расподела код класичних честица*[1]

Претпоставимо да је у првом случају отворен само горњи прорез. Тада бисмо очекивали да се већина честица нађе директно иза прореза, што је представљено жутом кривом на Слици 1. Ако би, затим, горњи прорез био затворен, а доњи отворен, добили бисмо исту расподелу, само померену иза доњег отвора (плава крива на Слици 1).

Логичан је закључак да, када су отворена оба отвора, неке честице ће проћи кроз горњи, а неке кроз доњи, па ће финална расподела бити збир расподела појединачних отвора (зелена крива на Слици 1). Што је број честица већи, то ће расподела коју измеримо боље одговарати овом статистичком очекивању.

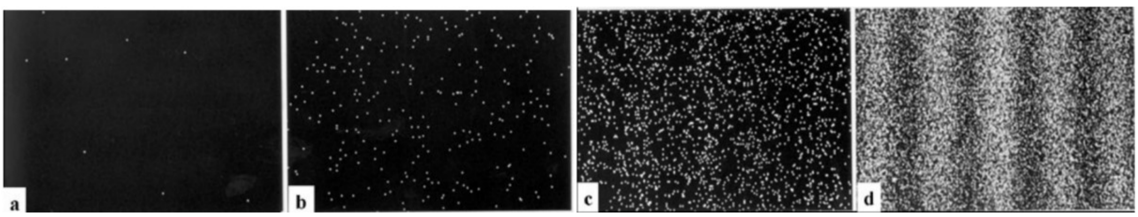
У наредном примеру, принцип је исти, али уместо билијарских кугли, гађамо препреку таласима, а прорезе смањимо тако да буду пропорционални таласној дужини. Ове таласе можемо једноставно замислити као звук који се шири из једне тачке или просто као таласе воде који се рашире када убацимо каменчић у мирно језеро. Када отворимо само један од прореза, талас ће моћи да прође само туда и наставиће да се шири иза њега као из новог извора. Ово важи једнако за горњи и доњи прорез (жута и плава крива на Слици 2). Када су отворена оба, понашају се као два тачкаста извора таласа. Поново ће резултат на заклону бити збир прве и друге расподеле, с тим што, када сабирамо таласе, не можемо да их „избројимо" као честице, већ добијамо интерференцију (зелена крива на Слици 2). Она је на неким местима конструктивна, а на неким деструктивна, па као коначну расподелу добијамо интерференциону слику, карактеристичну за таласе.



Слика 2: *Расподела код таласа*[1]

Дакле, добили смо класично очекивање за овај експеримент. Сада погледајмо шта се деси ако смањимо прорезе и честице до микроскопских размера. Гађајмо заклон, рецимо, фотонима, честицама светлости. Ако на заклону измеримо појединачни фотон, видећемо да исто као и класичну честицу, односно тачку на детектору (Слика 3а). Како повећавамо број фотона, очекивали бисмо да њихова расподела поново све приближније одговара расподели из првог примера. Значајно је поменути зашто уопште очекујемо да се фотон понаша као честица. Добар пример где се испољава такозвана честична природа електромагнетног зрачења (светлости) је **Комптонов ефекат**, који нам је открио да се судар фотона са електроном ни по чему математички не разликује од класичног судара две билијарске кугле, тј. може се описати законима одржања.

Вратимо се на наш експеримент са два прореза. Насупрот очекивању које смо мотивисали Комптоновим ефектом, када погодимо препреку великим бројем фотона, добијамо расподелу као из примера 2 (Слика 3д). Дакле, иако смо мислили да кроз отворе пролазе честице, на крају добијамо интерференциону слику, као код таласа!



Слика 3: *Интерференција код фотона*[1]

Појаве као што су Комптонов и фотоелектрични ефекат указали су на класично, честично понашање фотона. Са друге стране, експеримент са два прореза показао је да се у другачијим условима фотони понашају као таласи. Због овога је и настала позната пометња и питање „да ли је светлост честица или талас?" Данас то називамо **честично-таласним дуализмом**. Светлост није баш ни честица ни талас, већ се понаша на неки свој, нови начин (што ми некад интерпретирамо као честично, а некад као таласно понашање).

Тиме смо одговорили на недоумицу о природи светлости. Међутим, чак и ако заменимо фотоне неким другим микроскопским објектима, као на пример електронима, добијамо исти, чудни, таласно-честични резултат (експеримент са два прореза је потврђен чак и за молекуле сачињене од по 2000 атома!) Дакле, није у питању искључиво особина светлости. Ово указује на нову класу објеката, на неки нови свет, који се мора описивати другачијим законима од оних на које смо навикли.

2 Таласна функција и Шредингерова једначина

Да бисмо описивали проблеме у квантној механици, дефинисаћемо следеће појмове: систем, опсерваблу, ансамбл и мерење.

Дефиниција 1 *Систем има одређене особине на основу којих га можемо разликовати од других система, при чему подразумевамо да имамо мерни апарат који може да измери те особине.*

Дефиниција 2 *Особина, или опсервабла, се заснива на чињеници да је она опсервабилна, односно мерљива.*

Дефиниција 3 *Ансамбл је скуп система који имају неке заједничке особине, али могу имати различита стања.*

Дефиниција 4 *Мерење је процес одређивања (вредности) особина ансамбла. Ако сва мерења која могу да се изврше над два ансамбла дају исте резултате, сматра се да су ти ансамбли у истом стању.*

У класичној физици смо навикли на детерминистички приступ. Када опишемо тренутно стање и законе по којима се то стање мења у времену, из истих почетних услова увек морамо добити исти исход. Стање класичне честице описано је положајем и брзином, а мења се у складу са Њутновим једначинама кретања. У квантној механици систем описујемо пробабилистички, тачније можемо говорити о вероватноћама да се систем нађе у доступним стањима. Математички, та стања представљамо векторима.

2.1 Бра-кет нотација

Да бисмо додатно олакшали запис користимо Диракову или бра-кет нотацију.

$$\begin{gathered} |\psi\rangle \\ \langle\psi = |\psi\rangle^{\dagger}| = |\psi\rangle^{*T} \end{gathered} \tag{1}$$

У првом реду је тзв. *кет*, који представља вектор, а у другом *бра*, што представља његов адјунговани[1] (дуални) вектор.

2.2 Простор стања

Дефиниција 5 *Скаларни производ два стања* $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ *дефинисан је као*

$$\langle\phi|\psi\rangle \equiv (\psi, \phi). \tag{2}$$

Дефиниција 6 *Простор стања је векторски простор* $(\mathcal{H}, \langle|\rangle)$*, где је* $\mathcal{H}$ *скуп вектора којима су представљена сва могућа стања система и над којим је дефинисан скаларни производ.*[2]

2.3 Таласна функција

Као и у свакој теорији, квантна механика полази од одређених претпоставки, тј. постулата који се не доказују. Наравно, трудимо се да постулирамо што мање, односно изведемо што више из постојећих постулата. Уз то, постулати морају бити конзистентни са експериментом.

I постулат (о стањима): Свако чисто[3] стање квантног система представља се неким вектором јединичне норме у простору стања. Два вектора јединичне норме који се разликују до на фазни фактор представљају исто стање.

---

[1] Вектор ψ, коњугован и транспонован.

[2] Ово се у квантној механици зове Хилбертов простор, где вектори могу бити бесконачнодимензиони.

[3] Чисто стање значи да нема преклапања са другим стањима; нпр. ако говоримо о енергетским стањима, два различита стања не могу имати исту енергију; постоје и мешана стања, али њима се нећемо бавити.

Овај вектор називамо вектором стања. На различита стања можемо сликовито да гледамо као на различите правце у векторском простору стања. Што и јесте тачно. Свако стање можемо да представимо као линеарну комбинацију **основних стања**. Једноставно, ако уочимо да систем може да заузима нека два стања, он може да узима и сваку линеарну комбинацију тих стања. Ово се зове принцип **суперпозиције**. Скуп основних (базисних) стања назива се **базис**. Базис (или база) је у ствари минимални скуп стања преко ког се могу изразити сва стања система, а простор стања би онда био линеал базиса. Као што нам је познато из линеарне алгебре, базис није јединствен.

Дефиниција 7 *Таласна функција ψ је коефицијенӣ у развоју сӣања ӣо базису.*

Дакле, ако запишемо стање као линеарну комбинацију базисних стања, таласна функција је коефицијент који стоји уз одговарајуће стање.

Увођење таласне функције није мала измена у односу на класичну механику. Насупрот вектору положаја и брзине, уводими комплексну функцију, која, како ће се показати, садржи све информације потребне да се опише систем. Како нисмо поменули брзину, информација о њој мора такође бити садржана у таласној функцији. Уз то, ако знамо таласну функцију у тренутку t, она мора да садржи довољно информација да одредимо стање у било ком тренутку (видети одељак о временској еволуцији).[1]

Први постулат такође говори да, уколико се вектори разликују до на фазни фактор, они представљају исто стање

$$|\psi\rangle \longrightarrow e^{i\phi}\,|\psi\rangle\,. \tag{3}$$

Ако замислимо просторне векторе на које смо навикли, ово је аналогно са тиме да, ако вектор помножимо константом (скаларом), правац му остане исти.

2.4 Опсервабле и оператори

У овом одељку бавићемо се физичким величинама у квантној механици.

Дефиниција 8 *Пресликавање $A : U \to V$ из векӣорскоī ӣросӣора U у V је линеарни оӣераӣор ако важи*

$$(\forall\,|\psi\rangle\,,|\phi\rangle \in V)\,(\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R})\;\; A\left(\alpha\,|\psi\rangle + \beta\,|\phi\rangle\right) = \alpha A\,|\psi\rangle + \beta A\,|\phi\rangle\,.$$

Ако је $U = V$, тада је A линеарни оператор на датом векторском простору. Уобичајено је да за операторе користимо ознаку капице, $\hat{A}$, да бисмо их разликовали од бројева и функција.

Дефиниција 9 *Линеарни оӣераӣор A на векӣорском ӣросӣору са скаларним ӣроизводом назива се*

(1) хермиӣски ако је једнак свом адјунīованом

$$A = A^{\dagger} = A^{*T},$$

(2) униӣарни ако важи

$$AA^{\dagger} = A^{\dagger}A = I,$$

(3) ӣројекӣор ако је хермиӣски и идемӣоӣенӣан

$$A^2 = A,$$

īде је I иденӣиӣеӣ.[3]

II постулат (о опсерваблама): Свака опсервабла квантног система представљена је хермитским оператором у простору стања и обрнуто. Одређеној опсервабли одговара тачно један оператор.[2]

Дакле, у квантној механици класичне варијабле, тј. физичке величине прелазе у опсервабле, тј. операторе. Карактеристично је то што свакој физичкој величини коју налазимо у природи одговара баш хермитски оператор.

IV постулат (о квантизацији): Са класичних варијабли физичког система прелази се на опсервабле у простору стања $\mathcal{H}$ тако да важи:

(1) линеарна комбинација варијабли $\sum_i \alpha_i A_i$ прелази у исту линеарну комбинацију одговарајућих опсервабли $\sum_i \alpha_i \hat{A}_i$,

(2) прозвод AB две варијабле прелази у симетризовани производ одговарајућих опсервабли $\frac{\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}}{2}$,

(3) прелаз је непрекидан: варијабла која је лимес низа варијабли $L = \lim_{n\to\infty} A_n$ прелази у опсерваблу која је такође лимес низа одговарајућих опсервабли $\hat{L} = \lim_{n\to\infty} \hat{A}_n$,

(4) Поасонова заграда $\{A, B\}_{pz}$ прелази у комутатор одговарајућих опсервабли[4] $\frac{i}{\hbar}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \frac{i}{\hbar}\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)$,

(5) основни скуп варијабли $\{A_i\}$ прелази у основни скуп опсервабли $\left\{\hat{A}_i\right\}$.

2.5 Вероватноћа

Сама таласна функција нема физички смисао, тј. не одговара ниједном мерљивом параметру. Постоје различите интерпретације физичког, здраворазумског значења квантне механике, и таласне функције. Међутим, математички, све оне морају да се слажу и да одговарају експерименту. С друге стране, видећемо да квадратни модуо таласне функције има смисао и једнак је **густини вероватнће** да се честица нађе у одређеном стању.

III постулат (о вероватноћи): Када се на систему у чистом стању $|\psi\rangle$ изврши мерење опсервабле A, вредност на интервалу $[a, b]$ се добија са вероватноћом

$$v([a, b], A, |\psi\rangle) = \left|P_{[a,b]}(A)\,|\psi\rangle\right|^2 \equiv \langle\psi|\, P_{[a,b]}(A)\,|\psi\rangle\,, \tag{4}$$

где је $P_{[a,b]}(A)$ пројектор.[4]

То значи да декомпонује вектор стања и враћа компоненту која се односи на опсерваблу A. Дакле, када је стање изражено као линеарна комбинација основних стања, коефицијент уз свако од стања (односно таласна функција, као што налаже дефиниција 7) садржи информацију о вероватноћи за то стање. Пројектором издвајамо стање чија нас вероватноћа занима, а, према III постулату, ту вероватноћу добијамо као квадрат таласне функције која одговара том стању.

Сетимо се да I постулат намеће јединичну норму вектора стања. Норма се добија као збир квадрата свих таласних функција, односно збир вероватноћа за свако од стања. Дакле, видимо да јединична норма само значи да је вероватноћа да се систем нађе у *неком* од стања (као што нпр. знамо да се сигурно налази негде у простору). Ако је овај услов испуњен, кажемо да је таласна функција **нормализована**. Све таласне функције на које наилазимо у физици дају се нормализовати додавањем коефицијента (нормализационе константе). Уколико таласна функција није нормализабилна, не може нам дати информацију о вероватноћи, те се не односи на физички систем.

Дефиниција 10 *Вероватноћа да се оствари неко стање $|\phi\rangle$ при стању $|\psi\rangle$ дефинисана је као*

$$P(\phi)_\psi := |\langle\phi|\psi\rangle|^2\,. \tag{5}$$

Да бисмо илустровали разлику између квантних и класичних система, узмимо пример бацања коцке. Коцка је класичан објекат, за који разликујемо 6 различитих стања (у зависности од тога који број падне). Пошто је симетрична, све стране су једнако вероватне, па је вероватноћа за сваки од бројева $\frac{1}{6}$. Међутим, ако бисмо баш хтели да се потрудимо, могли

[4]Видети додатак на крају.

бисмо у теорији да одредимо на коју ће страну да падне са вероватноћом 1. Само бисмо морали да знамо почетно стање (положај и брзину коцке) и тачно на који начин смо је бацили (све силе које делују на њу). Ово је рачунски сложено, али добро дефинисано и теоријски изводљиво. О вероватноћи код класичнх система говоримо искључиво када немамо довољно информација да предвидимо тачне исходе, па се задовољавамо тиме да је коцка насумична (јер из перспективе човека који игра монопол ефективно јесте). Међутим, ако бисмо уместо коцке посматрали електрон, и покушали да предвидимо његово стање, највише што бисмо икако могли да одредимо је вероватноћа за то стање. Ово је фундаментална карактеристика квантних система и кључна разлика у односу на класичне. Дакле, дословно може да се деси да двапут поновимо исти експеримент, и добијемо различите исходе (с тим што ће стање које је највероватније да се понови највише пута).

2.6 Временски независна Шредингерова једначина

Дефиниција 11 *Својствене вредности и својствени вектори оператора $\hat{H}$ су сви скалари E и сви вектори стања за које важи*

$$\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle\,. \tag{6}$$

Ово се назива ***својствен проблем*** *оператора $\hat{H}$.*

Теорема 1 *Својствене вредности неке опсервабле H су све вредности из њеног спектра мерења, а својствена стања су сва основна стања.*

Ово важи у општем случају за све хермитске операторе, тј. опсервабле. **Хамилтонијан** је оператор енергије, јер генерише временску еволуцију (видети додатак на крају). У том случају, једначина (6) је позната као **временски независна Шредингерова једначина**. Она нам даје својствене вредности Хамилтонијана, за које се испоставља да представљају сва могућа енергетска стања система.

Теорема 2 *Нека су A и B неке опсервабле. Уколико важи*

$$[A, B] = 0, \tag{7}$$

A и B имају заједничка својствена стања.

У преводу, испоставља се да ако оператори комутирају, иста стања ће бити решења њихових својствених проблема (али својствене вредности могу бити различите).

2.7 Временска еволуција

Видели смо како у квантној механици представљамо физичке величине и стање система. Да бисмо тај систем комплетно описали, остаје још да одредимо како се он мења у времену.

V постулат (о временској еволуцији): Еволуција квантног система током временског интервала $[t_i, t_f]$ је процес у коме иницијално стање $|\psi, t_i\rangle$ прелази у финално стање $|\psi, t_f\rangle$, где је t_i иницијално, а t_f финално време,

$$|\psi, t_i\rangle \mapsto |\psi, t_f\rangle\,,$$

тако да важи

(1) промена је каузална: $|\psi, t_i\rangle \mapsto |\psi, t_f\rangle$ једнозначно,

(2) линеарност је очувана

$$|\psi, t_i\rangle = \alpha_1\,|\psi_1, t_i\rangle + \alpha_2\,|\psi_2, t_i\rangle \mapsto |\psi, t_f\rangle = \alpha_1\,|\psi_1, t_f\rangle + \alpha_2\,|\psi_2, t_f\rangle\,,$$

(3) број система у ансамблу је очуван,

(4) промена је континуална.

Да би временска еволуција била каузална, (1), што у преводу значи да узрок мора да се деси пре последице, прелазак из иницијалног у финални тренутак мора бити јединствен. Другим речима, постоји бијективно пресликавање из иницијалног у финално стање.

$$\exists \, \hat{U} : |\psi(t_i)\rangle \to |\psi(t_f)\rangle \tag{8}$$

$\hat{U}$ представља оператор временске еволуције

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t - t_i, t_i) \, |\psi(t_i)\rangle \tag{9}$$

за произвољни тренутак $t \in [t_i, t_f]$.

Пошто је очувана линеарност, (2), следи да $\hat{U}$ мора да буде линеарни оператор. Норма вектора је такође очувана

$$|\psi(t_i)|^2 = |\psi(t)|^2 \, . \tag{10}$$

Физика (па самим тим и норма вектора), мора да буде инваријантна на примену аутоморфизма. Ово можемо лако да схватимо, јер аутоморфизам, сликовито речено, само пермутује, тј. „преименује“ елементе векторског простора, у нашем случају стања из простора стања. За физику је свеједно како ми „преименујемо“ стања, тако да је инваријантна на деловање аутоморфизма. Како је $\hat{U}$ бијективно пресликавање на простору стања, оно и јесте аутоморфизам.

У Дираковој нотацији, (10) можемо да запишемо као

$$\langle \psi(t_i) | \psi(t_i) \rangle = \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle \, . \tag{11}$$

Применом (9) на (11) добијамо

$$\langle \psi(t_i) | \psi(t_i) \rangle = \langle \psi(t_i) | \, \hat{U}^\dagger(t - t_i, t_i) \, \hat{U}(t - t_i, t_i) \, | \psi(t_i) \rangle \, , \tag{12}$$

па следи

$$\hat{U}^\dagger(t - t_i, t_i) \, \hat{U}(t - t_i, t_i) = I. \tag{13}$$

По дефиницији 9, $\hat{U}$ је унитарни оператор.

Видимо да по V постулату временска промена мора бити непрекидна, (4), јер и време тече непрекидно. Исказ (9) важи у произвољном временском тренутку, па важи и

$$|\psi(t_f)\rangle = \hat{U}(t_f - t, t) \, |\psi(t)\rangle \, . \tag{14}$$

Ако заменимо (9) у (14) добијамо

$$|\psi(t_f)\rangle = \hat{U}(t_f - t, t)\hat{U}(t - t_i, t_i) \, |\psi(t_i)\rangle \, . \tag{15}$$

Међутим, опет из (9) знамо да је еволуција од t_i до t_f дата са

$$|\psi(t_f)\rangle = \hat{U}(t_f - t_i, t_i) \, |\psi(t_i)\rangle \, . \tag{16}$$

Дакле, из (15) и (16) закључујемо да за било које $t \in [t_i, t_f]$ важи

$$\hat{U}(t_f - t_i, t_i) = \hat{U}(t_f - t, t)\hat{U}(t - t_i, t_i). \tag{17}$$

Односно, еволуција од тренутка t_i до t_f је иста као еволуција прво од t_i до t, па затим од t до t_f.

Теорема 3 *За сваки унитарни оператор $\hat{U}$ постоји хермитски оператор $\hat{H}$ тако да важи*

$$\hat{U} = e^{i\hat{H}}.$$

Скица доказа:
Нека је $\hat{H}$ произвољан хермитски оператор и $\hat{U}$ оператор за који важи $\hat{U} = e^{i\hat{H}}$, онда је његов адјунг[5]

$$\hat{U}^\dagger = \left(e^{i\hat{H}}\right)^\dagger = e^{-i\hat{H}^\dagger}.$$

Из дефиниције 9 хермитског оператора је $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$, па имамо

$$\hat{U}^\dagger = e^{-i\hat{H}}.$$

Одатле следи

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = e^{i\hat{H}}e^{-i\hat{H}} = I,$$

чиме смо показали да је $\hat{U}$ унитарни оператор као што дефиниција 9 налаже.

2.8 Временски зависна Шредингерова једначина

Посматрајмо еволуцију од тренутка t_i до $t + dt$, при чему $dt \to 0$.

$$\hat{U}(t + dt - t_i, t_i) = \hat{U}(t - t_i, t_i)\,\hat{U}(dt, t) \tag{18}$$

Оператор еволуције између t и $t + dt$ по теореми 3 можемо да запишемо као

$$\hat{U}(dt, t) = e^{i\hat{H}'(dt,t)}, \tag{19}$$

где је $\hat{H}'(dt, t)$ хермитски оператор. Ако је временски корак 0, нема временске еволуције.

$$\hat{U}(0, t) = I = e^{i\hat{H}(0,t)} \tag{20}$$

Једначину (19) можемо да помножимо идентитетом тако да се ништа не промени.

$$\hat{U}(dt, t) = e^{i\hat{H}'(dt,t)}\hat{U}^{-1}(0, t) = e^{i\hat{H}'(dt,t)}e^{-i\hat{H}'(0,t)} = e^{i(\hat{H}'(dt,t)-\hat{H}'(0,t))} \tag{21}$$

Како је промена Хамилтонијана $d\hat{H}(dt, t) = \hat{H}'(dt, t) - \hat{H}'(0, t)$, имамо

$$\hat{U}(dt, t) = e^{i\,d\hat{H}'(dt,t)}. \tag{22}$$

Смемо да проширимо са dt:

$$\hat{U}(dt, t) = e^{i\,\frac{d\hat{H}'(dt,t)}{dt}dt}. \tag{23}$$

Након тога увешћемо смену $\hat{\text{Ђ}}(t) = \frac{d\hat{H}'(dt,t)}{dt}$, односно

$$\hat{U}(dt, t) = e^{i\hat{\text{Ђ}}(t)dt}. \tag{24}$$

Како $dt \to 0$, употребићемо Тејлоров развој првог реда.

$$\hat{U}(dt, t) = e^{i\hat{\text{Ђ}}(t)dt} = I + i\hat{\text{Ђ}}(t)dt \tag{25}$$

Враћањем у (18) добијамо

$$\begin{aligned}\hat{U}(t + dt - t_i, t_i) &= \hat{U}(t - t_i, t_i)\left(I + i\hat{\text{Ђ}}(t)dt\right)\\ &= \hat{U}(t - t_i, t_i) + i\hat{\text{Ђ}}(t)\hat{U}(t - t_i, t_i)dt,\end{aligned} \tag{26}$$

односно

$$i\hat{\text{Ђ}}(t)\hat{U}(t - t_i, t_i) = \frac{\hat{U}(t + dt - t_i, t_i) - \hat{U}(t - t_i, t_i)}{dt}. \tag{27}$$

Пошто $dt \to 0$, ово је по дефиницији извод

$$i\hat{\text{Ђ}}(t)\hat{U}(t - t_i, t_i) = \frac{d\hat{U}(t - t_i, t_i)}{dt}. \tag{28}$$

[5] Када број e дижемо на оператор (матрицу), то радимо преко Тејлоровог реда. Пошто адјунг (коњугат и транспон) пролази кроз суму, овде сме да прође у степен.

Сада можемо да видимо како обе стране једначине (28) делују на стање.

$$i\hat{\text{Ђ}}(t)\hat{U}(t-t_i,t_i)\,|\psi(t_i)\rangle = \frac{d\hat{U}(t-t_i,t_i)}{dt}\,|\psi(t_i)\rangle \tag{29}$$

Стање замрзнуто у тренутку t_i не зависи од времена, па сме да уђе под извод. Знамо да важи (9), па следи

$$i\hat{\text{Ђ}}(t)\,|\psi(t)\rangle = \frac{d\,|\psi(t)\rangle}{dt}. \tag{30}$$

Множењем са константом $i\hbar$, да би димензије биле одговарајуће, добијамо

$$i\hbar\frac{d\,|\psi(t)\rangle}{dt} = -\hbar\hat{\text{Ђ}}(t)\,|\psi(t)\rangle\,. \tag{31}$$

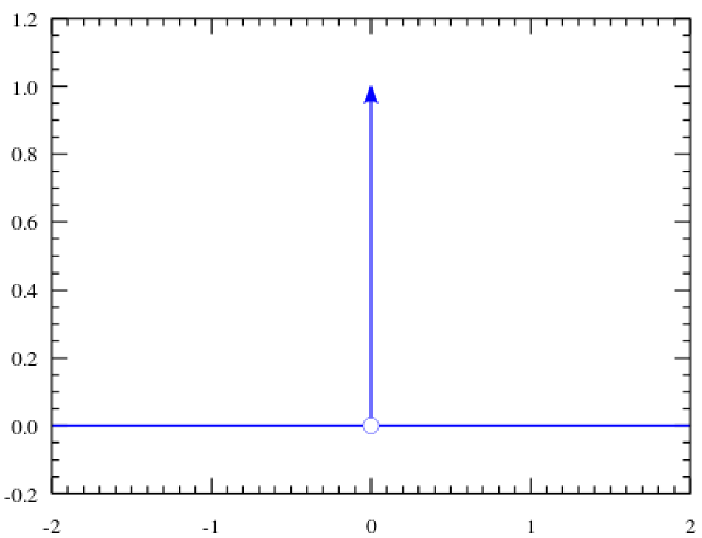
На крају, увођењем још једне смене $\hat{H}(t) = -\hbar\hat{\text{Ђ}}(t)$ добијамо

$$i\hbar\frac{d\,|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}(t)\,|\psi(t)\rangle\,. \tag{32}$$

Испоставља се да је оператор $\hat{H}$ баш Хамилтонијан. Израз (32) је **временски зависна Шредингерова једначина**.

2.9 Колапс таласне функције

Логично је да када измеримо положај електрона у тренутку t, са сигурношћу знамо да се налази у положају који смо измерили. Дакле, вероватноћа за тај положај је 1. Онда вероватноћа за све остале положаје мора бити 0. Иако је вероватноћа до тренутка t имала некакву расподелу по стањима, у тренутку t_+ непосредно након мерења постоји једино вероватноћа за измерено стање (Слика 4)[6]. Дакле, ако извршимо мерење, таласна функција се промени. Ово се зове **колапс таласне функције** и уопште није наивна појава. Не можемо да стекнемо информације о систему, а да тај систем не пореметимо, и то некад у врло значајној мери. Делује као да колапс таласне функције искључиво повећава наше знање, јер прецизно одређује вероватноћу. Међутим, таласна функција садржи и друге битне информације о систему, које се колапсом изгубе.



Слика 4: *Диракова делта функција*

Рецимо да желимо да одредимо колику силу притиска може да издржи мрав. Повећавамо силу, док не дођемо до оне коју не може да издржи и тако успевамо да одредимо њен максимум. Нажалост, у процесу смо згњечили мрава. Овај пример сликовито илуструје колико ја важно да имамо цео ансамбл, а не само један систем, да бисмо имали могућност понављања мерења.

[6]Вероватноћа узима вредност 1 за измерено стање и 0 за сва друга стања.

3 Топологија квантно-механичких стања

У овом и наредном одељку ћемо видети на који начин се топологија испољава у квантној механици. Примери последице тополошких особина квантних стања су Ахаронов-Бом ефекат и квантни Холов ефекат. У квантној механици све тополошке особине уочавају се кроз Бери фазу.

3.1 Бери фаза и Бери конексија

Већ смо видели да по I постулату свако стање одговара једном правцу у простору стања и сваки правац у простору стања одговара једном могућем стању система. Дакле, један правац преставља тачно једно стање, до на произвољан фазни фактор. Из овога делује да фаза нема физички смисао, пошто можемо произвољно да је изаберемо. Међутим, фазна разлика има, ако изаберемо различите фазе за различита стања.

Замислимо да посматрамо два система који могу да интерферирају, као што смо нпр. видели у Јанговом експерименту. Ако једном од њих пре интерференције променимо фазу, након интерференције промениће се вероватноћа за одређена стања. Кроз интерференцију можемо да уочимо и меримо фазну разлику, те постоје случајеви када је она релевантна.

Систем дефинише Хамилтонијан $H(\lambda^i, x^s)$ где x^s представља вектор координата и импулса, а λ_i вектор спољних параметара од којих зависи Хамилтонијан. Узмимо да је $|\psi\rangle$ својствено стање овог Хамилтонијана. Ако полако почнемо да мењамо параметре, имаћемо $|\psi(\lambda^i(t))\rangle$.

Адијабатска теорема: *Систем ће остати у датом својственом стању ако параметре мењамо довољно споро и ако постоји скок између тог стања и остатка спектра Хамилтонијана.*

Намеће се питање, шта значи довољно споро. У суштини, захтев је да приликом промене не дође до преклапања стања система (да два стања могу имати исту енергију), тј. да је поменути скок са посматраног стања на следеће довољно велики. Овај концепт смо већ виђали у термодинамици код квазистатичких процеса.

Пошто параметре мењамо споро тако да важи адијабатска теорема, да би стање остало исто, једино што може да се промени је фаза

$$|\psi\rangle \longrightarrow e^{i\gamma} |\psi\rangle . \tag{33}$$

Такође, параметре мењамо тако да се на крају вратимо назад на почетне, тј. да направимо затворену петљу (у простору параметара). Испоставља се да постоје два доприноса фази. Један је фаза коју смо видели да систем поприми услед временске еволуције (19) $e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}$. Она увек постоји и не занима нас тренутно, па ћемо је занемарити тако што ћемо посматрати основно својствено стање (стање најниже енергије), а скалу енергије померити тако да је основна енергија $E_0 = 0$.

На први поглед не видимо зашто би било другог доприноса фази, али има га и мерљив је. То је **Бери фаза**, која још представља и тополошку фазу, јер зависи од топологије простора параметара, тј. од броја различитих петљи које у њему можемо да направимо.

Да бисмо израчунали Бери фазу, упознаћемо се са другим тополошким особинама простора параметара. Кренућемо од временски зависне Шредингерове једначине (32)

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H(\lambda^i(t)) |\psi\rangle . \tag{34}$$

Рецимо да је $U(t)$ произвољна фаза

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi\rangle , \tag{35}$$

а $|\psi(0)\rangle = |\psi\rangle$ основно стање ($|\psi(t)\rangle$ је и даље исто стање, само са другом фазом). Бирамо почетни услов $U(0) = 1$, а $U(t)$ желимо да израчунамо. Да бисмо видели колика је фаза тражимо скаларни производ са стањем

$$\langle\psi(t)|\, i\hbar\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\, \hat{H}(\lambda(t))\,|\psi(t)\rangle\,. \tag{36}$$

Из (35) видимо да је дуални вектор стања

$$\langle\psi(t)| = \langle\psi|\, U^*(t). \tag{37}$$

Заменимо изразе за стање (35) и (37) у леву страну Шредингерове једначине (36).

$$\begin{aligned} LHS &= i\hbar\,\langle\psi|\, U^*(t)\, \left(\frac{d}{dt}U(t)\,|\psi\rangle\right) \qquad (38)\\ &= i\hbar\,\langle\psi|\, U^*(t)\, \left(\frac{dU(t)}{dt}\,|\psi\rangle + U(t)\frac{d\,|\psi\rangle}{dt}\right)\\ &= i\hbar\left(\langle\psi|\, U^*(t)\,\frac{dU(t)}{dt}\,|\psi\rangle + \langle\psi|\, U^*(t)\, U(t)\frac{d\,|\psi\rangle}{dt}\right) \end{aligned}$$

Пошто је фаза број, сме да изађе испред скаларног производа у првом сабирку. У другом сабирку, пошто је фаза облика $e^{i\gamma}$, користимо да је $UU^* = 1$.

$$LHS = i\hbar\left(U^*(t)\,\frac{dU(t)}{dt}\,\cancelto{1}{\langle\psi|\psi\rangle} + \langle\psi|\,\frac{d\,|\psi\rangle}{dt}\right) = i\hbar\left(U^*(t)\,\frac{dU(t)}{dt} + \langle\psi|\,\frac{d}{dt}\,|\psi\rangle\right) \tag{39}$$

Пошто су својствене вредности Хамилтонијана енергије (6), десна страна једначине (36) је

$$RHS = \langle\psi(t)|\, \text{Ђ}(\lambda(t)\,|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\, E_0(t)\,|\psi(t)\rangle = E_0(t) = 0. \tag{40}$$

Изједначавањем леве (39) и десне (40) стране добијамо

$$i\hbar\left(U^*(t)\,\frac{dU(t)}{dt} + \langle\psi|\,\frac{d}{dt}\,|\psi\rangle\right) = 0, \tag{41}$$

односно

$$U^*(t)\,\frac{dU(t)}{dt} = -\,\langle\psi|\,\frac{d}{dt}\,|\psi\rangle\,. \tag{42}$$

Даље можемо да проширимо са $d\lambda^i$.

$$-\,\langle\psi|\,\frac{d}{dt}\,|\psi\rangle = -\,\langle\psi|\,\frac{\partial}{\partial\lambda^i}\frac{d\lambda^i}{dt}\,|\psi\rangle = -\,\langle\psi|\,\frac{\partial}{\partial\lambda^i}\,|\psi\rangle\,\frac{d\lambda^i}{dt} = -\,\langle\psi|\,\partial_i\,|\psi\rangle\,\frac{d\lambda^i}{dt} \tag{43}$$

Изнад смо увели ознаку $\partial_i = \frac{\partial}{\partial\lambda^i}$. **Бери конексију** дефинишемо као[7]

$$\mathcal{A}_i(\lambda^i) = -i\,\langle\psi|\,\partial_i\,|\psi\rangle\,. \tag{44}$$

Заменом Бери конексије у (42), односно (43) даље добијамо

$$U^*(t)\,dU(t) = -i\,\mathcal{A}_i(\lambda^i)\,d\lambda^i \;\Leftrightarrow\; \frac{dU(t)}{U(t)} = -i\,\mathcal{A}_i(\lambda^i)\,d\lambda^i. \tag{45}$$

Да бисмо добили $U(t)$, треба да проинтегралимо обе стране.

$$\int_0^t \frac{dU(t)}{U(t)} = -i\oint\,\mathcal{A}_i(\lambda^i)\,d\lambda^i \tag{46}$$

Пошто мењамо параметре тако да се на крају вратимо на почетне, десну страну интегралимо по затвореној контури, па она не зависи од времена већ само од избора те контуре. Решавањем интеграла добијамо

$$\ln\frac{U(t)}{\cancelto{1}{U(0)}} = -i\oint\,\mathcal{A}_i(\lambda^i)\,d\lambda^i \tag{47}$$

[7] i поред минуса је имагинарна јединица, док се i у индексима односи на вектор λ

и на крају

$$U(t) = e^{-i \oint \mathcal{A}_i(\lambda^i) d\lambda^i}. \tag{48}$$

Бери фаза (33) је онда једнака

$$\gamma = -\oint \mathcal{A}_i(\lambda^i) d\lambda^i. \tag{49}$$

Као што можемо видети, Бери фаза нам говори о томе шта се дешава када мењамо параметре по затвореној путањи.

3.2 Бери кривина

Посматрајмо Бери конексију када стање поприми фазу. Из постулата знамо да су $|\psi\rangle$ и

$$|\psi'\rangle = e^{i\omega(\lambda^i)} |\psi\rangle \tag{50}$$

исто стање. Бери конексија за $|\psi'\rangle$ онда је једнака

$$\mathcal{A}'(\lambda^i) = -i \langle \psi' | \partial_i | \psi' \rangle . \tag{51}$$

Заменићемо (50) и израчунати

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'(\lambda^i) &= -i \langle \psi | e^{-i\omega(\lambda^i)} \frac{\partial e^{i\omega(\lambda^i)} |\psi\rangle}{\partial \lambda^i} \\
&= -i \langle \psi | e^{-i\omega(\lambda^i)} \left(\frac{\partial e^{i\omega(\lambda^i)}}{\partial \lambda^i} |\psi\rangle + e^{i\omega(\lambda^i)} \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial \lambda^i} \right) \\
&= -i \langle \psi | \cancel{e^{-i\omega(\lambda^i)}} \left(\cancel{e^{i\omega(\lambda^i)}} i \frac{\partial \omega(\lambda^i)}{\partial \lambda^i} + \cancel{e^{i\omega(\lambda^i)}} \partial_i \right) |\psi\rangle \\
&= \langle \psi | \big(\partial_i(\omega(\lambda^i)) - i\partial_i \big) |\psi\rangle \\
&= \partial_i \omega(\lambda^i) - i \langle \psi | \partial_i | \psi \rangle .
\end{aligned} \tag{52}$$

Приметимо да је десна страна баш Бери конексија оригиналног стања из једначине (44). Дакле, добили смо

$$\mathcal{A}_i(\lambda^i) = \mathcal{A}'_i(\lambda^i) + \partial_i \omega(\lambda^i). \tag{53}$$

Ово је калибрациона трансформација[8]. Можемо да уведемо тензор јачине поља, који је инваријантан на калибрацију. Дефинишемо **Бери кривину** као

$$\mathcal{F}_{ij}(\lambda) = \partial_i \mathcal{A}_j(\lambda) - \partial_j \mathcal{A}_i(\lambda). \tag{54}$$

Проверимо да заиста јесте инваријантна:

$$\mathcal{F}'_{ij}(\lambda) = \partial_i \mathcal{A}'_j(\lambda) - \partial_j \mathcal{A}'_i(\lambda) = \partial_i \left[\mathcal{A}_j(\lambda) - \cancel{\partial_j(\omega(\lambda))} \right] - \partial_j \left[\mathcal{A}_i(\lambda) - \cancel{\partial_i(\omega(\lambda))} \right] = \partial_i \mathcal{A}_j(\lambda) - \partial_j \mathcal{A}_i(\lambda = \mathcal{F}_{ij} \tag{55}$$

Покажимо још да је сама Бери фаза инваријантна на калибрацију

$$\gamma' = -\oint \mathcal{A}'_i(\lambda^i)\, d\lambda^i = -\oint \left[\mathcal{A}_i(\lambda^i) + \partial_i(\omega(\lambda^i)) \right] d\lambda^i = -\oint \mathcal{A}_i(\lambda^i)\, d\lambda^i - \oint \frac{\partial \omega(\lambda^i)}{\cancel{\partial \lambda^i}} \cancel{d\lambda^i} = \gamma - \cancelto{0}{\omega(\lambda)\Big|_{\lambda_0}^{\lambda_0}} = \gamma. \tag{56}$$

У неким ситуацијама нам више одговара да запишемо Бери фазу преко Бери кривине уместо конексије, јер је она инваријантна на калибрацију (55). То можемо да урадимо користећи Стоксову теорему[9]

$$\gamma = -\oint \mathcal{A}_i \, d\lambda^i = -\int_S \mathcal{F}_{ij} \, dS^{ij}, \tag{57}$$

где је S површина контуре по којој смо мењали параметре у простору параметара.

[8] Калибрација представља произвољни избор величина као што је векторски потенцијал, које уводимо да бисмо лакше решили систем, али не утичу на крајњу вредност мерљивих величина као што су електрично и магнетно поље.

[9] Аналогно Стоксовој теореми код електричног поља

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho \, dV,$$

где је ρ запреминска густина наелектрисања.

4 Ахаронов-Бом ефекат

Кроз овај пример ћемо видети зашто је Бери фаза значајна и како се користи. Посматрајмо цилиндар попречног пресека S и рецимо да магнетно поље делује само унутар тог цилиндра, као на Слици 5. Флукс магнетног поља кроз попречни пресек цилиндра је

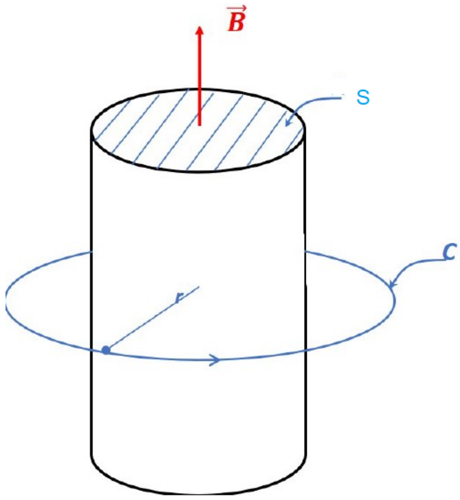
$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \tag{58}$$

Посматрајмо сада честицу која се налази ван цилиндра на фиксираном растојању r од центра. Магнетно поље можемо да запишемо као ротор векторског потенцијала[10] $\vec{A}$

$$B = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{59}$$

Ако убацимо то у једначину за флукс (58), можемо да применимо Стоксову теорему[11]

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \overset{\text{C.T.}}{=} \oint \vec{A}\, d\vec{r} = 2r\pi A_\varphi, \tag{60}$$



Слика 5: *Aharonov-Bom efekat*[6]

одакле добијамо

$$A_\varphi = \frac{\phi_B}{2r\pi}, \tag{61}$$

пошто је r фиксно па варира само угао. Лагранжијан честице у магнетном пољу је дат са

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - e\vec{v}\vec{A} \tag{62}$$

[5] . Пошто је у питању цилиндар, радимо у цилиндричним координатама

$$\vec{v} = \frac{d(\varphi r)}{dt} = \dot{\varphi} r. \tag{63}$$

Заменом ове две величине у једначину (62) добијамо

$$L = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - er\dot{\varphi}A_\varphi. \tag{64}$$

Из Лагранжијана онда можемо да добијемо ангуларну компоненту импулса

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}A_\varphi \tag{65}$$

и Хамилтонијан

$$H = p_\varphi \dot{\varphi} - L. \tag{66}$$

Из (65) ћемо изразити $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi + erA_\varphi}{mr^2} \tag{67}$$

и заменити у Хамилтонијан (66), па на крају добијамо

$$H = \frac{1}{2mr^2}\left(p_\varphi + erA_\varphi\right)^2. \tag{68}$$

Пошто је $L_z = p_\varphi$ (видети додатак), а A_φ зависи само од r, видимо да $[H, L_z] = 0$, па је по теореми 2 својствен проблем Хамилтонијана уједно и својствен проблем L_z.

[10] Векторски потенцијал није мерљива величина, већ га уводинмо као калибрацију. Имамо слободу избора векторског потенцијала, све док не утиче на крајњу вредност мерљивих величина, у овом случају магнетног поља.

[11] Генерално, кад год имамо интеграл по површини ротора неке величине, можемо да применимо Стоксову теорему и заменимо га кружним интегралом.

4.1 Својствен проблем L_z

Да бисмо одредили својствене вредности, почнимо од временски независне Шредингерове једначине

$$L_z |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle . \tag{69}$$

Занима нас шта се дешава за различите углове φ, па ћемо тако и назвати стања

$$\langle\varphi| L_z |\psi\rangle = \lambda \langle\varphi|\psi\rangle = \lambda\psi(\varphi). \tag{70}$$

У додатку смо одредили Lz (114), па је

$$-i\hbar \langle\varphi| \frac{\partial}{\partial\varphi} |\psi\rangle = \lambda\psi(\varphi), \tag{71}$$

односно

$$\frac{d\psi(\varphi)}{d\varphi} = i\frac{\lambda}{\hbar}\psi(\varphi). \tag{72}$$

Ми желимо да одредимо таласну функцију

$$\int \frac{d\psi}{\psi} = i\frac{\lambda}{\hbar} \int d\varphi, \tag{73}$$

$$\ln\psi = \frac{i\lambda}{\hbar}\varphi + \ln C.$$

Добили смо облик таласне функције

$$\psi(\varphi) = Ce^{i\frac{\lambda\varphi}{\hbar}}, \tag{74}$$

где је C нормализациона константа, коју ћемо накнадно одредити. Пошто се посматрана честица налази на кругу полупречника r, захтевамо услов

$$\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi). \tag{75}$$

Одатле следи

$$e^{i\frac{2\pi\lambda}{\hbar}} = 1. \tag{76}$$

Да би једначина (76) била задовољена, за својствене вредности L_z добијамо

$$\lambda = n\hbar, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{77}$$

Такође захтевамо јединичну норму

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \, |\psi(\varphi)|^2 = 1, \tag{78}$$

па добијамо

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{79}$$

На крају, својствена стања оператора ангулоарног момента L_z су

$$\psi_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\varphi}. \tag{80}$$

4.2 Својствен проблем Хамилтонијана

Одредили смо својствена стања L_z, па самим тим и Хамилтонијана. Сада желимо да одредимо својствене енергије.

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle \tag{81}$$

Пошто смо одредили својствене вредности оператора ангуларног момента, можемо их заменити у Хамилтонијан.

$$\langle\varphi| \frac{1}{2mr^2} \left(L_z + \frac{e\phi_B}{2\pi}\right)^2 |\psi\rangle = E \langle\varphi|\psi\rangle = E\psi(\varphi) \tag{82}$$

На крају за својствене енергије добијамо

$$E_n = \frac{1}{2mr^2}\left(n\hbar + \frac{e\phi_B}{2\pi}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{2mr^2}\left(n + \frac{\phi_B}{\phi_0}\right)^2. \tag{83}$$

Добили смо спектар у функцији од параметра ϕ_B. Нека се честица налазила у основном стању $n = 0$ и нека је у почетном тренутку флукс био искључен. Ако полако почнемо да га повећавамо, када достигне $\phi_B = \phi_0$, честица прелази у стање $n = 1$. Слично се дешава за свако $\phi_B = k\phi_0\,, k \in \mathbb{N}$, односно, ϕ_B и било које $k\phi_0$ имају исти спектар.

Ова појава назива се спектрални ток. Посматрајмо сада сличну поставку у којој је магнетно поље локализовано у неком делу простора и честицу заробљену у ограниченој области (кутији) ван тог дела простора. То математички представљамо потенцијалом, који у кутији може бити произвољан, али мора бити бесконачан на ивицама кутије. Сматрамо да постоји векторски потенцијал $\vec{A}$ у целом простору, па и унутар кутије, као и да је кутија довољно мала да се у њој $\vec{A}$ може сматрати константним. Ако је центар кутије постављен у тачки $\vec{X}$, Хамилтонијан је дат са

$$H = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - q\vec{A}(\vec{X})\right)^2 + V(\vec{x} - \vec{X}), \tag{84}$$

при чему је параметар који мењамо $\vec{A}(\vec{X})$. Замислимо да је у тренутку $t = 0$ кутија била постављена у тачку $\vec{X}_0$ тако да је $\vec{A}(\vec{X}_0) = 0$. Нека је основно стање честице са овим Хамилтонијаном дато са $|\psi_0(\vec{x} - \vec{X}_0)\rangle$. Ако полако померамо кутију кроз простор, то доводи до промене

$$|\psi_0(\vec{x} - \vec{X}_0)\rangle \to |\psi(\vec{x} - \vec{X})\rangle\,. \tag{85}$$

Тада мора да важи

$$|\psi(\vec{x} - \vec{X})\rangle = U(\vec{X}_0, \vec{X} - \vec{X}_0)\,|\psi_0(\vec{x} - \vec{X}_0)\rangle\,. \tag{86}$$

Применимо поново временски независну Шредингерову једначину.

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - q\vec{A}(\vec{X})\right)^2 |\psi(\vec{x} - \vec{X})\rangle + V(\vec{x} - \vec{X})\,|\psi(\vec{x} - \vec{X})\rangle = E_0(\vec{A}(\vec{X}))\,|\psi(\vec{x} - \vec{X})\rangle \tag{87}$$

Комбиновањем једначина (86) и (87) долазимо до услова

$$\left(-i\hbar\nabla - q\vec{A}(\vec{X})\right)^2 U(\vec{X}_0, \vec{X} - \vec{X}_0) = 0. \tag{88}$$

Из (88) следи

$$U(\vec{X}_0, \vec{X} - \vec{X}_0) = e^{i\frac{q}{\hbar}\int_{\vec{X}_0}^{\vec{X}} \vec{A}(\vec{x})d\vec{x}}. \tag{89}$$

Из израза (89) уочавамо шта је Бери конексија

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{X}) = -\frac{q}{\hbar}\vec{A}(\vec{X}). \tag{90}$$

На крају добијамо Бери фазу

$$\gamma = \frac{q}{\hbar}\oint \vec{A}d\vec{r} \overset{\text{С.Т.}}{=} \frac{q}{\hbar}\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) d\vec{S} \Rightarrow \gamma = \frac{q}{\hbar}\phi_B. \tag{91}$$

Дакле, када честица направи петљу око неког ограниченог магнетног поља, њено стање поприми фазу, иако магнетно поље не делује директно на њу! Резултат (91) представља Ахаронов-Бом ефекат.

5 Додатак

5.1 Подсетник из теоријске механике

Дефиниција 12 *Лагранжијан* $L = L(q_1, .., q_n, \dot{q}_1, .., \dot{q}_n)$ *је функција генералисаних координата* q_i *и њихових временских извода и једнак је*

$$L = T - U \tag{92}$$

где је T *кинетичка, а* U *потенцијална енергија.*

Временски извод означавамо тачком $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$.[12]

Дефиниција 13 *Генералисани импулс* p_i *једнак је*

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{93}$$

Дефиниција 14 *Хамилтонијан је функција генералисаних координата, генералисаних импулса и времена и једнак је*

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L. \tag{94}$$

Можемо скраћено да запишемо Хамилтонијан као функцију $H = H(p, q, t)$, где је $q = (q_1, .., q_n)$ и $p = (p_1, .., p_n)$, диференцијал Хамилтонијана је

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \tag{95}$$

Заменом (93) у (95) добијамо

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \left(\cancel{p_i d\dot{q}_i} + \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \cancel{p_i d\dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{96}$$

Са друге стране, диференцијал увек можемо да запишемо као

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \tag{97}$$

Из једначина (96) и (97) следи

$$\begin{gathered} \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{gathered} \tag{98}$$

Ово су **Хамилтонове (канонске) једначине кретања**.

Дефиниција 15 *Поасонова заграда произвољних функција* $f = f(q, p, t)$ *и* $g = g(q, p, t)$, *дефинише се као*

$$\{f, g\}_{pz} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \tag{99}$$

[12] Ово важи за велику класу система, али не увек.

Одредимо Поасонову заграду између Хамилтонијана и генералисане координате.

$$\{q_i, H\}_{pz} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \cancelto{0}{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right). \tag{100}$$

Видимо да је

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \delta_{ik}, \tag{101}$$

где је δ_{ik} Кронекерова делта и дефинише се као

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \tag{102}$$

Заменом једначина (101) и (98) у (100) добијамо

$$\{q_i, H\}_{pz} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \dot{q}_k = \dot{q}_i. \tag{103}$$

Закључак је да Хамилтонијан генерише временску еволуцију преко Поасонове заграде. Важно је поменути да у квантној механици очекујемо да Хамилтонијан генерише временску еволуцију преко комутатора, као што налаже IV постулат.

5.2 $L_z = p_\varphi$

Сада ћемо показати зашто је $L_z = p_\varphi$. Знамо из теоријске механике да импулс делује као извод, па је логично да очекујемо да тако буде и у квантној.

$$p_\varphi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{104}$$

Хајде да видимо шта се дешава када пребацимо компоненту ангуларног момента L_z у цилиндричне координате. У Декартовом координатном систему ангуларни момент је

$$L_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = x p_y - y p_x = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{105}$$

Прво ћемо изводе пребацити у цилиндричне координате:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned} \tag{106}$$

Везе Декартових и цилиндричних координата су следеће:

$$x = r \cos \varphi, \tag{107}$$

$$y = r \sin \varphi, \tag{108}$$

односно

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \tag{109}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{110}$$

Ако узмемо изводе по x и y од (109) и (110) добијамо

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi}{\partial x}cos^2\varphi = -\frac{y}{x},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}cos^2\varphi = \frac{1}{x},\\ \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{gathered} \tag{111}$$

Односно заменом (107) и (108) и сређивањем

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{sin\varphi}{r},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{cos\varphi}{r},\\ \frac{\partial r}{\partial x} = cos\varphi,\\ \frac{\partial r}{\partial x} = sin\varphi.\end{gathered} \tag{112}$$

Враћањем ових извода у (106) онда добијамо

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + cos\varphi\frac{\partial}{\partial r},\\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}.\end{gathered} \tag{113}$$

Када заменимо ово у (105) добијамо ангуларни момент

$$L_z = -i\hbar\left[rcos\varphi\left(\frac{cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cancel{sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}}\right) - rsin\varphi\left(-\frac{sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cancel{cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}}\right)\right] = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{114}$$

Из (104) и (114) видимо да је $p_\varphi = L_z$, што је и требало показати.

Литература

[1] David Tong. *Quantum Mechanics.* Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge.

[2] Fedor Herbut. *Kvantna mehanika za istraživače.* Fizički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 1999.

[3] Ivanka Milošević. *Vektorski prostori i elementi vektorske analize.* Univerzitet u Beogradu, 1997.

[4] Milan Damnjanović. *Incomplete lecture notes for the courses Quantum Mechanics I and II.* Faculty of Physics, University in Belgrade, 2022.

[5] David Tong. *Electromagnetism.* Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge, 2015.

[6] Stefan Đorđević. *Kvantni Holov efekat u grafenu.* Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2020.