Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

-из физике-

Фридманов изотропни космолошки модел

Ученик: Ментор:

Павле Смиљанић IVд др Бранислав Цветковић

Београд, јун 2020.

Садржај

1 Увод

1.1 Олберсов[1] парадокс

До појаве опште теорије релативности концензус између научника је био да је универзум статичан. Овај став, међутим, није био без својих контрааргумената, најпознатији од којих је Олберов парадокс, представљен 1826. године од стране Олберса. За почетак, претпоставимо да је геометрија универзума еуклидска као и да је универзум бесконачан. Затим претпоставимо да су број звезда у јединици запремине, као и просечна луминозност звезда константни у простору и времену, посматрано на довољно великим скалама. Последња претпоставка је да универзум постоји одувек и да је на великим скалама статичан.

Уочимо било коју тачку P у универзуму. Интензитет светлости који долази од било које љуске мале дебљине dr на растојању r од P једнак је количнику укупног интензитета светлости произведеног од стране љуске и њене површине

$$\frac{(4r^2\pi dr)n}{4r^2\pi} = n\,dr$$

Овде n представља производ просечног броја звезди у јединици запремине и просечне луминозности звезда. Лако закључујемо да је укупан интензитет светлости у тачки P једнак $\int_0^\infty n\,dr$, што је бесконачно. Међутим, једноставним посматрањем неба током ноћи закључујемо да ово није случај. Једна ствар која није урачуната је чињеница да светлост од далеких звезда може наићи на неку другу звезду пре него што дође до тачке P. Покажимо да иако урачунамо овај ефекат и даље долази до парадокса.

Пошто је универзум бесконачно стар и бесконачно велик, у ком год правцу да погледамо ми ћемо видети звезду. Нека је S површина произвољне звезде коју видимо, а r растојање до ње. Флукс светлости која је пореклом са ове звезде биће једнак

$$\frac{\mathrm{S}}{4r^2\pi}L = \sigma\Phi$$

Овде Φ представља флукс на површини просечне звезде. Приметимо да фактор σ представља део неба које заузима звезда коју посматрамо. Сумирањем флукса пореклом од свих појединачних звезда и чињеницом да је сума свих фактора σ од стране звезда које видимо једнак 1, добијамо да је флукс у тачки P једнак Φ. Са обзиром да је тачка P произвољна, ово би значило да је флукс у свакој тачки једнак Φ, као и да је у сваком правцу исти интензитет светлости. То очигледно није тачно, и из тога произилази парадокс.

[1] **Хајнрих Вилхелм Олберс (1758-1840), немачки астроном и физичар**

Олберс је као решење свог парадокса предложио постојање гаса у међузвезданом простору који ће апсорбовати радијацију далеких звезда. Међутим, под условом да је универзум бесконачно стар, овај гас би био загрејан на температуру на којој емитује исту количину радијације коју апсорбује, па просечна густина радијације неће бити смањена. Нека од могућих решења овог парадокса су била да универзум није бесконачно стар, статичан, да звезде нису свуда једнако распоређене, или било која комбинација ових решења. Са обзиром да нисмо још увек имали теорију која би дала одговор на овај парадокс, он је био више филозофске природе него физичке. То, међутим, не умањује његов значај у историји развитка модерне космологије, јер су потрага за његовим решењем, као и решењем сличних проблема довела до неких од највећих научних достигнућа у историји.

1.2 Општа теорија релативности

Физика је почела убрзано да се развија током 19. века, међутим наше теоретско схватање универзума, као и наше технолошке могућности нису довеле до решења Олберсовог парадокса. До револуције у нашем схватању универзума долази 1915. године са појавом Ајнштајнове[2] опште теорије релативности. Идеја да се универзум шири је постојала као решење Олберсовог парадокса, уклањајући предуслов статичног универзума, али је она први пут изведена из једначина опште теорије релативности 1922. године од стране Александра Фридмана[3]. Посматрањем црвеног помака далеких галаксија Едвин Хабл[4] је утврдио да се оне удаљавају од нас брзином која је линеарно пропорционална са њиховим растојањем од нас. Емпиријска једначина која представља ово ширење назива се Хаблов закон, и гласи

$$v = H_0 d$$

У овој једначини v представља брзину којом се далеки објекат удаљава од нас, d представља растојање до тог објекта, а H_0 представља **Хаблову константу** која износи отприлике $70 \frac{km}{s \cdot Mpc}$ (pc - парсек, представља растојање од око $3.0857 \cdot 10^{16} m$). Сада нам је било познато да се универзум шири, тачније да није статичан, и самим тиме Олберсов парадокс је решен. Међутим, резултати произашли из опште теорије релативности су имали далеко већу примену од решавања овог парадокса. Фридман је чињеницу да се универзум може ширити закључио из своје једначине, која је данас

---

[2] **Алберт Ајнштајн (1879-1955), немачко-амерички теоретски физичар**

[3] **Александар Александрович Фридман (1888-1925), руски и совјетски математичар и физичар**

[4] **Едвин Пауел Хабл (1889-1953), амерички астроном**

позната као **Фридманова једначина**. Она произилази из опште теорије релативности, и говори о природи универзума. Фридманова једначина је камен темељац модерне космологије и њен допринос модерној физици је огроман.

Ајнштајн је општу теорију релативности развио како би решио проблем кретања тела са променљивом брзином, што његова специјална теорија релативности, објављена 10 година раније, није успела да објасни. Прецизније, она је први пут објаснила гравитацију на бољи начин од Њутнове[5] теорије, као геометријско својство простора и времена, тачније простор-времена. Општа теорија релативности доводи до Ајнштајнових једначина поља, које су неопходне за разматрање релативистичке космологије, као и за релативистичко извођење Фридманове једначине.

[5] **Исак Њутн (1643-1727), енглески физичар, математичар, астроном и алхемичар**

2 Теоретски увод

2.1 Космолошки принцип

У 16. веку Никола Коперник[6] је представио свој хелиоцентрични модел у коме се Сунце поставља у центар универзума, а не Земља, као што се до тада сматрало. Космолошки принцип представља продужетак Коперниковог принципа јер, као што не бисмо очекивали да је Земља у привилегованој позицији у универзуму, исто то не бисмо очекивали ни од Сунчевог система, наше галаксије, или наше локалне групе галаксија. То подразумева да је у свакој епохи универзум **хомоген**, осим локалних нерегуларности. Такође не бисмо очекивали да постоје привилеговани правци посматрања, те кажемо такође да је универзум у свакој епохи **изотропан**, тачније сферно симетричан у односу на сваку тачку. Може се показати да уколико је универзум изотропан у односу на сваку тачку, онда он такође мора бити и хомоген. Универзум, наравно, на малим скалама није изотропан. Космолошки принцип не тврди да је универзум потпуно изотропан на свакој скали, већ само на довољно великим скалама. Звезде су организоване у галаксије, галаксије у галактичке кластере а галактички кластери у галактичке филаменте, што су огромне филаменталне структуре величина 200-500 милиона светлосних година. Тренутно нису откривене структуре у универзуму веће од галактичких филамената, и они делују као да су насумично распоређени по универзуму. Најбољи посматрачки доказ изотропности универзума јесте космичка микроталасна позадинска радијација, за коју се сматра да је остатак раног универзума настао у тренутку када је универзум постао прозоран за светлост. Она је изотропна до скале делића процента.

2.2 Вејлов[7] постулат

Мерењем брзина галаксија у односу на Земљу видимо да се оне не крећу пратећи Хаблов закон савршено, већ постоје мала одступања од предвиђене брзине. Оне представљају сопствено кретање галаксија, независно у односу на ширење универзума и Хаблов закон. Међутим, ова одступања су веома мала у односу на брзину светлости и показују да се галаксије крећу сличним редом величина брзина у сваком делу видљивог универзума, као и да су њихове брзине насумичне. Ово нам омогућава да универзум посматрамо имајући у виду Вејлов постулат који говори следеће: Све честице у универзуму се крећу по замишљеним линијама у простор-времену, које се називају геодезијаци, које дивергирају из заједничке полазне тачке прошлости.

---

[6] **Никола Коперник, пољски астроном, математичар, правник, лекар и економиста**

[7] **Херман Клаус Хуго Вејл, немачки математичар**

Постулат захтева да се ове тачке не секу нигде сем у тој тачки у прошлости, и можда сличној тачки у будућности. То нам говори да кроз сваку тачку у простор-времену пролази тачно један геодезијак, и самим тиме честица у свакој тачки постор-времена има јединствену брзину. Вејлов постулат се у потпуности подудара са нашим универзумом ако је кретање свих честица у њему услед ширења универзума, што је на великим скалама тачно, јер су сопствене брзине галаксија занемарљиве у односу на брзину светлости, док су брзине услед ширења универзума упоредиве са њом. Вејлов постулат нам омогућава да простор-време посматрамо као савршен флуид.

2.3 Општа теорија релативности

Коначно, за разумевање модерне космологије неопходна је општа теорија релативности. Општа теорија релативности је неопходна у извођењу Фридманове једначине, и овде ће фокус бити на објашњавању процеса извођења. Ајнштајн је полазећи од неколико постулата опште теорије релативности успео да дође до скупа једначина које описују гравитациону интеракцију као последицу закривљења простор-времена. Оне су тензорске једначине, и један од облика у којима се могу написати је следећи

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

За почетак, објаснимо шта означавају елементи ове једначине. $T_{\mu\nu}$ је нешто што се назива енергија-импулс тензор, и нама ће бити потребан његов изглед за савршен флуид. $R_{\mu\nu}$ је Ричијев тензор, и њега ћемо наћи из метрике. R је ричијев скалар и он се може наћи помоћу ричијевог тензора и метрике. Последња 2 говоре о закривљењу простора. Λ је космолошка константа, и о њој ће бити говора касније. Коначно, $g_{\mu\nu}$ је метрика. Грчка слова μ и ν се крећу од 0 до 3, где 0 означава временску компоненту, а 1,2,3 означавају 3 просторне компоненте простор-времена. О метрици ћемо прво да причамо.

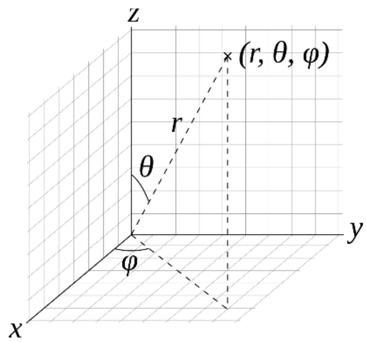
Метрика описује растојање између блиских тачака у простор-времену. Можемо израчунати просторно-временски интервал између 2 тачке помоћу следеће формуле

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.2}$$

Неопходно је наћи метрику која одговара космолошком принципу. Дакле, ни у једном тренутку универзум нема преферирану локацију. Ово нам говори да ће ова метрика имати исто закривљење у свом просторном делу. Може се показати да за просторе константне кривине мора важити

$$ds_3{}^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) \tag{2.3}$$

Овде се ds_3 односи само на просторне координате. Користимо сферни поларни координатни систем, са дужинском координатом r и угаоним координатама θ и φ.



Слика 2.1 Сферни поларни координатни систем

Овде константа k означава закривљење простора, и може се скалирати тако да узима једну од вредности $\{-1,0,1\}$, у зависности од знака. Фали нам још временстка кордината. Може се показати да је метрика која је у складу са космолошким принципом **Фридман-Лематре[8]-Робертсон[9]-Вокерова[10] метрика (ФЛМР метрика)**, до које су независно дошли људи у њеном називу током 1920-их и 1930-их година, и која изгледа овако

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \right) \tag{2.4}$$

Овде користимо конвенцију записивања у општој теорији релативности у којој се узима да је $c = 1$, те поред dt не стоји c^2, већ се подразумева. Пошто општа теорија релативности дозвољава да се простор шири или скупља, увели смо скејл фактор $a(t)$ који говори о том ширењу или скупљању. Он је униформан унутар једне епохе услед космолошког принципа. Сада када знамо изглед метрике, могуће је да дођемо до Ричијевог тензора и Ричијевог скалара. Прво морамо израчунати нешто што се називају Кристовелови симболи помоћу следеће формуле.

$$\Gamma^l_{ji} = \frac{1}{2} g^{lm}(\partial_j g_{mi} + \partial_i g_{mj} - \partial_m g_{ij}) \tag{2.5}$$

Овде латинична слова означавају координате у нашем координатном систему, где m представља суму кроз све координате које нису коришћене. Овде је g^{lm} инверз метрике дефинисан са $g^{ji} g_{ik} = \delta^j{}_k$, где је δ ознака за Кронекерову делту. Помоћу Кристовелових симбола можемо наћи Риманов тензор

$$R^l_{kji} = \partial_i \Gamma^l_{kj} - \partial_j \Gamma^l_{ki} + \Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{mi} - \Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{mj} \tag{2.6}$$

---

[8] **Жорж Леметр (1894-1966), белгијски свештеник, астроном и професор физике**

[9] **Хауард Робертсон (1903-1962), амерички математичар и физичар**

[10] **Артур Вокер (1909-2001), британски математичар**

Из Римановог тензора можемо наћи Ричијев тензор. Нама ће бити потребни само компоненте Ричијевог тензора са 2 исте координате. Ричијев тензор се налази на следећи начин

$$R_{ii} = R^{m}_{imi} \tag{2.7}$$

Ричијев скалар се налази на следећи начин

$$R = g^{ik} R_{ik} \tag{2.8}$$

Једина ствар која је преостала јесте енергија-импулс тензор. Конкретно, ми ћемо расправити о изгледу овог тензора за савршен флуид, што по Вејловом постулату наш универзум можемо сматрати да јесте. Изглед овог тензора у општем случају за савршен флуид је

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} \tag{2.9}$$

Овде ρ и p претстављају редом густину и притисак флуида који су због космолошког принципа униформни у времену, а u_μ представља брзину кретања у μ оси простор-времена. Наш систем је изотропан, те не сме имати преферирани смер, и зато знамо $u_r = u_\theta = u_\varphi = 0$. Такође се може показати и да је $u_t = 1$. Већ знамо како изгледа метрика, тако да знамо да важи $g_{tt} = 1$. Сада можемо одредити изглед енергија-импулс тензора.

$$T_{\mu\nu} = \begin{cases} \rho, & \mu = \nu = 0 \\ -p g_{\mu\nu}, & \mu = \nu \neq 0 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \tag{2.10}$$

Ово је све што ће нам требати да дођемо до Фридманове једначине користећи општу теорију релативности.

3 Извођење Фридманове једначине

3.1 Нерелативистичко извођење Фридманове једначине

До Фридманове једначине је могуће доћи користећи само Њутнову теорију, без укључивања опште теорије релативности, и резултујућа једначина ће бити идентична. Међутим, ово извођење није комплетно и општа теорија релативности је неопходна да се закрпе рупе у процесу. Такође се користе космолошки принцип и Вејлов постулат.

Посматрамо униформни медијум који се шири. Нека је његова густина масе ρ. Због космолошког принципа смемо центар да ставимо у било коју тачку. Посматрајмо сада пробну честицу на растојању r од центра и са масом m (под „честица" овде се заправо мисли на веома малу запремину са масом m). На основу Њутнове *shell* теореме, знамо да је гравитациона сила која делује на пробну честицу једнака

$$F_g = \frac{GM(r)m}{r^2} = \frac{4\pi G\rho r m}{3} \tag{3.1}$$

Гравитациона потенцијална енергија пробне честице је

$$V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{4\pi G\rho r^2 m}{3} \tag{3.2}$$

Кинетичка енергија пробне честице је

$$T = \frac{m\dot{r}^{2^*}}{2} \tag{3.3}$$

На крају, уведимо космолошку силу која делује на честицу. Ова сила нема своје корене у Њутновој, већ у Ајнштајновој теорији, али уколико је уведемо на следећи начин она ће резултовати у комплетнијој Фридмановој једначини.

$$F_c = \frac{\Lambda m r}{3}$$

У овој једначини Λ означава **космолошку константу**, има јединицу [дужина]$^{-2}$, и о њој, као и о овој сили ће бити говора касније. За сада, довољно је да знамо потенцијалну космолошку енергију

$$V_c = \int F_c(r)dr = -\frac{\Lambda m r^2}{6} \tag{3.4}$$

[*] **Ознака $\dot{r}$ означава извод r по времену**

Применом закона одржања енергије добијамо

$$U = T + V + V_c$$

Тачније

$$U = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{4\pi G\rho r^2 m}{3} - \frac{\Lambda m r^2}{6} \tag{3.5}$$

Ова једначина описује еволуцију растојања r између неке 2 тачке. Међутим, због космолошког принципа, ова једначина важи за било које 2 тачке у универзуму. Претпоставимо параметре нашег система у некој епохи t_0. Радијално кретање услед експанзије се може описати помоћу једначине

$$r(t) = a(t)r(t_0) = a(t)x \tag{3.6}$$

где је $a(t)$ универзална функција свих честица која се назива **скејл фактор**, а x константа. Супституцијом једначине (3.6) у једначину (3.5) добијамо

$$U = \frac{m\dot{a}^2 x^2}{2} - \frac{4\pi G\rho a^2 x^2 m}{3} - \frac{\Lambda m a^2 x^2}{6} \tag{3.7}$$

Увођењем $k = -2U/mc^2x^2$ и сређивањем једначине добијамо

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{3.8}$$

Једначина (3.8) се назива **Фридманова једначина.**

Овде је неопходно објаснити значење k. Са обзиром да је сваки члан у једначини независтан од x, мора бити да је и k независно од x због хомогености. Такође, за неки одређени тренутак x је фиксирано, а због закона одржања енергије важи и да је U независно од t, те закључујемо да k не зависи ни од t. Дакле, k је константа у простору и времену јединице [дужина]$^{-2}$. Универзум који се шири има константу k која остаје иста током еволуције система. Касније ћемо дискутовати геометријска својства k.

3.2 Једначина флуида

Следеће што треба размотрити је фактор ρ. Он се, наравно, мења током епоха и константан је само у одређеном тренутку. Применимо први закон термодинамике на сферу полупречника r која се изотропно шири.

$$dE + pdV = TdS \tag{3.9}$$

Овде p представља притисак у уиверзуму који је због космолошког принципа свуда исти.

Еквиваленција масе и енергије нам говори о промени енергије

$$E = mc^2 = \frac{4}{3}r^3\pi\rho c^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 4r^2\pi\rho c^2\dot{r} + \frac{4}{3}\,r^3\pi c^2\dot{\rho} \qquad (3.10)$$

Такође знамо и промену запремине

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\dot{r} \qquad (3.11)$$

Претпоставимо да је систем реверзибилан, те не постоји промена ентропије током времена. Однос растојања је скејл фактор, те важи $\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{a}}{a}$. Убацивањем једначина (3.10) и (3.11) у (3.9) и сређивањем добијамо

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \qquad (3.12)$$

Једначина (3.12) се назива **једначина флуида**.

Битно је напоменути да је притисак свуда једнак, те не постоји градијент који би изазвао појаву силе услед разлике у притиску. Закључујемо да густина зависи од притиска, што једначину флуида чини **једначином стања**. Различити космолошки модели разматрају различите вредности p и ρ у зависности од састава универзума.

3.3 Једначина убрзања

Диференцијацијом Фридманове једначине по времену, убацивањем једначине флуида и сређивањем добијамо **једначину убрзања** која говори о убрзању скејл фактора током времена

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \qquad (3.13)$$

Једначина убрзања, као и претходне 2 битне једначине се најчешће пишу у облику у коме се густина ρ односи на густину енергије, а не масе. Оне су повезане еквиваленцијом масе и енергије. Такође се често поставља и $c = 1$, те тај фактор c нестаје из једначина, а константе k и Λ узима јединицу [време]$^{-2}$.

3.4 Релативистичко извођење Фридманове једначине

За релативистичко извођење Фридманове једначине, као и једначина убрзања и флуида, неопходно је у обзир узети у обзир 3 ставке

1) **Космолошки принцип**
2) **Вејлов постулат**
3) **Општа теорија релативности**

На начин који је објашњен у делу 2.3 ћемо доћи до Фридманове једначине.

Извођење почињемо узимањем у обзир ФЛРВ метрику у сферном координатном систему, као и Ајнштајнових једначина поља

$$ds^2 = dt^2 - a^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right);\ a = a(t) \tag{3.14}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.15}$$

За почетак, покажимо како изгледа метрички тензор за ФЛМР метрику, што директно излази из формулације ФЛПВ метрике:

$$g_{tt} = 1,\ g_{rr} = -\frac{a^2}{1-kr^2},\ g_{\theta\theta} = -a^2r^2,\ g_{\varphi\varphi} = -a^2r^2\sin^2\theta \tag{3.16}$$

Сви остали чланови су једнаки нули.

Затим следи израчунавање Кристовелових симбола. Користимо

$$\Gamma^l_{ji} = \frac{1}{2}g^{lm}(\partial_j g_{mi} + \partial_i g_{mj} - \partial_m g_{ij}) \tag{3.17}$$

Већина Кристовелових симбола ће бити симетрична или једнака нули. Не нулти чланови су

- $\Gamma^t_{rr} = \dfrac{a\dot{a}}{1-kr^2}$
- $\Gamma^t_{\theta\theta} = r^2 a\dot{a}$
- $\Gamma^t_{\varphi\varphi} = r^2 a\dot{a}\sin^2\theta$
- $\Gamma^i_{it} = \Gamma^i_{ti} = \dfrac{\dot{a}}{a}, i \in \{r,\theta,\varphi\}$
- $\Gamma^r_{rr} = \dfrac{kr}{1-kr}$
- $\Gamma^r_{\theta\theta} = -r(1-kr^2)$
- $\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r(1-kr^2)\sin^2\theta$
- $\Gamma^i_{ir} = \Gamma^i_{ri} = \dfrac{1}{r}, i \in \{\theta,\varphi\}$
- $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$
- $\Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg}\theta$

Следећи корак је рачунањеРимановог тензора, и затим Ричијевог тензора. Користимо

$$R^l_{kji} = \partial_i \Gamma^l_{kj} - \partial_j \Gamma^l_{ki} + \Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{mi} - \Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{mj} \tag{3.18}$$

$$R_{ii} = R^m_{imi} \tag{3.19}$$

Добијамо следеће вредности

- $R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$
- $R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2k}{1 - kr^2}$
- $R_{\theta\theta} = r^2 a\ddot{a} + 2r^2\dot{a}^2 + 2r^2 k$
- $R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta\,(r^2 a\ddot{a} + 2r^2\dot{a}^2 + 2r^2 k)$

Приметимо да за последње 3 вредности Ричијевог тензора важи

$$R_{ii} = -\frac{g_{ii}}{a^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), i \in \{r, \theta, \varphi\} \tag{3.20}$$

Следећи корак је да израчунамо Ричијев скалар

$$R = g^{ik}R_{ik} = -6\frac{\ddot{a}}{a} - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 6\frac{k}{a^2} \tag{3.21}$$

Остало је још да се позовемо на изглед енергија-импулс тензора за наш систем

$$T_{\mu\nu} = diag(\rho, -pg_{rr}, -pg_{\theta\theta}, -pg_{\varphi\varphi}) \tag{3.22}$$

Сада имамо све што нам је потребно да решимо Ајнштајнове једначине. Прво ћемо решити време-време једначину.

$$R_{tt} - \frac{1}{2}Rg_{tt} - \Lambda g_{tt} = 8\pi G T_{tt}$$

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}\left(-6\frac{\ddot{a}}{a} - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 6\frac{k}{a^2}\right) - \Lambda = 8\pi G\rho$$

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{k}{a^2} - \Lambda = 8\pi G\rho$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{3.23}$$

Као што можемо видети, из време-време Ајнштајнове једначине смо добили Фридманову једначину. Она је идентична Фридмановој једначини коју смо добили из Њутнове физике, само што овде константа k има друго значење, које ће касније бити ближе објашњено.

Остаје нам да решимо преостале 3 Ајнштајнове једначине. Коју год да узмемо ми ћемо доћи до истог идентитета. Користећи (3.20)

$$-\frac{g_{ii}}{a^2}(a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k)-\frac{1}{2}Rg_{ii}-\Lambda g_{ii}=8\pi G(-p)g_{ii}$$

$$-\frac{\ddot{a}}{a}-2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2-2\frac{k}{a^2}+3\frac{\ddot{a}}{a}+3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+3\frac{k}{a^2}-\Lambda=-8\pi Gp$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a}+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{k}{a^2}-\Lambda=-8\pi Gp \tag{3.24}$$

Када од једначине (3.24) одузмемо (3.23) и средимо добијамо

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}\left(\rho+\frac{3p}{c^2}\right)+\frac{\Lambda c^2}{3} \tag{3.25}$$

Тачније, добили смо једначину убрзања. Уколико обрнемо процес којим смо првобитно добили једначину убрзања, добићемо једначину флуида.

$$\dot{\rho}=-\frac{3\dot{a}}{a}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right) \tag{3.26}$$

Дакле, користећи принципе опште теорије релативности добили смо исте три, односно две независне једначине као и у Њутновој физици. Остаје нам да се ове једначине испитају и реше при различитим условима.

4 Разумевање Фридманове једначине

У овом поглављу ћемо се осврнути на појашњење одређених делова Фридманове једначине, као и на неке њене једноставније последице.

4.1 Геометрија универзума

Геометрију универзума описује константа k. Као што је већ речено, она се може скалирати тако да има једну од вредности {0,+1,-1}.

4.1.1 Случај $k = 0$

Сетимо се једначине (2.3) која говори о растојањима у оквиру 3 просторне димензије простор-времена. Њој недостаје скејл фактор, који ћемо јој додати сада

$$d{s_3}^2 = a^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right) \tag{4.1}$$

Константа k узима једну од 3 вредности. Почнимо са најједноставнијим случајем $k = 0$. Сада једначина (4.1) поприма следећи облик

$$d{s_3}^2 = a^2\big(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\big) \tag{4.2}$$

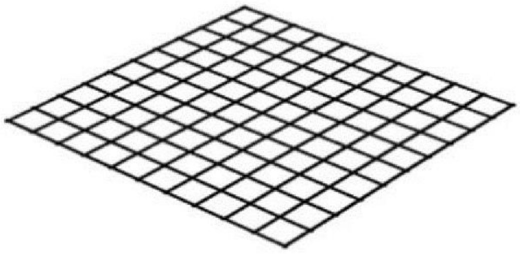
Уколико уведемо картезијске координате

- $x = ar\sin\theta\cos\varphi$
- $y = ar\sin\theta\sin\varphi$
- $z = ar\cos\theta$

Увидећемо да важи

$$d{s_3}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{4.3}$$

Ово је очигледно тродимензионални Еуклидски простор. Ово чини простор-време четвородимензионалним Еуклидским простором. Топологија овог универзума се назива **равна.**



Слика 4.1 Раван универзум

4.1.2 Случај $\boldsymbol{k = +1}$

У овом случају једначина (4.1) прима облик

$$ds_3{}^2 = a^2\left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right) \tag{4.4}$$

Уколико уведемо $r = \sin\chi$, једначина прима облик

$$ds_3{}^2 = a^2\big(d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\big) \tag{4.5}$$

Уведимо сада следеће координате

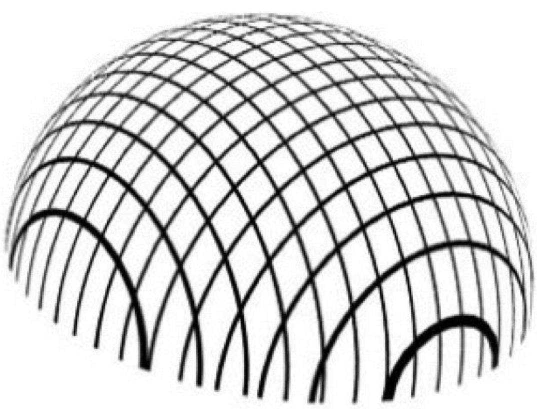
- $w = a\cos\chi$
- $x = a\sin\chi\sin\theta\cos\varphi$
- $y = a\sin\chi\sin\theta\sin\varphi$
- $z = a\sin\chi\cos\theta$

Добијамо да важи

$$ds_3{}^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{4.6}$$

$$a^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{4.7}$$

Геометрија овог универзума је елиптична. Ово нам говори да универзум можемо посматрати као затворену сферу тродимензионалне површине у четвородимензионалном Еуклидском простору. Топологија оваквог универзума је **затворена**.



Слика 4.2 Затворени универзум

4.1.3 Случај $k = -1$

У овом случају једначина (4.1) прима облик

$$d{s_3}^2 = a^2\left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right) \tag{4.8}$$

Уколико уведемо $r = \sinh\chi$, једначина поприма облик

$$d{s_3}^2 = a^2\big(d\chi^2 + \sinh^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\big) \tag{4.9}$$

Уведимо сада следеће координате

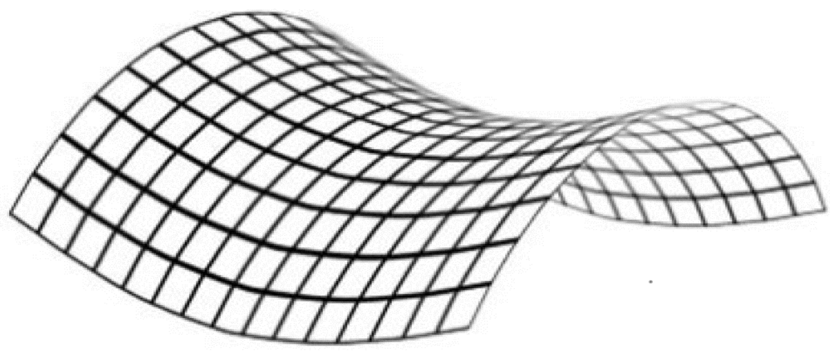
- $w = a\cosh\chi$
- $x = a\sinh\chi\sin\theta\cos\varphi$
- $y = a\sinh\chi\sin\theta\sin\varphi$
- $z = a\sinh\chi\cos\theta$

Добијамо да важи

$$d{s_3}^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{4.10}$$

$$a^2 = w^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{4.11}$$

Ово нам показује да је геометрија оваквог универзума је хиперболичка. Топологија оваквог универзума је **отворена.**



Слика 4.3 Отворени универзум

4.2 Космолошка константа

Космолошку константу Λ први пут је увео Ајнштајн. Она се појавила као члан у Ајнштајновим једначинама. Наиме, за одређену позитивну вредност Λ у затвореном универзуму скејл фактор је константан. Ајнштајн је, попут већине људи у свом времену, веровао да је универзум статичан, те је хтео да конструише модел који подржава ту хипотезу. Међутим, након што је Хабл показао да универзум није статичан и да се шири Ајнштајн је одбацио идеју о не нултој космолошкој константи. Веровање међу научницима је било да је $\Lambda = 0$ све док 1990-их није показано да се ширење универзума убрзава. Ово откриће је могуће објаснити са позитивном космолошком константом.

Посматрањем Λ у оквиру Фридманове једначине можемо видети како космолошка сила утиче на вредност убрзања скејл фактора током времена, где га позитивна вредност повећава, а негативна смањује

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{4.12}$$

У зависности од вредности космолошке константе, као и вредности закривљења простора k, врши се класификација Фридманових модела.

4.3 Хаблов закон

Хаблов закон је првобитно емпиријски утврђен посматрањем црвеног помака далеких галаксија. Методологија овог посматрања се заснива на мерењу Доплеровог померања спектралних линија. Овај закон је лако показати у оквиру Фридманове теорије.

Нека је v радијална брзина којом се нека далека тачка на растојању r удаљава од посматрача. Подсетимо се да занемарујемо сва кретања која нису услед ширења универзума. На међугалактилким дистанцама ова кретања и јесу занемарљива. Брзину удаљавања можемо написати на следећи начин

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{r\,dt} r \tag{4.13}$$

Растојање можемо написати као $r = a(t)x$, односно $dr = x\,da(t) = x\dot{a}dt$. Уколико ово убацимо у (4.13) добијамо

$$v = \frac{x\dot{a}dt}{a\,xdt} r = \frac{\dot{a}}{a} r \tag{4.14}$$

Дакле, добијамо вредност Хаблове константе у функцији од скејл фактора. Сада можемо видети да Хаблова константа уопште није константна у времену, те користимо назив Хаблов параметар, док се Хаблова константа H_0 односи углавном на данашњу вредност Хабловог параметра. Користећи $H = \frac{\dot{a}}{a}$ можемо написати Хаблов закон и Фридманову једначину на следећи начин

$$v = Hr \tag{4.15}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{4.16}$$

Хаблов закон се често користи у астрофизици, јер се помоћу њега лако могу одредити растојања до било ког далеког објекта.

Један од првих закључака до ког су научници дошли након открића Хабловог закона је био тај да ако се универзум ширио у свакој својој епохи, то мора значити да је он у једном тренутку био бесконачно мали. Ово је довело до оснивања **теорије великог праска**. Тренутак у коме је почело ширење универзума назван је велики прасак, и данас је то опште прихваћена теорија међу научницима. Ајнштајн је још и пре открића Хабловог закона увидео да његова теорија подржава велики прасак. Старост универзума се дефинише као време које је прошло од великог праска до данашњег дана. За различите вредности Хаблове константе као и за различите космолошке моделе добијају се различите вредности старости универзума.

4.4 Композиција универзума

Да бисмо могли да решимо Фридманову једначину, неопходно је да размотримо композицију универзума. У Фридмановој једначини смо видели параметар ρ који се односи на густину енергије. Конкретно он се односи на густину радијације и материје. Да бисмо разумели како се он понаша током времена, морамо образложити шта тачно значи ширење универзума. Шрење универзума који је бесконачан (у случају равне или отворене геометрије), односно чије координате нису ограничене нема много интуитивног смисла. Одличан начин за визуализацију ширења универзума је да замислимо два мрава на балону који се полако надувава. Површина балона се повећава, као и међусобно растојање између мрава. Исто се дешава и са галаксијама у универзуму. Разлог зашто ово ширење универзума не доводи и до ширења галаксија је то што је гравитационо привлачење унутар једне галаксије довољно велико да превазиђе ширење. Наиме, тек на нивоу галаксијских кластера ми можемо да приметимо ово раздвајање, јер ту гравитационо привлачење није довољно јако да надвлада ширење. Дакле, током историје универзума укупна енергија материје и радијације је константна. Пошто се универзум шири у три просторне димензије, то имплицира да важи $V \sim a^3$, односно $\rho \sim \frac{1}{a^3}$. Ово је тачно за материју, али не и за радијацију на коју делује још један ефекат - црвени помак. Црвени помак далеких галаксија се може тумачити као линеарно ширење таласне дужине услед ширења универзума, и пошто важи $E \sim \frac{1}{\lambda}$ закључујемо да је $\rho_{rad} \sim \frac{1}{a^4}$.

Сада видимо да како универзум стари, то је густина радијације у односу на густину материје мања, и да после довољно дуго времена материја доминира у односу на радијацију. То је потврђено нашим мерењима да је густина радијације неколико редова величине мања од густине материје у данашње време, док то није био случај у ранијим епохама универзума. Ми ћемо се бавити квалитативним решавањем Фридманове једначине у којем посматрамо универзум током довољно дугог времена, те ћемо узимати да важи $\rho \sim \frac{1}{a^3}$.

4.5 Критична густина и параметар густине

Погледајмо још једном Фридманову једначину

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{4.17}$$

Уведимо нову константу густине енергије Λ као $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$. Фридманову једначину сада можемо написати у следећем облику

$$\frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - H^2 = \frac{k}{a^2} \tag{4.18}$$

Сада уводимо **критичну густину**, што је густина која је неопходна да лева страна једначине буде једнака 0.

$$\rho_C = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{4.19}$$

Сада ћемо дефинисати **параметар густине**, односно параметар густине материје и параметар густине Λ

$$\Omega = \frac{\rho + \rho_\Lambda}{\rho_C} \tag{4.20}$$

$$\Omega_M = \frac{\rho}{\rho_C} \tag{4.21}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_\mathrm{C}} \tag{4.22}$$

Јасно је да важи $\Omega_M + \Omega_\Lambda = \Omega$. Како се Хаблов параметар мења током времена, то значи и да се критична густина такође мења. Напоменимо и да постоји параметар густине радијације, али као што је објашњено он је занемарљив у односу на параметар густине материје, и најчешће се укључује у њега или се занемарује.

На основу вредности параметра густине можемо одредити да ли је наш универзум раван, отворен или затворен на следећи начин

• Отворен универзум: $0 < \Omega < 1$

• Раван универзум: $\Omega = 1$

• Затворен универзум: $\Omega > 1$

Закључујемо да је неопходна веома прецизна густина енергије у универзуму да би био раван. Међутим, наша најбоља посматрања показују управо то да је параметар густине једнак 1. На први поглед не постоји ниједан разлог за тачно ову вредност параметра густине, и из тога излази **проблем равности**. Наиме, зашто је вредност параметра густине тачно она која је неопходна за раван универзум? Ово је отворен проблем у модерној космологији. Једно од понуђених решења је нагло повећање универзума у својим најранијим епохама које би „изравнало" универзум. Ова теорија се назива **теорија инфлације**. Инфлаторна космологија је грана космологије која се бави испитивањем ове појаве.

4.6 Параметар успоравања

Бездимензионални **параметар успоравања** дефинишемо на следећи начин

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \tag{4.22}$$

Како знамо да је скејл фактор позитиван, као и да важи $\dot{a}^2 > 0$, видимо да позитивни параметар успоравања имплицира негативно $\ddot{a}$, и обрнуто. Како је $\ddot{a}$ други извод скејл фактора по времену, он говори да ли универзум расте све брже, или се његов раст успорава. Хаблов закон (4.15) је тачан само у апроксимацији да је Хаблов параметар константан, што није тачно. Међутим, он постаје приметно нетачан тек када посматрамо далеке објекте. Зато се до 1998. године веровало да је параметар успоравања позитиван и за данашњу епоху износи отприлике ${q_0}^* = 1 \pm 0.5$. Зато се и назива параметар успоравања, јер се веровало да раст скејл фактора успорава.

Напретком технологије показано је да ово није тачно, и да вредност параметра успоравања износи $q_0 = -0.6 \pm 0.2$, односно показано је да ширење универзума убрзава. Овај закључак нам говори о природи нашег универзума, и ком Фридмановом моделу он највише одговара. О различитим Фридмановим моделима и њиховој класификацији говоримо у следећем поглављу.

[*] **Попут ознаке H_0 за данашњу вредност Хабловог параметра, користе се и ознаке ρ_{C_0}, Ω_0 и q_0 за данашње вредности критичне густине, параметра густине и параметра успоравања**

5 Решавање Фридманове једначине

Фридманова једначина је по својој природи диференцијална једначина. Она нема јединствено решење, већ се различита решења сврставају у класе. За почетак ћемо Фридманову једначину записати на мало другачији начин. Наиме, као што је већ објашњено, ми сматрамо да важи $\rho \sim \frac{1}{a^3}$. Зато Фридманову једначину можемо написати на следећи начин

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{C}{a^3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{5.1}$$

Односно

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} - k + \frac{\Lambda}{3}a^2 \tag{5.2}$$

Овде је C нека позитивна константа. Нама је циљ да за различите вредности Λ и k квалитативно опишемо како ће се понашати скејл фактор у функцији од времена, односно колика је релативна величина универзума у сваком тренутку. Проћи ћемо кроз решавање неких од модела детаљно, а на крају навести све моделе.

5.1 Ајнштајн – де Ситеров[11] модел

У овом моделу сматрамо да важи $k = \Lambda = 0$. Фридманова једначина изгледа овако

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} \tag{5.3}$$

Кореновањем и коришћењем $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ добијамо

$$\sqrt{a}\, da = \sqrt{C} dt$$

Интеграцијом овога добијамо

$$\int_0^a \sqrt{a}\, da = \sqrt{C} t$$

$$\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} = t\sqrt{C}$$

[11] **Виљем де Ситер (1872-1934), холандски математичар, физичар и астроном**

$$a = \sqrt[3]{\frac{9}{4}C}\, t^{\frac{2}{3}} \tag{5.4}$$

Односно важи $a \sim t^{\frac{2}{3}}$. Хаблов параметар и параметар успоравања се веома лако налазе из њихових дефиниција:

$$H(t) = \frac{2}{3t}; q(t) = \frac{1}{2} \tag{5.5}$$

Односно фактор успорења је константан у времену. Мерењем Хаблове константе можемо израчунати старост универзума. Број који добијамо је отприлике 9.3 милијарди година. О старости универзума ће бити говора касније.

Неке од основних карактеристика овог универзума јесте да се он шири заувек, као и да је у тренутку $t = 0$ он био бесконачно мали, односно да је ово универзум настао из великог праска.

Овај универзум не одговара нашем, али је он ипак битан за разумевање неких карактеристика. На пример, у овом моделу предвиђена густина масе је око 20 пута већа од мерене. Зато, као и због других обзервационих закључака, је уведен појам **хладне тамне материје**, која означава материју коју не можемо детектовати али која врши гравитационо дејство попут регуларне **барионске** материје. Хладна тамна материја је кључан део модерне космолошке теорије.

Још једна ствар због које је испитивање овог универзума значајно је чињеница да фактор $\frac{C}{a}$ доминира у раним епохама универзума, те се многи универзими могу апроксимирати Ајнштајн – де Ситеровим моделом у својим раним епохама.

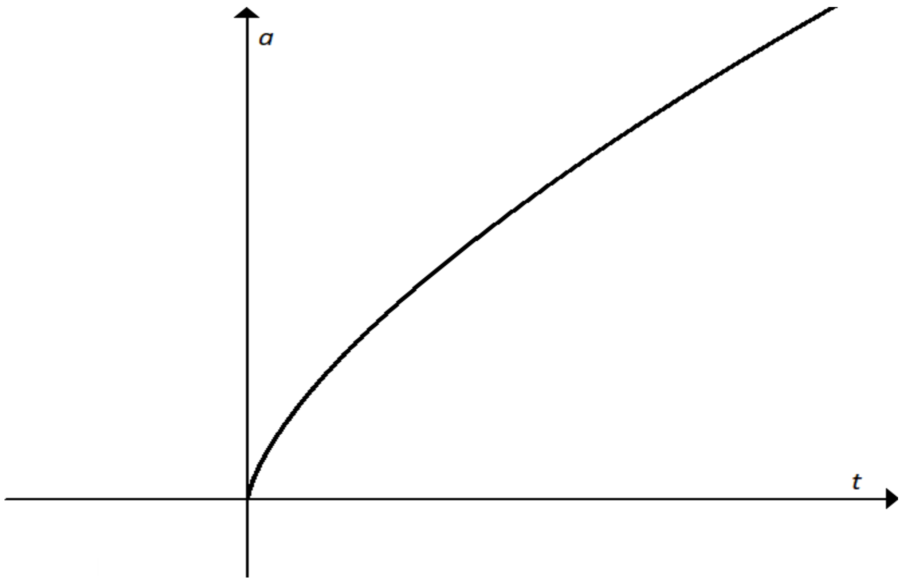


График 5.1 Ајнштајн – де Ситеров универзум

5.2 Равни модели

Равни модели су модели у којима важи $k = 0$. Већ смо расправили један од ових модела, Ајнштајн – де Ситеров модел. Сада ћемо погледати неке друге случајеве. У општем случају за раван универзум Фридманова једначина изгледа овако

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} + \frac{\Lambda}{3}a^2 \tag{5.6}$$

За почетак, гледајмо случај $\Lambda > 0$. Уведимо нову променљиву

$$u = \frac{2\Lambda}{3\mathrm{C}}a^3, \dot{u} = \frac{2\Lambda}{\mathrm{C}}a^2\dot{a}$$

Увиђамо да важи $\dot{a} = \frac{\dot{u}C}{2\Lambda a^2}$. Ако ово убацимо у (5.6) и средимо добијамо

$$\dot{u}^2 = \frac{4\Lambda^2}{C^2}a^4\left(\frac{C}{a} + \frac{\Lambda}{3}a^2\right) \tag{5.7}$$

Када ово средимо добијамо

$$\dot{u} = \sqrt{3\Lambda(2u + u^2)} \tag{5.8}$$

Пошто нас занима квалитативни облик функције скејл фактора, 3Λ нам не мења ништа све док је Λ позитивно. Једначину (5.8) затим пишемо на следећи начин

$$\frac{du}{\sqrt{2u + u^2}} = dt \tag{5.9}$$

Сада можемо интегралити под условом да је у почетном тренутку скејл фактор био једнак 0.

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{2u + u^2}} = t$$

Овај интеграл се решава тако што уводемо смене $v = u + 1, \cosh w = v$, односно

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{2u + u^2}} = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(u + 1)^2 - 1}} = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}} = \int_0^w \frac{\sinh w\, dw}{\sqrt{\cosh^2 w - 1}} = w$$

Дакле, важи

$$t = \operatorname{arccosh}(a^3 + 1)$$

Односно

$$a^3 = \cosh t - 1 \tag{5.10}$$

Овде смо игорисали све константе и квалитативно гледали на решење.

Други случај је да важи $\Lambda < 0$. Слично као и у претходном случају, уводимо нову промењиву

$$u = -\frac{2\Lambda}{3C}a^3, \dot{u} = -\frac{2\Lambda}{C}a^2\dot{a}$$

Сличним поступком као у претходном случају добијамо

$$\dot{u} = \sqrt{3\Lambda(-2u + u^2)} \qquad (5.11)$$

Пошто је 3Λ негативно, да бисмо квалитативно одредили график функције смемо га заменити са -1. И сада, при услову да је у тренутку 0 скејл фактор 0, решавамо интеграл

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{2u - u^2}} = t$$

Користећи смене $v = u - 1, \cos w = v$ решавамо интеграл

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{2u - u^2}} = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - (u-1)^2}} = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \int_0^w \frac{-\sin w\, dw}{\sqrt{1 - \cos^2 w}} = -w$$

Дакле добијамо

$$t = -\arccos(a^3 - 1)$$

Односно

$$a^3 = 1 - \cos t \qquad (5.12)$$

Сада можемо скицирати графике (5.10) и (5.12). За почетак, (5.10)

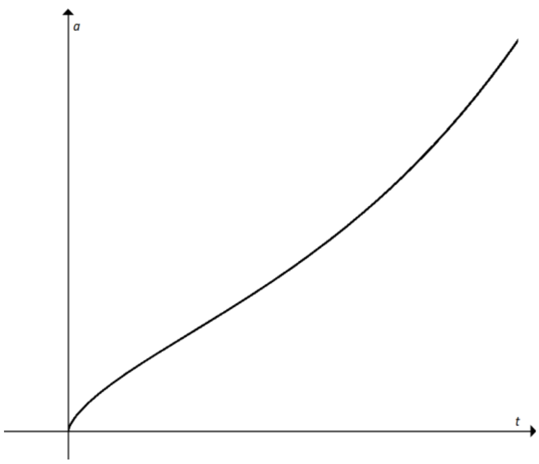


График 5.2 Раван универзум са позитивном космолошком константом

Неке од карактеристика овог универзума можемо читати са графика. За почетак, попут Ајнштајн – де Ситеровог универзума, и овај расте у бесконачност. Међутим, за разлику од модела без космолошке константе, у овом моделу брзина којом се универзум шири успори, па касније поново почне убрзавати. Наша мерења показују да је ширење нашег универзума у прошлости успоравало, па да је кренуло да убрзава пре неколико милијарди година. Ово није једини универзум са овом особином, али је једини који има и равну геометрију. Зато се ово често узима као модел нашег универзума.

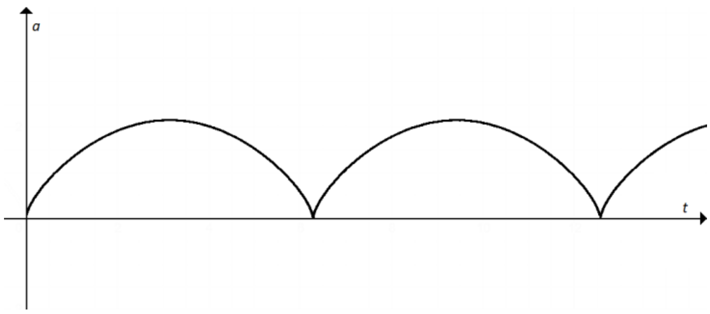


График 5.3 Раван универзум са негативном космолошком константом

У овом случају смо добили занимљиво решење. Овај универзум је осцилујући, односно расте до једног тренутка, па крене да се смањује. Након што поново достигне бесконачно малу величину, процес креће из почетка. Зато се овај универзум назива **осцилујућим**. Тренутак када се универзум скупи у једну тачку назива се **велики колапс** (енг. *Big crunch*). Одмах након великог колапса деси се нови велики прасак.

5.3 Ајнштајнов статичан модел

Ајнштајнов статичан модел је откривен 1917. године као теоретска позадина за статичан универзум у који се веровало у то време. Поново погледајмо Фридманову једначину

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{5.13}$$

Препишимо Фридманову једначину на следећи начин

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - \frac{\Lambda}{3}a^2 = -k \tag{5.14}$$

Иако је наш циљ да дођемо то статичног универзума, ми идаље смемо користити да важи $\rho \sim \frac{1}{a^3}$, односно нека важи $\rho a^3 = \rho_0$. Сада (5.14) можемо преписати на следећи начин

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a} - \frac{\Lambda}{3}a^2 = -k \tag{5.14}$$

Сада можемо да нађемо извод ове једначине по времену и да добијемо

$$2\dot{a}\ddot{a} + \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a^2}\dot{a} - \frac{\Lambda}{3}2a\dot{a} = 0 \tag{5.15}$$

Односно

$$\ddot{a} + \frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a^2} - \frac{\Lambda}{3}a = 0 \tag{5.16}$$

Можемо увидети да уколико изаберемо вредност $4\pi G\rho$ за Λ добијамо да је $\ddot{a} = 0$. Овако долазимо до статичног универзума. Ову вредност космолошке константе називамо **критичном космолошком константом**.

$$\Lambda_C = 4\pi G\rho \tag{5.17}$$

Ово није довољно за статичан универзум, већ је неопходно и поставити услов да је он одувек статичан. О другим космолошким моделима који одговарају овој вредности космолошке константе има говора у следећем одељку. Овај модел није модел великог праска, јер не постоји тренутак када је универзум био бесконачно мали.

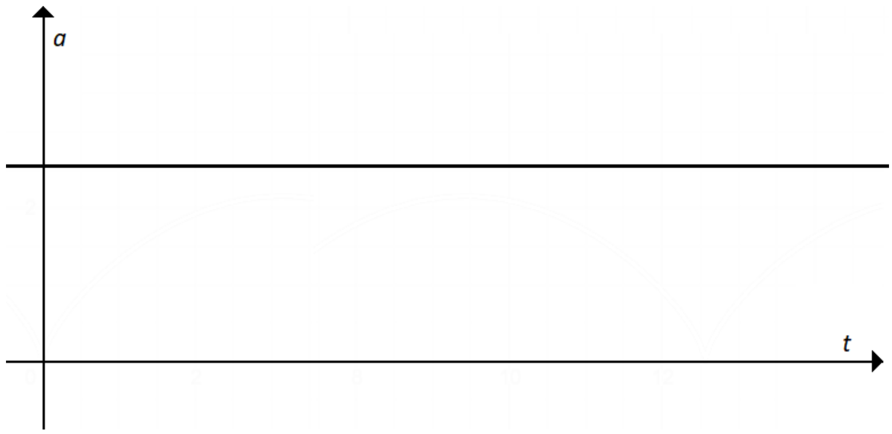
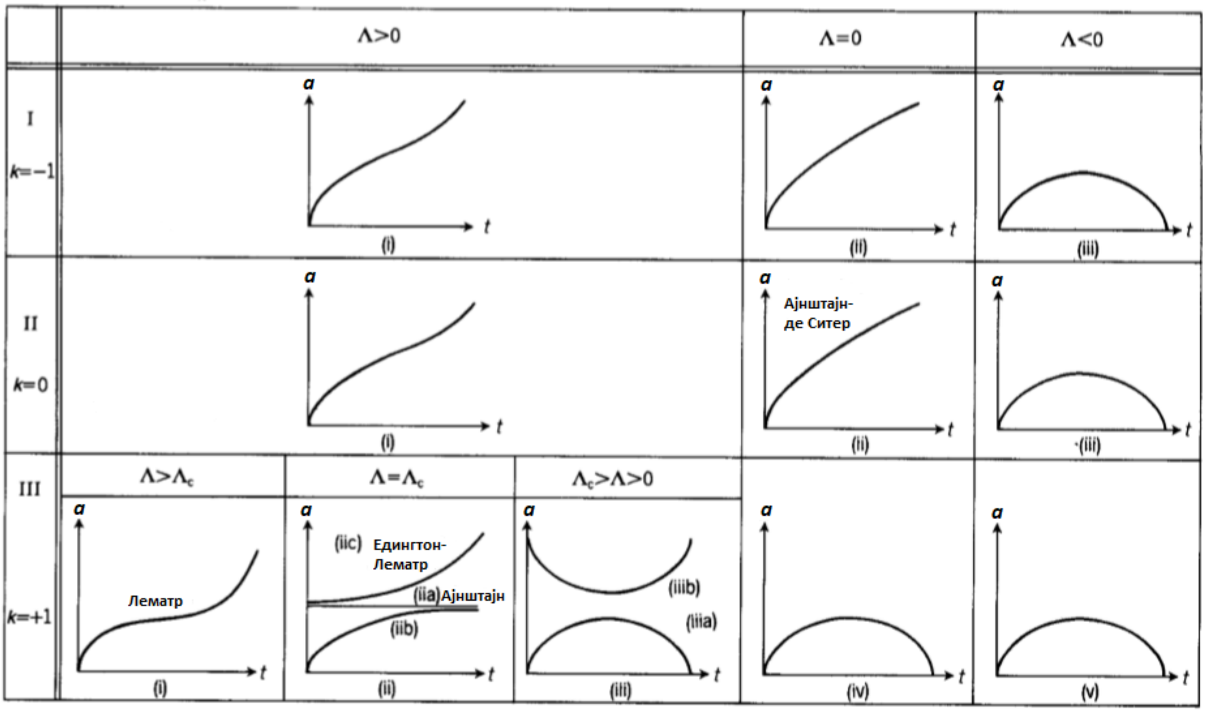


График 5.4 Ајштајнов статичан универзум

5.4 Класификација Фридманових модела



Дијаграм 5.1 Класификација Фридманових модела

На дијаграму можемо видети класификацију Фридманових модела у 14 различитих класа. Неке од ових смо већ објаснили и дошли до њихових графика. Сада ћемо кратко објаснити сваку фамилију модела.

Случај I: $k = -1$

I(i) $\mathbf{\Lambda > 0}$: Ово је модел са великим праском и универзумом који расте заувек. Као и сви модели са великим праском у почетку се понаша као Ајнштајн – де Ситеров универзум, а асимптотски се приближава $e^{t\sqrt{\Lambda/3}}$. Такође има особину да му раст успори у неком тренутку, па затим поново убрза.

I(ii) $\mathbf{\Lambda = 0}$: Универзум који расте у бесконачност и имао је велики прасак. За разлику од претходног, раст овог универзума нема фазу успоравања и поновног убрзаања.

I(iii) $\mathbf{\Lambda < 0}$: Осцилујући универзум са свим истим особинама као и осцилујући универзум о ком смо дискутовали.

Случај II: $k = 0$

II(i) $\mathbf{\Lambda > 0}$: Суштински исти као и I(i), већ је описан у 5.2

II(ii) $\mathbf{\Lambda = 0}$: Ајнштајн – де Ситеров модел, већ описан у 5.1

II(iii) $\mathbf{\Lambda < 0}$: Осцилујући модел

Случај III: $\boldsymbol{k = +1}$

Овде имамо највећи број подслучајева. Већ смо дискутовали критичну космолошку константу у 5.3. Неки од случаја се добијају дискусијом других почетних услова.

III(i) $\boldsymbol{\Lambda > \Lambda_C}$: Овај модел се назива Лематров модел. Веома је сличан моделима I(i) и I(ii), само што има особину да што је космолошка константа ближа критичној вредности, то је израженије време када успори раст универзума, и он скоро па стане. У бесконачности тежи $e^{t\sqrt{\Lambda/3}}$.

III(ii) $\boldsymbol{\Lambda = \Lambda_C}$: Овде имамо више подслучајева у зависности од константе интеграције у њиховом добијању

III(iia): Ово је Ајнштајнов статичан модел о коме је било речи у 5.3

III(iib): Модел великог праска који се асимптотски приближава статичном

III(iic): Едингтон – Лематр модел који се у прошлости асимптотски приближава статичном, а у будућности расте у бесконачност и приближава се $e^{t\sqrt{\Lambda/3}}$.

III(iii) $\boldsymbol{\Lambda_C > \Lambda > 0}$: Поново имамо више могућности, овај пут две

III(iiia): Осцилујући модел

III(iiib): Универзум који се из бесконачности смањује до неке позитивне вредности па поново расте. У обе бесконачности тежи експоненционалној функцији: $e^{t\sqrt{\Lambda/3}}$ у $+\infty$, односно $e^{-t\sqrt{\Lambda/3}}$ у $-\infty$.

III(iv) $\boldsymbol{\Lambda = 0}$: Осцилујући модел

III(v) $\boldsymbol{\Lambda < 0}$: Осцилујући модел

5.5 Универзум доминиран радијацијом

Универзуми које смо до сада расправљали су били доминирани од стране материје, или су после довољно дугог времена дошли у стање где је густина енергије материје много већа од густине енергије радијације. Размотримо сада универзум у коме нема материје, већ само радијације. Подсетимо се да густина енергије радијације понаша као $\rho_{rad} \sim \frac{1}{a^4}$. Напишимо једначину (5.2) узимајући то у обзир

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a^2} - k + \frac{\Lambda}{3}a^2 \tag{5.17}$$

Решимо Фридманову једначину за случај $k = \Lambda = 0$, односно аналоган случај Ајнштајн – де Ситеровом моделу.

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a^2}$$

$$a\dot{a} = \sqrt{C}$$

$$a\,da = dt\sqrt{C}$$

$$\int_0^a a\,da = \frac{a^2}{2} = t\sqrt{C}$$

$$a = \sqrt{2\sqrt{C}}\,t^{\frac{1}{2}} \tag{5.18}$$

Примећујемо да овај универзум расте спорије од Ајнштајн – де Ситеровог модела, што је и очекивано са обзиром да је густина енергије у овом универзуму мања.

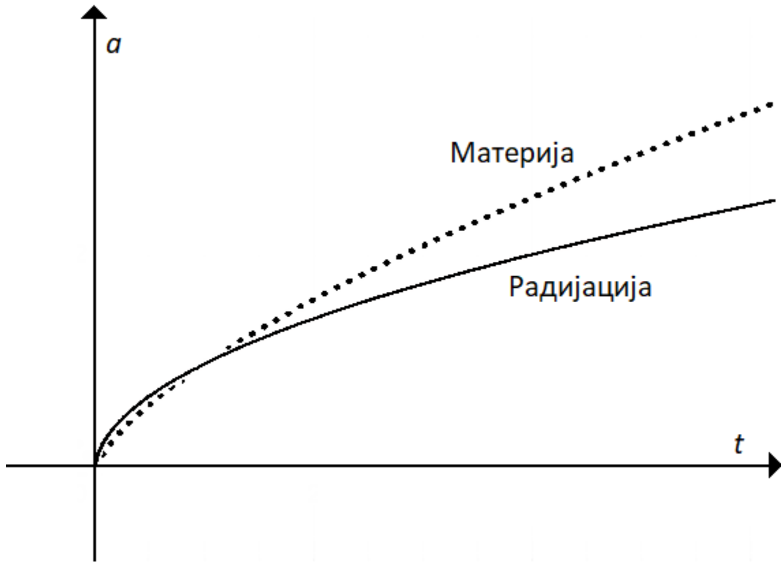


График 5.4 Еволуција универзума у зависности од састава

5.6 де Ситеров модел

Овај модел се не сматра моделом релативистичке космологије јер не садржи материју. Конкретно, у овом моделу важи $\rho = p = k = 0$. Фридманова једначина се своди на

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} \tag{5.19}$$

Овај универзум садржи само космолошку константу, и она је једина која доводи до ширења.

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$$

$$a = e^{t\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}} \tag{5.20}$$

Ово је дакле универзум који расте експоненциално. Он је битан јер нам показује како се понаша универзум без материје. Ово је објашњење зашто неки од модела које смо дискутовали теже $e^{t\sqrt{\Lambda/3}}$ када $t \to +\infty$. У овим моделима густина енергије материје постаје занемарљива у односу на густину енергије космолошке силе, и он почне да се понаша попут де Ситеровог модела.

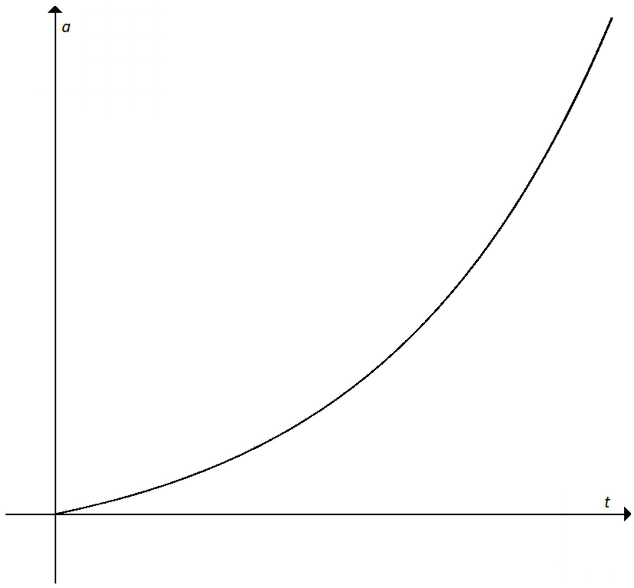


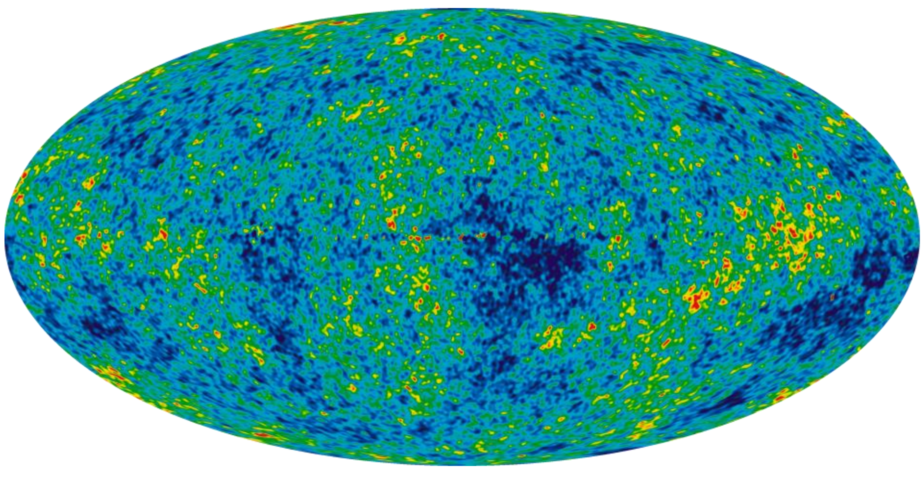
График 5.5 де Ситеров универзум

6 Космолошки параметри

Питање како је настао свет је одувек постојало у људској култури. У свакој античкој цивилизацији стваране су легенде о постању. Међутим, тек смо у скоријој историји достигли могућност да имамо едуковане процене, а не нагађања. Са открићем радиоактивности и радиометријског датирања прве процене старости Земље су могле да буду направљене. Развој експерименталних метода за одређивање старости наше планете, као и нашег униерзума, биле су употпуњене развитком опште теорије релативности, која је могла да нам да теоретску основу за старост универзума. Али ова теорија не може сама да одреди ништа конкретно о нашем универзуму јер, као што смо видели, неопходно је да знамо вредности неких параметара да бисмо могли да пружимо прецизну слику о нашем универзуму. Један од највећих извора вредности ових параметара је **космичко микроталасно позадинско зрачење**.

6.1 Космичко микроталасно позадинско зрачење

Космичко микроталасно позадинско зрачење је случајно отркивено 1964. године. Оно представља скоро изотропно зрачење које нас обасипа са свих страна и које је најјаче у микроталасној дужини. Мерењем овог зрачења, као и малих неправилности у њему, можемо протумачити много тога о нашем универзуму. Ово зрачење има температуру од око $2.725\ K$ са флуктуацијама реда величине $10^{-4}\ K$. Ова температура је била већа у прошлости. Каснијим истраживањем је утврђено порекло овог зрачења, а то је да је у тренутку када се рани универзум довољно охладио да постане прозоран за светлост огромна количина електромагнетног зрачења почела ширити у свим правцима. Температура на којој се ово десило је око $3000\ K$, тако да знамо да је ово зрачење почело када је скејл фактор био ~ 1000 пута мањи. Веза између црвеног помака светлости и скејл фактора је $1 + z = \frac{a_{sada}}{a_{trenutak\ nastanka\ svetlosti}}$. Ако дефинишемо да је скејл фактор једнак 1 у садашњем тренутку, онда важи $1 + z = \frac{1}{a}$.



Слика 6.1 Космичко микроталасно позадинско зрачење

6.2 Измерени параметри

Анализом података пореклом из космичког микроталасног позадинског зрачења, као и из других извора, можемо одредити параметре нашег универзума. За почетак, можемо измерити колика је вредност параметра густине

$$\Omega \approx 1$$

Већ смо споменули да наша мерења показују да је универзум раван. Ова мерења су пореклом из разних мисија, од којих су најпознатије Вилкинсонова микроталасна анизотропна сонда (*WMAP*) и Планк летелица. Овде ћемо наводити податке ове две мисије. Следећи задатак је одредити параметар густине материје. Под материју подразумевамо радијацију, барионску материју и хладну тамну материју. За почетак, густина енергије радијације је занемарљива ($\Omega_{rad} \approx 10^{-4}$). За барионску материју имамо следећа мерења:

$$WMAP\colon \Omega_B = 0.0463 \pm 0.0026$$
$$\text{Планк: } \Omega_B = 0.0486 \pm 0.0007$$

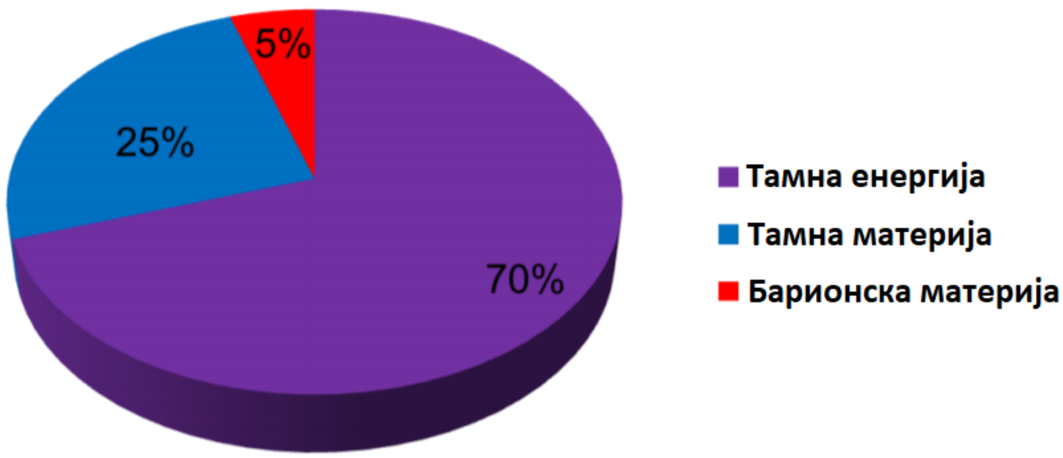
Дакле, видимо да је свега око 5% нашег универзума састављено од ствари које можемо директно посматрати. Тамна материја испољава гравитациона својства, и то је једини начин на који је можемо мерити. Назив „тамна“ је услед тога што она не реагује видно са светлошћу. Њена гравитациона својства можемо видети услед гравитационих сочива, ефекта опште теорије релативности који говори о „криволинијском“ кретању светлости. Увећање које детектујемо од многих галаксија је много веће него што бисмо очекивали са њиховом масом, те закључујемо да је велика количина њихове масе у виду тамне материје. Још један ефекат тамне материје су ротационе криве галаксија, које се не понашају као што је предвиђено. Хладна тамна материја је најприхваћеније решење ових проблема.

График 6.1 Измерена и очекивана ротациона крива галаксија

Мерења нам говоре параметар густине материје, који укључује и хладну тамну материју

$$WMAP{:}\,\Omega_M = 0.279 \pm 0.025$$
$$\text{Планк:}\ \Omega_M = 0.314 \pm 0.020$$

Ова два мерења нису у складу једно са другим, и зато је неопходан напредак у технологији и методологији како бисмо прецизније измерили овај параметар. Свакако, видимо да је процентуални удео материје у универзуму око 30%. То оставља питање – шта чини остатак универзума? Остатак енергије називамо **тамном енергијом**, и она чини око 70% енергије нашег универзума. Она може бити делом или у целини пореклом од стране космолошке константе, али тренутно нисмо сигурни у њену композицију.



Слика 6.1 Композиција универзума

Ове две мисије су нам такође пружиле и најпрецизније вредности Хаблове константе до сада

$$WMAP{:}\,\mathrm{H}_0 = 70\ \pm 2.2\frac{km}{s\ Mpc}$$
$$\text{Планк:}\ \mathrm{H}_0 = 67\ \pm 1.2\frac{km}{s\ Mpc}$$

6.3 Старост универзума

За крај, позабавимо се питањем старости универзума. Прва процена која ће нам рећи нешто мало више о реду величина са којим радимо је да претпоставимо да је Хаблов параметар константа. Лако добијамо вредност старости универзума узимајући реципрочну вредност Хаблове константе

$$t_H \approx 14 \cdot 10^9 y$$

Ова вредност од око 14 милијарди година се назива **Хаблово време**.

Ако разматрамо Ајнштајн – де Ситеров универзум, добијамо вредност која је за трећину мања од ове, односно око 9.3 милијарди година.

Помоћу радиометријског датирања камења на Земљи добили смо да је она стара око 4.6 милијарди година. У наш модел се уклапа чињеница да је Земља млађа од универзума. Такође видимо да је ред величина старости Земље и универзума сличан. Старост белих патуљака, слабо луминозних звезда, може се проценити врло прецизно из њиховог спектра. Број који добијамо за најстарије беле патуљке је око 10 милијарди година. Старост најстаријих звезда које смо детектовали је око 13 милијарди година. Ово је број који превазилази старост Ајнштајн – де Ситеровог универзума. Остаје нам наш најбољи извор информација о универзуму, космичко микроталасно позадинско зрачење. Знамо из теоретских модела да је оно настало неколико стотина хиљада година након великог праска, односно занемарљиво мало након њега. Најпрецизнији подаци о старости овог зрачења су

$$\begin{aligned} WMAP\text{:}\ & t_0 = 13.74\ \pm\ 0.11\, Gyr \\ \text{Планк:}\ & t_0 = 13.796\ \pm\ 0.058\, Gyr \end{aligned}$$

Ово је уједно и најбоља процена старости универзума коју имамо. Теоретски модели са новоизмереним космолошким параметрима подржавају овај број.

На основу свега што смо рекли може се дефинисати модел који одговара нашем универзуму. Тај модел се зове $\boldsymbol{\Lambda CDM}$ **модел**. У свом називу има ознаку за космолошку константу, која је у овом моделу позитивна. CDM означава хладну тамну материју (енг. *Cold Dark Matter*). У будућности циљ нам је да боље одредимо параметре нашег универзума, као и да их боље опишемо.

7 Закључак

У првом делу овог рада размотрили смо историјску позадину развоја космологије. Упоредо смо и видели како је развој опште теорије релативности довео до револуције у физици. Пре Ајнштајна многи физичари су мислили да је физика комплетна, што видимо по цитату барона Келвина: „У физици није остало ништа ново открити. Све што остаје су прецизнија мерења.“ Величина научника са почетка двадесетог века је у томе што су се усудили да размишљају другачије.

Након извођења Фридманове једначине размотрили смо неке њене импликације. Схватили смо да не живимо у статичном универзуму. Теорија великог праска је данас опште прихваћена.

На крају смо се позабавили једним од најстаријих питања у историји човечанства, а то је колико је прошло од настанка универзума. Сада је наше схватање космологије много комплетније него икада пре, али то не значи да је наша потрага за одговорима готова. Идаље не знамо шта чини 95% нашег универзума, нити знамо све детаље о његовој раној историји. Не смемо направити исту грешку попут барона Келвина, јер можда нас само једна бистра идеја дели од нове револуције у физици.

Овом приликом бих хтео да се захвалим мом ментору Браниславу Цветковићу. Такође бих се захвалио и свим професорима који су ми предавали у претходне четири године, а посебно професорима Ивану Станићу и Соњи Чукић, који су својим одличним предавањем продубили моју већ постојећу љубав према математици и физици.

Литература

[1] Ray d'Inverno: *Introducing Einstein's Relativity,* Oxford university press, Oxford, UK, 1992.

[2] Andrew Liddle: *An Introduction to Modern Cosmology second edition,* University of Sussex, Sussex, UK, 2003.

[3] Joan Arnau Romeu: *Derivation of Friedman equations,* Facultat de Fisíca, Universitat de Barcelona, Barcelona, Spain 2014.

[4] Domingos Soares: *O universo estático de Einstein,* Departamento de Fisíca, Universidade Federal de Minas Gerias, Belo Horizonte, Brasil, 2012.

[5] George F. Smoot: *Nobel Lecture: Cosmic microwave background radiation anisotropies: Their discovery and utilization,* Lawrence Berkeley National Laboratory, Space Sciences Laboratory, Department of Physics, University of California, Berkeley, California, USA, 2007.

[6] Nick Gnedin: *The Origin and Evolution of the Universe: Lecture 15: Measuring cosmological parameters*, Fermilab, Batavia, Illinois, USA, 2020.