Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из математике -

Надреални бројеви

Ученик:
Огњен Ковачевић IVд

Ментор:
Милош Ђорић

Београд, јун 2022.

Садржај

0 Увод и реч аутора **1**

1 *No* **3**
- 1.1 Конструкција 3
- 1.2 Својства 5
- 1.3 Операције 6
  - 1.3.1 Својства Абелове Групе 7
  - 1.3.2 Својства Прстена 8
  - 1.3.3 Дељење и својства Поља 11
- 1.4 Садржаност познатијих класа бројева 12
  - 1.4.1 Ординали и природни бројеви 13
  - 1.4.2 Дијадични разломци и реални бројеви 14

2 Опште репрезентације и везе са познатијом математиком **17**
- 2.1 Рођендани и знаковне листе 17
- 2.2 Омега-мапа и нормална форма броја 21
  - 2.2.1 Бесконачне суме 26
- 2.3 Реална затвореност и универзално утапање 28
- 2.4 Степеновање 30
  - 2.4.1 Природни логаритам 35

3 Алтернативна концепција надреалних бројева **37**

Литература **40**

0 Увод и реч аутора

У овом раду ћемо представити и проучити теорију надреалних бројева, и бавити се искључиво њиховим особинама, без њихове везе са широм конструкцијом званом игре. Прво ћемо представити њихову конструкцију, дефинисати уређење и алгебарске операције над њима, уз примере. Потом, уводимо концепт рођендана броја, као што откривамо неке врло корисне представе бројева, и проучавамо какве везе познатија математика прави са нашом класом. На крају, уводимо један алтернативан приступ, показујемо да он производи структуру која има сва доказана својства, и дискутујемо карактеристике оба приступа. Главни циљ јесте показати богату структуру која јесте класа надреалних бројева. Знатни део рада јесте доказивање. Зависно од упознатости с методама које ћемо користити, техникалности ригорозног доказа и других варијабли, опширност и детаљност доказа варирају. Такође, више пута ћемо помињати ентитете и тврдње из других грана математике, углавном теорије скупова, али и комбинаторике и реалне анализе. Пошто оне за сада постоје изоловано од теорије надреалних бројева, теореме и леме које проистичу из њих неће бити праћене доказом, али нефамилијарне дефиниције ће бити напомените.

Желим да се захвалим свом ментору Милошу Ђорићу на сарадњи, као и на његовом узорном приступу према широком предмету математике, који верујем да је обликовао мој сопствени приступ у току четири године на његовој настави.

1 *No*

1.1 Конструкција

Пошто постоје различите нотације, потребно је експлицирати какву нотацију ћемо користити овде. Мала слова попут x, y ће означавати бројеве. Сваки број је конструисан као пар скупова, леви и десни, која ћемо означити са X^L и X^R, где је слово у основи велико слово које користимо за број. Када тврдимо да је x конструкција та два скупа, рећи ћемо да $x = (X^L, X^R)$, а оригинално се користи и $x = \{X^L|X^R\}$. Када напишемо малим словом индексираним са L или R (попут $x^L; x^R$), мислимо на општи елемент скупа X^L или X^R, то јест рећи да $P(x^L)$ је исто што и рећи да $(\forall x^L \in X^L)P(x^L)$. За потребе овог текста додаћемо и ознаку x^U, што је општи елемент скупа $X^L \cup X^R$, такође познато као опције x.

Конвеј задаје рекурзивно правило по којем се бројеви конструишу. Прво правило са којим се сусрећемо је следеће:

Дефиниција 1. *За два скупа бројева X^L, X^R где $x^L \ngeq x^R$, $x = (X^L, X^R)$ је нов број.*

Друго правило је дефинисање релације $\geq$.

Дефиниција 2. *$x \geq y$ ако и само ако $y \ngeq x^R$ и $y^L \ngeq x$.*

Наравно, на први поглед се чини да је немогуће да су овакве дефиниције смислене или корисне, јер како изградити објекат неког типа ако се само позивамо на објекте истог типа? Генij ових правила јесте што заправо дозвољава стварање "*ex nihilo*". Узмимо празан скуп и празан скуп. Пошто нема елемената у празном скупу по дефиницији, то значи аутоматски да су сви елементи празног скупа бројеви и да ниједан елемент из празног скупа није већи или једнак иједном елементу из празног скупа. Стога, $(\emptyset, \emptyset)$ је број, који зовемо 0.

Следећа два броја које ћемо конструисати јесу, наравно, $(\{0\}, \emptyset)$ и $(\emptyset, \{0\})$, и када будемо дефинисали операције, постаће јасно зашто их називамо 1 и -1. Међутим, приметимо да $(\{0\}, \{0\})$ није број, јер $0 \geq 0$.

Сада када имамо 3 броја, ми можемо да их конструишемо још 17, али истаћи ћемо представнике: $(\{0,1\},\emptyset)$, $(\{0\},\{1\})$, $(\{-1\},\{0\})$, $(\emptyset,\{0,-1\})$. Ти бројеви су, редом: 2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, -2. Такође, битно је истаћи неке "сувишне" бројеве, попут $(\{0,-1\},\emptyset)$. Да бисмо разумели зашто су сувишни, уводимо следеће (касније врло битне) дефиниције:

Дефиниција 3. *$x \leq y, x = y, x > y, x < y$ када (редом):*

- $y \geq x$,
- $x \geq y \wedge x \leq y$
- $x \geq y \wedge x \nleq y$
- $x \leq y \wedge x \ngeq y$.

$x \equiv y$ када за свако z важи $z \in X^L \iff z \in Y^L \wedge z \in X^R \iff z \in Y^R$.

Затим поредимо тај број са $1 = (\{0\},\emptyset)$. Лако се утврђује да:

$1 \ngeq (\{0,-1\},\emptyset)^R$
$0 \ngeq (\{0,-1\},\emptyset)$
$(\{0,-1\},\emptyset) \ngeq 1^R$
$0,-1 \ngeq 1$

И зато имамо да је $(\{0,-1\},\emptyset) \geq 1, 1 \geq (\{0,-1\},\emptyset)$, тј. $(\{0,-1\},\emptyset) = 1$, иако $(\{0,-1\},\emptyset) \not\equiv 1$. Дакле, једнакост не имплицира идентичност.

Коначном применом ових конструкција добијамо оно што препознајемо као све целе бројеве, као и све дијадичне разломке, тј све бројеве облика $\frac{q}{2^n}, q \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0$. Али, постоје и бројеви попут $\omega = (\{0,1,2...\},\emptyset)$. Ово је прва трансфинитна вредност с којом се сусрећемо. Исто тако, поред ње постоји и $-\omega$, а и "реципрочна" вредност $\frac{1}{\omega} = (\{0\},\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}...\})$. Исто тако, настају и бројеви које препознајемо као реалне, недијадичне разломке или ирационалне бројеве, што ћемо показати касније. Најчешћи пример јесте $\frac{1}{3}$ једнак $(\{0,\frac{1}{4},\frac{5}{16}...\},\{1,\frac{1}{2},\frac{3}{8}...\})$. За ирационалне бројеве попут $\sqrt{2}$ можемо задати
$(\{\frac{q}{2^n}|\frac{q^2}{4^n} < 2, \frac{(q+1)^2}{4^n} > 2, q,n \in \mathbb{N}\},\{\frac{q}{2^n}|\frac{q^2}{4^n} > 2, \frac{(q-1)^2}{4^n} < 2, q,n \in \mathbb{N}\})$. Вероватно је приметно да леви елементи теже да буду мањи од броја који граде, исто као што десни елементе теже да буду већи. У следећем одељку то ћемо и демонстрирати.

No јесте класа која садржи овако направљене бројеве. Приметимо како није употребљена реч "скуп" да је опишемо. У парадигми у којој радимо, скупови су посебна врста класе, тј. класе које се садрже у некој другој класи. Класе које се не садрже ни у једној другој класи зовемо "праве класе" или "строге класе" и No јесте један од примера строге класе. Видети зашто, претпоставимо да No јесте скуп. Онда је $(No, \emptyset)$ легитиман број, тј. припада No. Али опет, он није мањи нити једнак (дакле не може бити идентичан) ниједном елементу No- контрадикција.

1.2 Својства

Напомена: да би смо доказали следеће теореме, Конвеј нас упознаје са једном врстом индукције. Наиме, ако покажемо да $(\forall x)(P(x^U) => P(x))$, онда смо показали и $(\forall x)(P(x))$. Не морамо ни да уводимо базу, јер пошто је база нула, а она нема леве и десне елементе, база се подразумева у горњој индукцији. Такође понекад ће се појавити сложеније форме индукције, које ће бити наглашене.

Теорема 1. *За број x важи:*

- $x^L \not\geq x$
- $x \not\geq x^R$
- $x \geq x$
- $x = x.$

Доказ. Дефинисаћемо $P(x) : x^L \not\geq x \wedge x \not\geq x^R \wedge x \geq x$. Ако претпоставимо да за x постоји неко $x'^L \geq x$, по дефиницији то значи да $x^L \not\geq x'^L$, стога $x'^L \not\geq x'^L$, али пошто претпостављамо $P(x^L)$, то не може бити, и зато $x^L \not\geq x$. Аналогно за другу тврдњу.
Остаје само да докажемо $x \geq x$, али то тривијално следи из претходног доказа. Доказ да је једнакост рефлексивна исто тривијално следи. □

Теорема 2. *$\geq$ је транзитивна релација.*

Доказ. Овде је прва појава сложенијих форма индукције. Дефинишимо $T\{x, y, z\}$ као "$\geq$ је транзитивна за пермутације x, y, z", и $P(x, y, z)$ као $(T\{x, y, z\})$. Да би ова форма индукције била успешна, требамо демонстрирати $P(x^U, y, z) \wedge P(x, y^U, z) \wedge P(x, y, z^U) \implies P(x, y, z)$.

Рецимо, без губитка општости, да $x \geq y \geq z$. Према првој неједнакости имамо $y \not\geq x^R$. Да $(\exists x^R)(z \geq x^R)$, због индуктивне претпоставке и претпоставке да $y \geq z$ добијамо да $(\exists x^R)(y \geq x^R)$, што је контрадикција.

Дакле, $z \not\geq x^R$. Сличним путем можемо добити да $z^L \not\geq x$, и стога по дефиницији $x \geq z$. Како не губимо општост, имамо доказ за $T\{x, y, z\}$. Индукција је испоштована, и стога $(\forall x, y, z)(T\{x, y, z\})$, то јест релација је транзитивна. □

Показивањем ове Теореме, можемо показати и следећу последицу врло једностано:

Последица 1. *$\geq$ је релација поретка, $>$ је релација строгог поретка, $=$ је релација еквиваленције.*

Пре него што покажемо тоталну уређеност, треба нам једна лема:

Лема. $x^L < x < x^R$.

Доказ. Раније смо показали да $x^L \not\geq x \not\geq x^R$, што подразумева различитост. Знамо да $x \not\geq x^{RR}$ јер индуктивно знамо да је $x^{RR} > x^R$. Такође знамо да $x^L \not\geq x^R$ по дефиницији броја. Стога, $x^R \geq x$, а потом имамо и $x^R > x$, Аналогно добијамо $x > x^L$ □

Теорема 3. $(\forall x, y \in No)(x \geq y \vee y \geq x)$.

Доказ. Претпоставимо да $x \not\geq y$. То значи да $(\exists x^R)(y \geq x^R) \vee (\exists y^L)(y^L \geq x)$ У оба случаја добијамо да је $y > x$ (исто битан закључак) због транзитивности, дакле $y \geq x$. □

1.3 Операције

Управо смо закључили да имамо тотално уређење над класом надреалних бројева. У следећем поглављу објаснићемо зашто је ова класа и "Поље". Ради краће нотације, када вршимо операцију над скупом, вршимо операцију над његовим елементима. Започнимо са следећим дефиницијама:

Дефиниција 4. *Збир два броја је дефинисан*

$$x + y = ((X^L + y) \cup (x + Y^L), (X^R + y) \cup (x + Y^R)).$$

Негација броја је дефинисана $-x = (-X^R, -X^L)$.

Производ два броја је дефинисан $xy = ((XY)^L, (XY)^R)$, *где*

$$(XY)^L = (X^L y + xY^L - X^L Y^L) \cup (X^R y + xY^R - X^R Y^R)$$
$$(XY)^R = (X^L y + xY^R - X^L Y^R) \cup (X^R y + xY^L - X^R Y^L).$$

Због специфичне конструкције бројева, једнако је битно да докажемо да једнаки бројеви враћају једнаке резултате, као и да су резултати бројеви, колико је битно доказати својства операција и функција које дефинишемо на овакав начин.

1.3.1 Својства Абелове Групе

Теорема 4. *Сабирање је добро дефинисано и збир два броја је број. Такође,* $x \geq y \iff x + z \geq y + z$.

Доказ. Правимо индуктивну претпоставку да су $x^L + y, x + y^L, x^R + y, x + y^R$ надреални бројеви. Очито $x^L + y \ngeq x^R + y, x + y^R$ и $x + y^L \ngeq x^R + y, x + y^R$, и зато $x + y \in No$.
Доказујемо да за x, y, z важи импликација "у свим пермутацијама", и поново користимо сложенији вид индукције. За један смер претпоставимо да $x + z \geq y + z$. Онда $y^L + z \ngeq x + z \wedge y + z \ngeq x^R + z$, из чега индуктивно следи $y^L \ngeq x \wedge y \ngeq x^R$, по дефиницији $x \geq y$.
За други смер, претпосавићемо $x \geq y$ и $x+z \ngeq y+z$ и показати контрадикцију. По другој претпоставци, 4 ствари могу бити случај; случајеви $(\exists z^R)(y + z \geq x + z^R)$, $(\exists z^R)(y + z^L \geq x + z)$, су контрадикција са индуктивном претпоставком $x + z \geq y + z \geq x + z^R \implies z \geq z^R$ или да $y + z^L \geq x + z \geq y + z \implies z^L \geq z$, док случајеви $(\exists x^R)(y + z \geq x^R + z)$, $(\exists y^L)(y^L + z \geq x + z)$ су директна контрадикција са $y \ngeq x^R, y^L \ngeq x$, последице претпоставке $x \geq y$. Стога, еквиваленција је доказана. □

Одавде следи:

Последица 2. *За* x, y, z *важи* $x\sigma y \iff (x+z)\sigma(y+z)$, *где* σ *стоји уместо релација Дефиниције 3.*

Теорема 5. No *има својства Моноида у односу на* $+$. *Такође, сабирање је комутативно.*

Доказ. Користимо индукцију.
Комутативност:

$$\begin{aligned} x + y &\equiv ((X^L + y) \cup (x + Y^L), (X^R + y) \cup (x + Y^R)) \\ &\equiv ((Y^L + x) \cup (y + X^L), (Y^R + x) \cup (y + X^R)) \equiv y + x \end{aligned}$$

Асоцијативност: слично као претходно.
Неутрал: подсетимо се да је 0 пар два празна скупа.
$x + 0 \equiv (X^L + 0, X^R + 0) \equiv (X^L, X^R) \equiv x$ □

Теорема 6. *Негација је добро дефинисана. За бројеве x, y њихове негације су бројеви и важи:*

- $-(-x) \equiv x$,
- $-(x+y) \equiv -x + (-y)$,
- $x \geq 0 \iff 0 \geq -x$.

Доказ.

$$
\begin{aligned}
&-(-x) \equiv -(\{-x^R\},\{-x^L\}) \equiv (\{-(-x^L)\},\{-(-x^R)\})\\
&\equiv (\{-x^L\},\{-x^R\}) \equiv x\\
&-(x+y) \equiv (\{-(x+y^R), -(x^R+y)\},\{-(x+y^L), -(x^L+y)\})\\
&\equiv (\{-x+(-y)^L, (-x)^L+(-y)\},\{-x+(-y)^R, -(x)^R+(-y)\}) \equiv -x+(-y)\\
&x \geq 0 \iff 0 \ngeq x^R \iff -x^R \ngeq 0 \iff 0 \geq -x
\end{aligned}
$$

Из треће тезе индуктивно прати да је негација броја исто број. □

Теорема 7. $x + (-x) = 0$. *Ниједан број различит од $-x$ у збиру с x не даје нулу.*

Доказ.

$$
\begin{aligned}
&x+(-x) = (\{x^L+(-x), x+(-x^R)\},\{x^R+(-x), x+(-x^L)\})\\
&= (\{-(-x^L+x), x+(-x^R)\},\{-(-x^R+x), x+(-x^L)\})
\end{aligned}
$$

Да би смо доказали да је нула једнака овом броју, довољно је показати да је 0 већа од леве стране, и мања од друге. По Последици 2 индукцији закључујемо да $x < x^R \implies x + (-x^R) < x^R + (-x^R) = 0$, аналогно за леву страну. Остали елементи ће се уклопити у доказ. Исто, ако $x + y = x + z = 0$, онда по Последици 2 $y = z$. □

Закључак: *No* има својства Абелове Групе.

1.3.2 Својства Прстена

Теорема 8. *Множење је добро дефинисано и производ два броја је број. За x_1, x_2, y_1, y_2 важи:*

- $x_1 = x_2 \implies yx_1 = yx_2$
- $x_1 \geq x_2 \wedge y_1 \geq y_2 \implies x_1y_1 + x_2y_2 \geq x_1y_2 + x_2y_1$

- $x_1 > x_2 \wedge y_1 > y_2 \implies x_1y_1 + x_2y_2 > x_1y_2 + x_2y_1$.

Доказ. За затвореност индуктивно можемо претпоставити да су x^Uy, xy^U, x^Uy^U бројеви. 4 неједнакости је потребно показати да је $(xy)^R > (xy)^L$. Пошто су поступци међусобно слични, показаћемо само једну неједнакост:
$x^{L_1}y + xy^R - x^{L_1}y^R > x^{L_2}y + xy^L - x^{L_2}y^L$
Ако је $x^{L_1} \geq x^{L_2}$, онда по индукцији $x^{L_1}y + x^{L_2}y^L \geq x^{L_2}y + x^{L_1}y^L$, имплицирајући због Теореме 4 да је десна страна мања или једнака од $M = x^{L_1}y + xy^L - x^{L_1}y^L$. Али M је строго мање од леве стране, пошто $xy^R + x^{L_1}y^L > xy^L + x^{L_1}y^R$. Ако је $x^{L_1} \leq x^{L_2}$, онда слично

$$x^{L_1}y + xy^R - x^{L_1} \geq x^{L_2}y + xy^R - x^{L_2}y^R > x^{L_2}y + xy^L - x^{L_2}y^L$$

И овим поступком доказујемо да је xy број.
Затим, имамо да је ${x_1}^R, {x_2}^R > x_1, x_2 > {x_1}^L, {x_2}^L$. Одатле требамо доказати 8 строгих неједнакости које по дефиницији значе $yx_1 \geq yx_2$ и $yx_1 \leq yx_2$. Прву неједнакост ћемо показати, друга има аналогни показ. Показ се види преко индукције:
$y^Lx_1 + y{x_1}^R = y^Lx_2 + y{x_1}^R > yx_2 + y^L{x_1}^R$
$y^Rx_1 + y{x_1}^L = y^Rx_2 + y{x_1}^L > yx_2 + y^R{x_1}^L$
$yx_1 + y^R{x_2}^R > y^Rx_1 + y{x_2}^R = y^Rx_2 + y{x_2}^R$
$yx_1 + y^L{x_2}^L > y^Lx_1 + y{x_2}^L = y^Lx_2 + y{x_2}^L$
Када је то показано, можемо показати преостале тезе. Предуслов последње тезе значи да $x_1 \geq {x_2}^R > x_2$ за неко ${x_2}^R$ или да $x_1 > {x_1}^L \geq x_1$ за неко ${x_1}^L$. Ако је прво случај, по индукцији $x_1y_1 + {x_2}^Ry_2 \geq x_1y_2 + {x_2}^Ry_1 = x_1y_2 + {x_2}^Ry_1 + x_2y_2 - x_2y_2 > x_1y_2 + {x_2}^Ry_2 + x_2y_1 - x_2y_2$, што сабирањем и одузимањем може да се изманипулише до жељене неједнакости. Слична изведба за други случај.
Приметићемо да је последња теза подслучај претпоследње. Остали случајеви друге су када $x_1 = x_2 \vee y_1 = y_2$, али преко прве тезе се лако показује да су обе стране једнаке. □

Лема. *За x важи:*

- $0x = 0$,
- $1x = x$,
- $(-1)x = -x$.

Доказ. Нула нема опције и стога нема ни производ с њом, тј, производ је 0. Остале две тезе прате индуктивно, уз доказ прве тезе. □

Теорема 9. *Множење је асоцијативно, комутативно и дистрибутивно у односу на сабирање.*

Доказ. Доказ комутативности је сличан доказу комутативности за сабирање.
Дистрибутивност: треба показати да је $x(y+z) = xy + xz$. Знамо да је $x^{S_1}(y+z) + x(y+z)^{S_2} - x^{S_1}(y+z)^{S_2}$ општи елемент неке од страна $x(y+z)$ где S_1, S_2 означавају неку страну (урађено да се избегне гломазност), и дефинишемо $S_3 = L$ ако $S_1 = S_2$, $S_3 = R$ иначе. Онда:

$$\begin{aligned}
&\{x^{S_1}(y+z) + x(y+z)^{S_2} - x^{S_1}(y+z)^{S_2}\}\\
&= \{x^{S_1}y + x^{S_1}z + xy^{S_2} + xz - x^{S_1}y^{S_2} - x^{S_1}z,\\
&\quad x^{S_1}y + x^{S_1}z + xy + xz^{S_2} - x^{S_1}y - x^{S_1}z^{S_2}\}\\
&= \{x^{S_1}y + xy^{S_2} + xz - x^{S_1}y^{S_2}, x^{S_1}z + xy + xz^{S_2} - x^{S_1}z^{S_2}\}\\
&= \{xy + (xz)^{S_3}, (xy)^{S_3} + xz\}
\end{aligned}$$

Применимо ли ову једнакост, добићемо:

$$x(y+z) = (\{xy + (xz)^L, (xy)^L + xz\}, \{xy + (xz)^R, (xy)^R + xz\}) = xy + xz$$

За идентичност не можемо доказати исто јер се ослањамо на адитивне инверзе.
Асоцијативност: Пошто би потпун испис доказа био сувише дугачак, поново користимо S као општу ознаку за страну и посматрајмо следеће:

$$\begin{aligned}
&\{(xy)^L z + (xy)z^L - (xy)^L z^L\}\\
&= \{x^S yz + xy^S z - x^S y^S z + xyz^L - x^S yz^L - xy^S z^L + x^S y^S z^L\}\\
&= \{x(y^S z + yz^L - y^S z^L) + x^S yz - x^S(y^S z + yz^L - y^S z^L)\}\\
&= \{x(yz)^S + x^S(yz) - x^S(yz)^S\}
\end{aligned}$$

Из једне скупине елемената са леве стране добијамо читаву леву страну $x(yz)$, коју бисмо исто добили да је једнака $\{(xy)^R z + (xy)z^R - (xy)^R z^R\}$. Слично се добија десна страна и асоцијатвност је доказана (на нивоу једнакости уместо идентичности јер се ослањамо на дистрибутивност). □

Због дистрибутивности имамо и:

Последица 3.

$$\begin{aligned}
(xy)^L &= \{xy - (x - x^L)(y - y^L), xy - (xy - (x^R - x)(y^R - y)\}\\
(xy)^R &= \{xy + (x - x^L)(y^R - y), xy + (xy - (x^R - x)(y - y^L)\}
\end{aligned}$$

Закључак: No у односу на операције $+, \cdot$ има својства Прстена. Да би смо доказали да има својста Поља, морамо објаснити како тражимо мултипликативни инверз, због чије изузетности се мора одвојити одељак.

1.3.3 Дељење и својства Поља

Започнимо са следећом дефиницијом:

Дефиниција 5. *x^{L+} су позитивни x^L. Дељеће дефинишемо као*

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}.$$

Мултипликативни инверз за $x > 0$ дефинишемо као $x^{-1} = ((X^{-1})^L, (X^{-1})^R)$ где

$$(X^{-1})^L = \{0, \frac{1+(x^R-x)(x^{-1})^L}{x^R}, \frac{1+(x^{L+}-x)(x^{-1})^R}{x^{L+}}\}$$
$$(X^{-1})^R = \{\frac{1+(x^{L+}-x)(x^{-1})^L}{x^{L+}}, \frac{1+(x^R-x)(x^{-1})^R}{x^R}\}.$$

За $x < 0$ инверз дефинишемо као $x^{-1} = -(-x)^{-1}$.

Одмах примећујемо једну проблематику коју морамо објаснити. Наиме, ова дефиниција исто демонстрира један вид рекурзије, где "познати елементи" инверза генеришу "нове елементе" инверза. За пример узмимо $2 = (\{1\}, \emptyset)$, и претпоставићемо да је инверз од 1 исто 1 (тривијално показати). Пошто знамо да $0 \in 2^{-1L}$, знамо да $\frac{1+(1-2)(0)}{1} \in 2^{-1R}$, то јест да $1 \in 2^{-1R}$. Према томе, $\frac{1+(1-2)(1)}{1} \in 2^{-1L}$, то јест $0 \in 2^{-1L}$. Видимо да различите елементе не можемо генерисати, па нам остаје $2^{-1} = (\{0\}, \{1\}) = \frac{1}{2}$. Заиста, наше конвенције се поклапају са нашим претходним математичким искуствном.

Теорема 10. *За број x важи:*

- $x(x^{-1})^L < 1 < x(x^{-1})^R$
- x^{-1} *је број*
- $(xx^{-1})^L < 1 < (xx^{-1})^R$
- $xx^{-1} = 1.$

Доказ. Рећи ћемо да $y = x^{-1}$, док x^{U+} јесте општи позитиван члан. Доказ овде се примењује за позитивне бројеве који немају негативних чланова (сваки позитиван број је једнак својој верзији без негативних чланова), док случајеви за негативно x се лако надовезују. Примећујемо да су чланови y, изузев нуле, облика $y^U = \frac{1+(x^{U+}-x)y'^U}{x^{U+}}$. Манипулацијама које су оправдане претходним Теоремама долазимо до $1 - xy^U = (1 - xy'^U)\frac{x^{U+}-x}{x^{U+}}$. Пошто је једна страна већа од нуле само када је друга већа од нуле, испитивањем случајева долазимо да y^U испуњава услов прве линије само када y'^U испуњава тај услов. Како 0 тривијално испуњава услов прве линије, по индукцији видимо да га сви чланови y испуњавају. По овоме и Теореми 8 за $x > 0$, $xy^R > xy^L$ добијамо да је y број.
Сада имајмо на уму да смо индуктивно претпоставили четврту линију и гледамо:

$$x^U y + xy'^U - x^U y'^U = x^U y + 1 - x^U y^U = 1 + x^U(y - y^U)$$

Добили смо да је општи члан $(xy)^U$ једнак датом изразу када $x^U > 0$ (за $x^U = 0$ ова једнакост не важи али услов треће тезе се своди на услов прве, који је доказан). Онда се по случајевима лако провери да је $(xy)^L < 1 < (xy)^R$. Тривијално $xy < 1^R$, а такође када је $x > 0$, значи да постоји $x^L \geq 0$, а 0 по дефиницији припада Y^L, и зато $x^L y \geq 0$, то јест постоји члан $(xy)^L \geq 0$, те $xy > 0 = 1^L$. Закључујемо да је $xy = 1$ и завршавамо доказ. □

Сада пошто смо показали да сваки елемент сем нуле има инверз, а по Теореми 8 ако $xy = xz = 1$, прати да је $y = z$, што значи да има највише један инверз уколико једнаке елементе третирамо као идентичне. То јест, No има својства поља у односу на $+, \cdot$, и зовемо га тотално уређено Поље.

1.4 Садржаност познатијих класа бројева

Пре свега, показаћемо такозвану Теорему једноставности:

Теорема 11. *Нека $P(x, z)$ представља $x^L < z \wedge z < x^R$. У том случају:*

$$P(x, z) \wedge \neg P(x, z^U) \implies x = z.$$

Доказ. Знамо да је $x^L < z < x^R$. Да постоји неко $z^L \geq x$, био би случај да $x^L < x \leq z^L < z < x^R$, што је контрадикција, дакле $x > z^L$. Слично закључујемо да $z^R > x$. Одавде добијамо да $x \geq z \geq x$, то јест $x = z$. □

1.4.1 Ординали и природни бројеви

Укратко, Фон Нојманови ординали (Њихов скуп се означава са On) јесу било који скуп који "садржи све претходно креиране ординале", то јест, ординал је било који транзитивни скуп транзитивних елемената[1] (за скуп C кажемо да је транзитиван акко $(\forall A, B)(A \in B \wedge B \in C \implies A \in C)$). То подразумева да је и празан скуп ординал, који зовемо 0. Природни бројеви се традиционално и дефинишу уз помоћ ових ординала (с тим што и 0 упада у ту дефиницију), а постоје и трансфинитни ординали попут $\omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2...\}$. Затим, имамо $\omega + 1$, $\omega + 2...$ 2ω, $2\omega + 1$, $2\omega + 2..$ $3\omega...$ $4\omega...$ $\omega^2...$ ω^ω *ad nauseam*. Сви ови ординали имају пребројиво много елемената, али њих је непребројиво много, и њихова унија јесте први непребројиви ординал, ω_1. Пошто нису главна тема рада, нећемо се удубљавати нити давати формалне доказе. Показаћемо, међутим, да се ординали могу имплементирати у надреалне бројеве.

Дефинишимо $f : On \longrightarrow No$ као $f(\alpha) = (\{f(\beta) | \beta \in \alpha\}, \emptyset)$. Функција јесте добро дефинисана, јер $f(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset)$, а индуктивно ако претпоставимо $(\forall \beta \in \alpha)(f(\beta) \in No)$, прати да је и $f(\alpha) \in No$, чим $f(\alpha)^L < f(\alpha)^R$. Требамо показати још $\alpha \subseteq \beta \iff f(\alpha) \leq f(\beta)$. Овде користимо тачну тврдњу да су класични ординали тотално уређени и да је један строги подскуп другом ако и само ако му припада. Тим речено, једнаки ординали имају једнаке (штавише идентичне) слике. Ако су неједнаки, без губитка општости можемо рећи да $\alpha \in \beta$. У том случају наравно $f(\alpha) \in f(\beta)^L$, што имплицира $f(\alpha) < f(\beta)$. Овиме покривамо претходну еквиваленцију и демонстрирамо да се ординали могу имплементирати у надреалне бројеве с очувањем њиховог поретка. Класу оваквих бројева можемо назвати On_s.

У ширем смислу *ординали јесу било који број чији је десни скуп празан, и њихову класу можемо назвати $^*On_s$. Очито је да је прва класа подкласа другој, но можемо показати и да је сваки ординал у ширем смислу једнака некој у ужем. Помоћи ћемо се следећом лемом:

Лема. *Класа ординала у ужем смислу мањих/не већих од неког броја јесте скуп.*

Доказ. Ако $\alpha < x$, онда $\alpha \leq x^L$ за неко x^L. Индуктивно можемо претпоставити да класе $\{\alpha \in On_s | \alpha \leq x^L\}$ за било које x^L јесу скупови. како је X^L скуп, класа претходно наведених скупова јесте скуп, а стога и њена

[1] Из дефиниције се показује да је сваки елемент ординала исто- ординал

унија (овде смо искористили аксиом уније, аксиом шему замене), која јесте класа свих $\alpha < x$.
Класа $\alpha = x$ може имати највише један елемент, јер смо се побринули да једнакост имплицира идентичност, за ординале у ужем смислу. Из тога следи да је и класа свих $\alpha \leq x$ скуп. $\square$

Узмимо за $\xi \in {}^*No_s$ класу $\psi = \{\beta \in On | f(\beta) < \xi\}$. Да није скуп, класа слика њених елемената не би била скуп (f је, као што смо проверили, ињективна) и то би била контрадикција са претходном лемом. За $\gamma \in \beta \in \psi$ важи $f(\gamma) < f(\beta) < \xi$, то јест $\gamma \in \psi$, те је пси транзитивни скуп ординала, то јест ординал. Сада узимамо $\alpha = f(\psi)$ и поредимо га са ξ. Лако видимо да је $\alpha \leq \xi$. Да је $\alpha < \xi$, био би случај да $\psi \in \psi$, што није тачно (можемо оповргнути коришћењем аксиоме утемељености или извођењем $\alpha < \alpha$), и зато $\alpha = \xi$.

Да овај одељак приведемо крају, навешћемо неколико дефиниција и конвенција које ће убудуће бити корисне. *Природни бројеви наравно јесу они *ординали мањи од ω, уз то што нулу можемо укључити или искључити. Без нуле, њихову класу ћемо звати ${}^*\mathbb{N}$, са нулом ${}^*\mathbb{N}_0$, а њихов општи члан ћемо означавати као и другде, словима m, n и слично. *Цели бројеви јесу сви природни бројеви, њихове негације и нула, и њихову класу зовемо ${}^*\mathbb{Z}$. Слична конвенција важи и за њих. Ординале (класичне или надреалне) означавамо грчким словима.

1.4.2 Дијадични разломци и реални бројеви

Да би смо схватили имплементацију реалних бројева, подсетимо се да у класичној конструкцији реалних бројева, узимамо такозване Дедекиндове пресеке рационалних бројева. Реалан број онда представља број између чланова скупова који чине пресек. Желимо да "наши" реални бројеви имају сличну карактеристику, али користићемо се класом дијадичних рационалних бројева. Прво дефинишимо $\frac{1}{2^n} = (\{0\}, \{\frac{1}{2^k} | k < n, k \in {}^*\mathbb{N}_0\})$ за $n \in {}^*\mathbb{N}_0$. Може се доказати да је сваки члан низа $a_n = \frac{1}{2^n}$ дупло мањи од претходног, и да је дефиниција низа сагласна са нашим очекивањем. Затим дефинишемо да су дијадични разломци неки *цели број пута неки члан горњег низа. Њихову класу ћемо називати ${}^{*2}\mathbb{Q}$, и можемо је третирати као скуп јединствених представника са пребројиво много елемената.

Теорема 12. *Ако именилац дијадичног разломка d дели 2^n, онда* $d = (\{d - \frac{1}{2^n}\}, \{d + \frac{1}{2^n}\})$.

Доказ. За $n = 0$ у питању јесу *цели бројеви. Онда по Теореми једноставности очито прати да $d = (\{d-1\}, \{d+1\})$. Правимо индуктивну хипотезу за n и доказујемо за $n+1$. Нека је $z = (\{d - \frac{1}{2^{n+1}}\}, \{d + \frac{1}{2^{n+1}}\})$. Може се добити да $2z = (\{2d - \frac{1}{2^{n+1}}\}, \{2d + \frac{1}{2^{n+1}}\})$, што је једнако $2d$ по индуктивној претпоставци, дакле $z = d$. □

Пошто смо разумели овај део, разумећемо и везу дијадичних разломака са реалним бројевима врло ускоро:

Дефиниција 6. *x је *реалан број ако важи*

$$-n < x < n \text{ за неки природан број } n$$
$$x = (\{x-1, x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{4}...\}, \{x+1, x+\frac{1}{2}, x+\frac{1}{4}...\}).$$

Прва теза дефиниције јесте потпуно јасна, док друга захтева мотивацију. Сигурно је да, ако је x број који препознајемо као реалан, да ће задовољавати и другу тезу. Такође се лако утврђује да је сваки дијадичан разломак *реалан. Саберимо га са неком инфинетесималом, на пример $\frac{1}{\omega}$ и претпоставимо да је тај збир исто *реалан. Упоредимо ли x са члановима $(\{x+\frac{1}{\omega}-1, x+\frac{1}{\omega}-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{\omega}-\frac{1}{4}...\}, \{x+\frac{1}{\omega}+1, x+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{2}, x+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{4}...\})$, видимо да је између опција суме, иако не мора бити случај да иједна опција x задовољава исто, стога по Теореми једноставности $x = x + \frac{1}{\omega}$, што је контрадикција.

Теорема 13. *Класа *реалних бројева има својства Поља.*

Доказ. Затвореност сабирања, адитивни инверз, и чињеница да су 0 и 1 *реални се лако доказују, уз помоћ Теореме једноставности. Под претпоставком да су x, y *реални и по Последици 3 утврђујемо да $xy = (\{xy - \frac{1}{2^m 2^n} | m, n \in {}^*\mathbb{N}_0\}, \{xy + \frac{1}{2^m 2^n} | m, n \in {}^*\mathbb{N}_0\})$, а да су ограничени се лако показује применом Теореме 8.
Сада рецимо да x јесте *реалан и различит од нуле, док y није. У случају да y није ограничен, можемо добити да је y или веће од сваког *целог броја, или мање од сваког *целог броја, док x је или веће или мање од 0. Погледајмо случај када је y веће од свих *целих бројева и $x > 0$, остали случајеви имају аналогни доказ или се могу надовезати помоћу негације:

$$(\exists n)(xy < n < y) \implies xy < y \implies x < 1 \implies y < xy < n \implies \perp$$

У случају да јесте ограничен, али не поштује једнакост из дефиниције, за $x \neq 0$ xy је исто неће поштовати, што се лако провери коришћењем

претходних теорема. У сваком случају, xy није *реално.
Знамо да *реално $x \neq 0$ има свој инверз. Да инверз није *реалан, био би случај да $xx^{-1} = 1$ није *реалан број, што знамо да јесте. $\square$

Сада једино што нам преостаје јесте да повежемо *реалне бројеве са дијадичним разломцима.

Теорема 14. *Сваки *реалан број има јединствену репрезентацију* (L, R) *где* L, R *јесу непразни дисјунктни скупови дијадичних разломака, без максимума и минимума респективно,* ${}^{*2}\mathbb{Q}\backslash(L \cup R)$ *има највише један елемент, док сваки пар скупова* $L < R$ *коме одговара претходни опис гради *реалан број.*

Доказ. За *реално x узимамо $L = \{d \in {}^{*2}\mathbb{Q} | d < x\}, R = \{d \in {}^{*2}\mathbb{Q} | d > x\}$ и покажимо да има набројана својства. Знамо да постоји неко $n \in R, -n \in L$ по услову ограничености те јесу непразни, и сигурно јесу дисјунктни. Претпоставимо ли да L има максимум, назовимо га m, мора бити мање од неког $x - \frac{1}{2^n}$ (иначе бисмо добили да $x = m$, по Теореми једноставности и Теореми 12), али онда добијамо да $x - \frac{1}{2^{n+1}} > m + \frac{1}{2^{n+1}}$, што је дијадични разломак између m и x, тако да L нема максимум, и слично R нема минимум. Ако је x недијадично, $L \cup R$ јесу сви дијадични, а ако је дијадично, унија јесу сви дијадични различити осим x што чини јединствен елемент у скупу дијадичних разломака. Да је случај да два различита "пресека" граде исти *реалан број, можемо претпоставити да један дијадични разломак мења свој "статус". Ако мења припадност из L у R или обрнуто, било би да $x > d > x$, што је контрадикција. Ако у једном пресеку се појављује у L или R, а у другом се не појављује, значило би да $d = x \neq d$, што је контрадикција.
Сваки пресек сигурно дефинише неки број, који (пошто су скупови непразни) јесте ограничен. Очито за $(L, R) = x$, $x - \frac{1}{2^n} < x < x + \frac{1}{2^n}$. Пошто L нема максимум, знамо да за $d \in L$ има неко $d_1 > d$. Разлику $d - d_1$ можемо записати као неко $\frac{k}{2^n} > \frac{1}{2^n}$. Дакле $d - d_1 < -\frac{1}{2^n}$, или $d < d + (x - d_1) < x - \frac{1}{2^n}$. Слично можемо показати за елементе R, и онда по Теореми једноставности x је *реално. $\square$

Закључујемо да *реални бројеви заиста поседују очекивана својства, и због паралеле са класичним реалним бројевима, имамо право да тврдимо наследство њихових битних карактеристика (попут супремума, инфимума). У даљем тексту опште или конкретне *реалне бројеве ћемо представљати ознакама попут r, а њихова класа биће ${}^*\mathbb{R}$.

2 Опште репрезентације и везе са познатијом математиком

2.1 Рођендани и знаковне листе

Појам "рођендана" неког броја има врло интуитивну мотивацију: ми желимо да кажемо да конструкција неких бројева "долази пре" конструкције других. Ригорозна дефиниција нас обавезује да се вратимо на ординале, које адекватно нумеришу "дане постања".

Дефиниција 7. *Скуп направљених бројева, старих бројева и нових бројева на дан α су дефинисани, редом:*

- $M_\alpha = \{x | x^U \in O_\alpha\}$
- $O_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} M_\beta$
- $N_\alpha = M_\alpha \backslash O_\alpha$.

За број кажемо да је рођен на дан α ако припада N_α. На пример, није тешко проверити да се на нулти дан рађа 0, а на први дан 1 и -1. У претходном одељку, чак, видимо да се дијадични разломци рађају на коначне дане, и да се сви *реални бројеви рађају до или на дан ω.

Теорема 15. *Свако x се налази у јединственом N_α.*

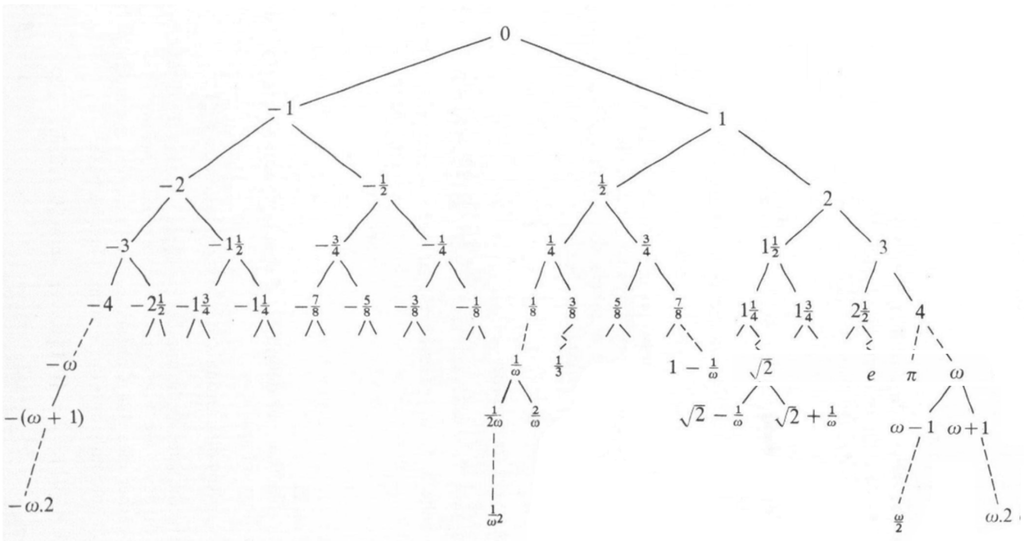
Доказ. Имамо право на индуктивну претпоставку да исто важи за све x^U. Узмимо подкласу свих ординала O већих од било којег ординала на коју је неко x^U рођено. По дефиницији, $x \in M_\alpha$ за било које $\alpha \in O$. Наравно, подкласа је непразна, стога је и $M = \{\alpha | x \in M_\alpha\}$ а пошто су ординали добро-уређени, постоји и минимум у M, назовимо га α'. Знамо да за било које $\beta > \alpha'$ $x \notin N_\beta$, тако да једини скуп коме може припадати јесте $N_{\alpha'}$. Да не припада, то би значило да постоји $\beta < \alpha'$ где $x \in M_\beta$, што оповргава минималност α'. □

Због претходне теореме, можемо направити и дефиницију за релације којим поредимо сложености броја (сложеност броја јесте само други начин да кажемо колико је касно "рођен"). Нека $\succ$ значи "сложеније од", $\sim$ значи "једнако сложено као", а $\succeq$ "макар сложено колико":

Дефиниција 8.

$$
\begin{aligned}
&B(x) = \alpha, x \in N_\alpha \\
&x \succeq y \iff B(x) \geq B(y) \\
&x \succ y \iff y \not\succeq x \\
&x \sim y \iff x \succeq y \succeq x.
\end{aligned}
$$

Испод имамо илустровано како бројеви "хронолошки" настају.



Слика 1: стабло надреалних бројева

Приметимо да, пошто дефинишемо релацију преко ординала, она наслеђује њена својства тоталног поретка и доброг поретка.

Теорема 16. $x \succ x^U$.

Доказ. Прво проверимо следеће:

$$
x \in O_\alpha \implies x \in \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta
$$

$$
\implies x^U \in \bigcup_{\gamma<\beta<\alpha} M_\gamma \subseteq O_\alpha
$$

$$\implies x \in M_\alpha$$

И тиме показасмо да $O_\alpha \subseteq M_\alpha$. Затим покажимо да је $M_\alpha = \bigcup_{\beta \leq \alpha} N_\beta$. Индуктивно претпоставимо да исто важи за претходне случајеве. По дефиницији и претходном закључку важи да $M_\alpha = O_\alpha \cup N_\alpha$. Лако се добије да је то једнако $N_\alpha \cup \bigcup_{\gamma \leq \beta < \alpha} N_\gamma$, одакле се очигледно изводи индуктивни корак.

Претпоставимо да постоји неко $x^U \succeq x$. То би значило да за α такво да $x^U \in N_\alpha$ важи да $x \in M_\alpha$ по претходном показу. Међутим, то имплицира да $x^U \in O_\alpha$ по дефиницији M_α, што је контрадикција. □

Све више увиђамо да својство рођендана поприма очекиване особине. Овде можемо да уведемо и једну општу верзију индукције: ако за било коју торку ординала $\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n$ докажемо да

$$(\forall t_n \in ((M_{\alpha 1} \times M_{\alpha 2} ... \times M_{\alpha n}) \backslash (N_{\alpha 1} \times N_{\alpha 2} ... \times N_{\alpha n})))(P(t_n))$$
$$\implies (\forall t_n \in (N_{\alpha 1} \times N_{\alpha 2} ... \times N_{\alpha n})(P(t_n))$$

Онда смо доказали да својство P важи за сваку торку бројева $x_1, x_2 ... x_n$. Сви претходни индуктивни докази се могу адекватно заменити оваквом представом индукције.

Дефиниција 9. $x_\beta = (\{z \in O_\beta | z < x\}, \{z \in O_\beta | z > x\})$ *зовемо бета апроксимација* x.

Овде примећујемо структуру врло налик Дедекиндовим пресецима. Такође, овај појам нам нуди јединствену неарбитрарну репрезентацију за сваки број. За $x_{B(x)}$, у "Дедекиндовим пресецима" се налазе све опције x, што по Теореми једноставности значи да $x = x_{B(x)}$. Имамо избор, онда, да прогласимо да је бета апроксимација за x једнака x за минимално β представник броја x и да овако долазимо до општије форме надреалног броја. Међутим, размотримо следећу представу:

Дефиниција 10. *Знаковни развој броја* x *се дефинише:*

$$\Omega = \{+, -\}$$
$$s = \{(\alpha, s(\alpha) \in On \times \Omega | (x - x_\alpha > 0 \land s(\alpha) = +) \lor (x - x_\alpha < 0 \land s(\alpha) = -)\}.$$

Напомена: теоријско-скуповно тумачење знакова $+, -$ јесте отворено. Неће правити значајну разлику какво год тумачење имали.
Мада не изгледа тако испрва, s поприма облик функције, то јест релације између нека два скупа звана домен и кодомен где сваки члан из домена

је у релацији са јединственим чланом из кодомена (с тим што домен не може бити On него јесте неки ординал). Њих представљамо "низом" плусева и минусева. На пример, $(++-)$ представља функцију домена 3 где 0 има слику у $+$, 1 у $+$ и 2 у $-$ (подсетник да $3 = \{0,1,2\}$ по Фон Нојмановим конструкцијама ординала), и у овом случају то представља број $\frac{3}{2} = (\{0,1\},\{2\})$.

Дефиниција 11. *Дужина знаковног развоја $\Lambda(s)$ јесте први ординал који нема дефинисану слику у s.*
Бета-апроксимација знаковног развоја s (звану иницијални сегмент за $\beta < \Lambda(s)$) јесте

$$s_\beta = \{(\alpha, s(\alpha)) \in s | \alpha \in \beta\}.$$

За знаковне развоје s, t важи $s > t$ када за неко $\alpha \in On$ важи

$$s_\alpha = t_\alpha \wedge ((t(\alpha) = - \wedge \neg s(\alpha) = -) \vee (s(\alpha) = + \wedge \neg t(\alpha) = +)).$$

$s = t$ када су идентични.

Другим речима, дужина развоја јесте домен развоја (еквивалентна тврдња у случају ординала), а поредак знаковних развоја јесте лексикографски, где $+$ третирамо као веће од недефинисаног, а $-$ као мање од недефинисаног. Врло ускоро, показаћемо да однос између бројева и развоја очувава поредак и да постоји број за сваки развој.
Ако бисмо експериментисали, приметили бисмо да се апроксимације броја x поклапају са апроксимацијама његовог развоја. То није случајност:

Лема. *Ако је s знаковни развој броја x, s_α је знаковни развој x_α.*

Доказ. За $\beta \geq \alpha$ одговарајући чланови s су изостављени. За $\beta < \alpha$ делимо на случајеве. Ако је $s(\beta)$ недефинисано, сигурно је и $s_\alpha(\beta)$ недефинисано. Ако $s(\beta) = +$, то значи да $x_\beta < x$. Подсетимо ли се дефиниције за апроксимације, видећемо да $x_\beta \in {X_\alpha}^L$, и стога $x_\beta < x_\alpha$, то јест $s_\alpha(\beta) = +$. Слично, када је $s(\beta) = -$ онда је $s_\alpha(\beta) = -$.

□

Сада имамо капацитет да успоставимо кореспонденцију између бројева и знаковних редова:

Теорема 17. *Нека бројеви x, y имају знаковни развој s, t. Онда $x = y$ акко $s = t$ и $x > y$ акко $s > t$. Такође, $B(x) \geq \Lambda(s)$, и за сваки знаковни развој s постоји број x чији је знаковни развој s и $\Lambda(s) = B(x)$.*

Доказ. Евидентно је да, ако $x = y$, онда $x_\alpha = y_\alpha$ за свако α, тј $x - x_\alpha = y - y_\alpha$, и онда су елементи s, t идентични. Ако су развоји идентични, њихови иницијални сегменти су идентични, по индукцији можемо рећи да су старије апроксимације x, y једнаке. По Теореми једноставности, $x = (\{x_\alpha < x\}, \{x_\alpha > x\})$, слично за y, и онда је евидентно да $x = y$.
Ако $s > t$, за неки ординал важи $s(\alpha) > t(\alpha), s_\alpha = t_\alpha$. Онда, према претходној леми, $x_\alpha = y_\alpha$, али $x - x_\alpha > 0 \geq y - y_\alpha$, или $x - x_\alpha \geq 0 > y - y_\alpha$, што у сваком случају значи да $x - x_\alpha > y - y_\alpha$ то јест $x > y$. Због својства поретка бројева, можемо рећи да се поредак очувава у знаковним развојима. Ако $B(x) = \alpha$, а можемо одабрати $\beta \leq \alpha$ да $x_\beta = x$, онда $s_\beta = s$ и имамо $\Lambda(s) = \beta \leq B(x)$.
Да би смо наставили, индуктивно претпоставимо да за сваки развој где $\Lambda(t_y) < \alpha$ постоји број $y \in O_\alpha$ да задовољава тврдњу теореме, и претпоставимо да за неко $\Lambda(s) = \alpha$ исто не важи. Узмимо $x = (\{y|t_y < s\}, \{y|t_y > s\})$ и његов развој назовимо t_x. По леми $\Lambda(t_x) \leq B(x) = \alpha$ (Да $x \in O_\alpha$, био би једнак једној од својих опција, али сигурно припада M_α). Утврдимо да $t_y < s \iff y < x \iff t_y < t_x$ и да $t_y > s \iff y > x \iff t_y > t_x$. То значи да $\Lambda(t_x) \geq \alpha$. Ако је $t_x > s$, то значи да $t_{x\beta} = s_\beta, t_x(\beta) = +, s(\beta) = -)$ за $\beta < \alpha$ (јер оба имају дужину α). Како су апроксимације x и чланови x, онда је $t_{x\beta} = s_\beta > s$, што значи по претходној еквиваленцији да $t_{x\beta} > t_x$, што је контрадикција јер исто закључујемо да $t_x > t_{x\beta}$. Слично, контрадикцију добијамо ако претпоставимо да $t_x < s$, и стога су та два развоја једнака. Што значи да s ипак јесте развој од неког броја, и доказ индукцијом је завршен. □

Закључак: знаковни развоји јесу јединствена репрезентација бројева која очувава њихов ред. Касније ћемо се вратити развојима и видети њихове засебне теоријске последице.

2.2 Омега-мапа и нормална форма броја

Започињемо са следећом дефиницијом:

Дефиниција 12. *$x \approx y$ (x је сразмерно са y) када* $(\exists n \in {}^*\mathbb{N}_0)(n|x| > |y| \wedge n|y| > |x|)$.

Није тешко проверити да је релација сразмерности релација еквиваленције. Такође, она дели класу бројева на "конвексне" класе еквиваленције, што у овом случају значи да, ако се број налази између два међусобно сразмерна броја истог знака, онда је сразмеран с оба та броја (опет, врло лако показати). Још једна корисна дефиниција јесте:

Дефиниција 13. *$x >> y$ (x је много веће од y) када $\neg x \approx y \wedge x > y$. $x << y$ (x је много мање од y) када $\neg x \approx y \wedge x < y$.*

Оваква релација технички није строга релација поретка (где нула ствара проблем), али на класи позитивних бројева се понаша као таква, стога надаље ћемо се користити овом релацијом. Шта би било занимљиво принудити теорији надреалних бројева јесте да свака оваква класа има неког јединственог представника, најједноставнијег могућег. Испоставља се да такозвана омега-мапа броја управо има ту улогу:

Дефиниција 14. *Омега-мапа броја x јесте*

$$\omega^x = (\{0, r^+\omega^{x^L}\}, \{r^+\omega^{x^R}\})$$

*где је r^+ ω-та апроксимација општег позитивног *реалног броја.*[1]

Теорема 18. *За сваки позитиван (а с тим и негативан) број x постоји y чија је омега-мапа сразмерна с x. За различито $x > y$ важи да $\omega^x >> \omega^y$. Омега-мапа је добро дефинисана.*

Доказ. За први део теореме можемо индуктивно претпоставити исто за све позитивне чланове x. Ако је x сразмерно са једном од својих опција, онда смо готови. Ако не, назовимо представнике сразмерне са његовим левим и десним опцијама ω^{y^L} и ω^{y^R}, и конструишимо број: $y = (\{y^L\}, \{y^R\})$. У том случају $x = \omega^y$, а тиме је и сразмерно.
За други део теореме, ако $x > y$, онда макар једном $x \geq y^R$ или макар једном $x^L \geq y$, што индуктивно имплицира

$$\omega^x \geq \omega^{y^R} >> \frac{1}{r^+}\omega^y \quad \text{или} \quad \frac{1}{r^+}\omega^x >> \omega^{x^L} \geq \omega^y$$

У сваком случају, $\omega^x >> \omega^y$. Добра дефинисаност одавде прати. □

Теорема 19. *За бројеве x, y важи:*

- $\omega^x\omega^y = \omega^{x+y}$
- $\omega^0 = 1$
- $\omega^{-x} = (\omega^x)^{-1}$.

[1]Помени апроксимације су сувишни по питању разумевања дефиниције. Ово је урађено да бисмо осигурали да су поменуте класе скупови, а додатна рестрикција неће искључити ниједан *реалан број до једнакости (по Теореми 13)

Доказ. Индуктиван доказ. Леве опције производа јесу 0, $r^+\omega^{x^L+y}$, $r^+\omega^{x+y^L}$, $r^+\omega^{x^L+y} + s^+\omega^{x+y^L} - r^+s^+\omega^{x^L+y^L}$ и $r^+\omega^{x^R+y} + s^+\omega^{x+y^R} - r^+s^+\omega^{x^R+y^R}$. Можемо показати да су последње две опције сувишне. Ако претпоставимо да $x^L + y \geq x + y^L$, онда имамо да је $\omega^{x^L+y} \geq \frac{s^+}{r^+}\omega^{x+y^L}$, и добијамо да је претпоследња наведена опција мања од $2r^+\omega^{x^L+y}$, стога је редундантна. Слично, ако је $x^L + y < x + y^L$, претпоследња наведена опција је мања од $2s^+\omega^{x+y^L}$. Последња се добија да је мања од нуле када увидимо да $\omega^{x+y^R} < \frac{r^+}{3}\omega^{x^R+y^R}$ и да $\omega^{x^R+y} < \frac{s^+}{3}\omega^{x^R+y^R}$.
Десне опције производа јесу $r^+\omega^{x^R+y}$, $r^+\omega^{x+y^R}$, $r^+\omega^{x^R+y}+s^+\omega^{x+y^L}-r^+s^+\omega^{x^R+y^L}$ и $r^+\omega^{x^L+y} + s^+\omega^{x+y^R} - r^+s^+\omega^{x^L+y^R}$. Како $x^R + y > x^R + y^L$, а $\omega^{x+y^L} > 0$, добијамо да је претпоследња опција већа од $r^+\omega^{x^R+y} - r^+s^+(\frac{1}{2s^+}\omega^{x^R+y})$, што је веће од неке прве опције и стога редундантна. Аналогно, последња је већа од неке друге опције. Овде закључујемо да

$$\omega^x\omega^y = (\{0, r^+\omega^{x^L+y}, r^+\omega^{x+y^L}\}, \{r^+\omega^{x^R+y}, r^+\omega^{x+y^R}\}) = \omega^{x+y}$$

Тривијално се показује друга тврдња, а трећа следи из прве две. □

Нека је ω^y јединствен представник сразмеран са $x \neq 0$. Направимо класе $L = \{t \in {}^*\mathbb{R} | \omega^y t \leq x\}$ и $R = \{t \in {}^*\mathbb{R} | \omega^y t > x\}$. Због наслеђене теорије реалних бројева, овде се појављује број r који је супремум L и инфимум R. Сада нас занима број $x_1 = x - r\omega^y$, и његова сразмерност с ω^y. Ако $x_1 = 0$, онда смо готови. Ако $x_1 > 0$, по избору r то значи да $(\forall s > r)(x < s\omega^y)$, те не може бити сразмерно јер онда за неко $k > 0$ важи $kx > \omega^y(1 + rk) = k\omega^y(r + \frac{1}{k}) > kx$. Слично за $x_1 < 0$. Зато добијамо да за неко r (јединствено, није претешко доказати) x_1 је несразмерно са ω^y. Сразмерно је или са нечим мањим, или не нула, али овде нам се отвара прилика за запис броја x. Све што треба да постигнемо јесте да за x_1, па за x_2, x_3 понављамо процес, и добијамо форму:

$$x = r_0\omega^{y_0} + r_1\omega^{y_1} + ... + x_\alpha$$

И тако мотивишемо појам нормалне форме; желимо да имамо репрезентацију броја као суму његових несразмерних делова:

Дефиниција 15. *Нормална форма јесте формална сума облика* $\sum\limits_{\beta<\alpha}\omega^{y_\beta}r_\beta$, *где је* α *неки ординал,* r_β *су *реални бројеви различити од нуле, а* ω^{y_β} *јесу строго опадајући низ представника.*
За дату нормалну форму, и за $\beta < \alpha$ *и* $r \neq r_\beta$ *осакаћена форма јесте формална сума* $\sum\limits_{\gamma<\beta}\omega^{y_\gamma}r_\gamma + \omega^{y_\beta}r$. *Осакаћена форма је мања од својег оригинала ако је* $r < r_\beta$, *већа ако важи супротна неједнакост.*

Њихова релација са бројевима је следећа: ако је број чланова формалне суме неки ординал са претходником, број с којим кореспондира јесте наравно збир последњег члана форме и броја који кореспондира са истом формом без последњег члана. Ако је број чланова неки лимит-ординал, тј. ординал без претходника, онда узимамо све бројеве који кореспондирају с неком осакаћеном формом мањом од оригиналне, и све бројеве који кореспондирају с неком осакаћеном формом већом од оригиналне. Најједноставнији број између њих ће да кореспондира са оригиналном формом. Иако се битно разликују, нормалне суме трансфинитних дужина су потребне зарад неких бројева где се процес објашњен горе не зауставља након коначно много корака (на пример $\frac{\omega}{\omega-1}$).

Очито, ова конвенција одређује јединсвен број за сваку нормалну форму. Такође, број не може да кореспондира са више од две нормалне форме. Раније објашњени итеративни процес помаже у налажењу нормалне форме док год терминира. Ако не терминира, произведени развој и даље представља неку нормалну форму. Број који кореспондира са том нормалном формом се треба одузети од почетног, и добићемо нови број несразмеран и са једним сабирком те форме. Само треба аргументовати да постоји неки ординал који представља дужину те форме. Да не постоји, сложеност броја исто не би био ординал. Уз мало техникалности, ово ће бити довољно да докаже:

Теорема 20. *Сваки број кореспондира са јединственом нормалном формом.*

Приметимо, такође, да уколико је ординал који представља дужину форме лимит-ординал, по конвенцији њена вредност јесте између вредности осакаћених форми. Уколико има претходника, по Теореми једноставности можемо игнорисати све осакаћене форме дужина које нису максималне, и увидећемо да иста угњежденост постоји у овом случају. Тако се доказује:

Лема. *За сваку нормалну форму, њена вредност је најједноставнији број између вредности њених осакаћених форми.*

Другачији начин да ово искажемо јесте:

$$\sum_{\beta<\alpha}\omega^{y_\beta}r_\beta = (\{\sum_{\beta\leq\gamma}\omega^{y_\beta}r_\beta - \omega^{y_\gamma}\epsilon|\gamma<\alpha,\epsilon>0\},\{\sum_{\beta\leq\gamma}\omega^{y_\beta}r_\beta + \omega^{y_\gamma}\epsilon|\gamma<\alpha,\epsilon>0\})$$

Овде додајемо једну тврдњу коју ћемо користити али нећемо доказати овде, јер је то општи резултат. Доказ се може наћи у [3]:

Лема. *(Комбинаторна лема на полугрупама) Нека је T добро уређен подскуп позитивних*[2] *елемената неке тотално уређене полугрупе, и нека је S скуп коначних сума елемената T. Онда је S добро уређен и сваки његов елемент се може представити као коначна сума елемената T на само коначно много начина.*

Сада дефинишемо одређене појмове који ће нам помоћи у изражавању даљих тврдњи:

Дефиниција 16. *Ако свакоме броју y припишемо *реалан број r_y, и бројеви којима су приписане вредности различите од нуле чине опадајући низ, формалној суми $\sum\limits_{y \in No} \omega^y r_y$ приписујемо вредност одговарајуће нормалне форме. Такође, формални производ $(*)$ две форме дефинишемо као $\sum\limits_{\substack{\gamma<\alpha \\ \delta<\beta}} \omega^{y_\gamma + y_\delta} r_\gamma s_\delta$.*

Због претходно доказане леме имамо и последицу:

Последица 4.

$$(\sum_{y \in No} \omega^y r_y)^L = \{\sum_{y>z} \omega^y r_y + \omega^z {r_z}^L | z \in No\}$$
$$(\sum_{y \in No} \omega^y r_y)^R = \{\sum_{y>z} \omega^y r_y + \omega^z {r_z}^R | z \in No\}.$$

*Где се за опције *реалних бројева бирамо само оне ранијег рођендана.*

Последња рестрикција омогућава две ствари: знамо да су конструисане класе скупови, што нам је потребно, и знамо да иза осакаћених форми стоје једноставнији бројеви.

Због Комбинаторне леме, знамо да формални производ две форме такође одговара нормалној форми. Није тешко приметити и да $y * z = (\{y * z - \omega^x \epsilon\}, \{y * z + \omega^x \epsilon\})$ где је ϵ позитиван *реални број, а $x = y_\alpha + z_\beta$ за опште y_α, z_β где они чине бројеве у низовима који одговарају датим нормалним формама.

Теорема 21. $\sum\limits_{y \in No} \omega^y r_y + \sum\limits_{y \in No} \omega^y s_y = \sum\limits_{y \in No} \omega^y (r_y + s_y)$.

Доказ. Користимо индукцију. Теорема следи из претходне короларије и дефиниције збира. □

Лема. $\omega^x \sum\limits_{\beta<\alpha} \omega^{y_\beta} r_\beta = \sum\limits_{\beta<\alpha} \omega^{y_\beta + x} r_\beta$.

[2]Позитивни елементи су такви да $a + a > a$

Доказ. Индукција по α. Уколико има претходника, тривијално је. Иначе, имамо изразе облика $\sum_{\beta\leq\gamma}\omega^{y_\beta+x}r_\beta \pm \omega^{y_\gamma+x}\epsilon + \omega^{x^S}(\sum_{\gamma<\beta<\alpha}\omega^{y_\beta}r_\beta \mp \omega^{y_\gamma}\epsilon)$ у левом и десном скупу производа. Због несразмерних сабирака, лако се види да:

$$\sum_{\beta\leq\gamma}\omega^{y_\beta+x}r_\beta - \omega^{y_\gamma+x}2\epsilon + \omega^{x^L}(\sum_{\gamma<\beta<\alpha}\omega^{y_\beta}r_\beta + \omega^{y_\gamma}2\epsilon) < \sum_{\beta\leq\gamma}\omega^{y_\beta+x}r_\beta - \omega^{y_\gamma+x}\epsilon$$
$$\sum_{\beta\leq\gamma}\omega^{y_\beta+x}r_\beta + \omega^{y_\gamma+x}\epsilon + \omega^{x^R}(\sum_{\gamma<\beta<\alpha}\omega^{y_\beta}r_\beta - \omega^{y_\gamma}\epsilon) < \sum_{\beta\leq\gamma}\omega^{y_\beta+x}r_\beta - \omega^{y_\gamma+x}\epsilon$$

Њима демонстрирамо да је тражена форма већа од леве стране производа. Слично се показује да је мања од десне стране. За њене опције, међутим, то не важи јер су укључене у производу, стога лема је тачна по Теореми једноставности. □

Теорема 22. *Формални производ две нормалне форме одговара обичном производу;* $y \cdot z = y * z$.

Доказ. Делимо на два случаја: када дужина макар једне нормалне форме има претходника (тада је очито с обзиром на претходну лему) и када је дужина обе нормалне форме лимит-ординал. У другом случају испитујемо опције производа, које су облика $yz^S + y^T z - y^T z^S$. Индукцијом долазимо до $y * z - (y - y^T) * (z - z^S)$. Сада, $y - y^T$ је облика $\pm\omega^{y_\alpha}\epsilon_1 + c_1$, где је c_1 несразмерно мање од остатка. Слично, $z - z^S$ је облика $\pm\omega^{z_\beta}\epsilon_2 + c_2$. Њихов производ онда јесте облика $\pm\omega^{y_\alpha+z_\beta}\epsilon_1\epsilon_2 + c$, где стоји минус ако је лева опција, а плус ако је десно, и c је много мање. Онда важи

$$yz = (\{y * z - \omega^{y_\alpha+z_\beta}\epsilon - c\}, \{y * z + \omega^{y_\alpha+z_\beta}\epsilon + c\})$$

Али ово је евидентно једнако броју $(\{y * z - \omega^{y_\alpha+z_\beta}\epsilon\}, \{y * z + \omega^{y_\alpha+z_\beta}\epsilon\})$ по Теореми једноставности (за дату опцију увек можемо одабрати једну мању и једну већу са исте стране), што је $y * z$. □

Одавде следи и

Последица 5. $\sum_{y\in No}\omega^y r_y \cdot \sum_{y\in No}\omega^y s_y = \sum_{y\in No}\omega^y \sum_{z\in No} r_z s_{y-z}$.

2.2.1 Бесконачне суме

Сада смо мотивисани да конструишемо општије верзије сума, облика $\sum_n x_n$. За наше алгебарске циљеве поставићемо довољне (али не нужно и потребне) услове конвергентности.

Дефиниција 17. *Нека за свако n важи* $x_n = \sum_{y \in No} \omega^y r_{y,n}$. *Кажемо да сума* $\sum_n x_n$ *конвергира ка* x *ако суме типа* $\sum_n r_{y,n}$ *конвергирају ка* r_y, $x = \sum_{y \in No} \omega^y r_y$ *и можемо одабрати строго опадајући низ бројева тако да* $r_{y,n} = 0$ *за било које y ван тог низа.*

Последња дефиниција је ту да бисмо спречили апсурдности попут:

$$(1-\omega)+(\omega-\omega^2)+...=1$$

Дефиниција 18. *Број је инфинетесималан ако је између сваког позитивног и сваког негативног *реалног броја.*

Теорема 23. *Сума облика* $\sum_n r_n x^n$ *конвергира уколико је* x *инфинетесимално.*

Доказ. Овде користимо претходно поменуту Комбинаторну лему, или пре њену симетричну тврдњу. Узмимо скуп свих бројева чија се омега-мапа појављује у нормалној форми инфинетесималног броја x, T. Његови елементи су негативни и обрнуто-добро-уређени[3]. Стога је и S, скуп бројева чије се омега-мапе појављују у нормалној форми било којег степена x, и даље, сваки елемент из S се може представити као коначна сума елемената из T (производ сума) на само коначно много начина. Одавде се лако види да су наша 3 услова конвергенције испуњена. □

Ове бесконачне суме, онда, наслеђују интуитивна алгебарска својства. Можемо да их третирамо и као формалне степене редове, што помаже следећем доказу:

Теорема 24. *Сваки позитиван број* x *има јединствен позитиван n-ти корен.*

Доказ. Увиђај у нормалне форме нам каже да сваки позитиван број можемо записати у облику $\omega^y r(1+d)$, где је r позитиван *реалан, а d инфинетесималан број. Сигурно $\omega^{\frac{y}{n}}$ и $r^{\frac{1}{n}}$ постоје, а сума $\sum_k \frac{(\frac{1}{n})!}{(\frac{1}{n}-k)!k!} d^k$ одговара неком броју чији је n-ти степен $1+d$, наравно позитиван. Јединственост је очигледна. □

[3] уместо да сваки непразни подскуп има минимум, сваки непразни подскуп има максимум

2.3 Реална затвореност и универзално утапање

Сада радимо са полиномима, и помоћи ће нам да дефинишемо формалну суму облика $\sum\limits_{\beta<\alpha} \omega^{y_\beta} p_\beta$, где је p_β полином с *реалним коефицијентима. Због Комбинаторне леме и претходних изведби, ова сума ће се слично понашати. Подсетимо се да постоје три еквивалентне тврдње које дефинишу реално-затворено поље:

- Поље није алгебарски затворено, али њено проширење са $i = \sqrt{-1}$ јесте
- Сагласно са неким линеарним уређењем, сваки полином непарног степена има корен у пољу, и сваки позитиван број има н-ти корен у пољу
- Поље има иста "својства првог реда"[4] као и реални бројеви

Пошто смо већ доказали део с коренима, можемо пробати доказати део с полиномима. Започнимо са следећом лемом:

Лема. *Нека је f моничан полином над надреалним бројевима, такав да сваки коефицијент се може представити као збир *реалног и инфинетесималног броја. Такође, нека се r, полином где су коефицијенти реални делови одговарајућих коефицијената у f, може представити као производ узајамно простих полинома са *реалним коефицијентима P_0 и Q_0. Онда се и f може представити као производ $P \cdot Q$, где се реални делови њихових коефицијената поклапају са коефицијентима P_0 и Q_0.*

Доказ. Доказ постижемо тако што ћемо индуктивно потврдити постојање низа полинома са *реалним коефицијентима. Нека се $(\sum\limits_{\beta<\gamma} \omega^{y_\beta} P_\beta)(\sum\limits_{\beta<\gamma} \omega^{y_\beta} Q_\beta)$ слажу за све ω^y где $y \geq y_\beta$ за $\beta < \gamma$, и за $\beta > 0$ полиноми P_β и Q_β су степена мањих од P_0, Q_0, али производ се не поклапа са f. Следећи члан суме истражујемо овако: y_γ ће бити први "експонент" где се производ разликује. Услов да ћемо наћи такве полиноме јесте облика $P_0 Q_\gamma + P_\gamma Q_0 = S$. Због услова да су P_0 и Q_0 узајамно прости, знамо да то може бити испуњено и то тако да су оба мањег степена. Производ аугментованих сума ће онда бити тачан на више места. Овим процесом (и прикупљањем суме на дужинама нивоа лимит-ординала) налазимо наше P и Q. □

Сада можемо да се посветимо главном делу нашег задатка:

[4] једноставно, то јесу формуле без слободних варијабли

Теорема 25. *Сваки полином непарног степена у Пољу надреалних бројева има корен.*

Доказ. Нека је полином у питању $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_1 x + a_0$. Полином $Q(x) = \frac{1}{a_n}P(x - \frac{a_{n-1}}{na_n})$ има решење акко $P(x)$ има решење. Претпоставимо да није једнак x^n (што наравно има тривијално решење) и нека су бројеви типа c_i такви да је ω^{c_i} сразмерни са одговарајућим коефицијентима у $Q(x)$. Онда одредимо број $c = max\{\frac{c_i}{n-i} | 0 \leq i < n-1\}$ формирамо нови полином $R(x) = \frac{1}{\omega^{nc}}Q(x\omega^c)$, који исто има корен акко $Q(x)$ има. Како важи $c_i + ci \leq cn$, ми имамо моничан полином са коефицијентима који се могу записати као збир *реалног и инфинетесималног броја. Такође, макар један коефицијент који није испред x^n има *реалан део различит од нуле.
Случај 1: Можемо факторисати овај полином на два полинома. Онда је један од њих непарног степена, и по индукцији један од њих има корен и стога читав полином има корен.
Случај 2: Не можемо то урадити. Онда, по контрапозитиви претходне леме, *реални део полинома је или облика $(x-a)^n$ или $(x^2-bx+c)^k$. Како је полином непарног степена, друго не може бити случај. Пошто је коефицијент испред x^{n-1} нула, знамо да $a = 0$, али то је контрадикција јер макар још један коефицијент има *реалан део различит од нуле. □

Сличном процедуром може да се покаже да "експоненти" у нормалној форми корена су рационалне линеарне комбинације "експонената" коефицијената полинома. Но, много битније, сада можемо да тврдимо:

Теорема 26. *No jесте реално-затворено, уређено Поље. Или, $No[i]$ је алгебарски-затворено Поље.*

До сада смо истраживали заиста моћну структуру надреалних бројева, у смислу да можемо проучавати широку анализу и алгебру користећи ово Поље. Но, још једну карактеристику њене структуре је пожељно одгонетнути. У првом поглављу смо увидели да No у себе уграђује реалне и ординалне бројеве (тј. из њих постоји хомоморфизам у No). Испоставља се да је ова способност уграђивања много шира. Ослонимо се на дефиницију:

Дефиниција 19. *Класу F која је такође уређено Поље зовемо универзално утапајућом ако свако уређено поље на нивоу скупа има хомоморфизам у F.*

За следећу врло смелу теорему требаће нам помоћ контроверзне али широко коришћене Аксиоме избора, то јест њој еквивалентне тврдње која гласи "свака класа има добро уређење".

Теорема 27. *No је универзално утапајуће, тотално уређено Поље.*

Доказ. Прво приметимо да, акко неко уређено поље f има хомоморфизам у No, има и његово реално-затворено проширење $R(f)$. Зато ћемо само доказати ову тврдњу за реално-затворена поља r. Нека је $card(r) = \kappa$. Елементе r ћемо уредити тако да су изоморфни са елементима κ, и именоваћемо те елементе a_0, $a_1 \dots$ $a_\beta \dots$ одговарајуће. Нека је F_α најмање реално-затворено уређено поље које садржи елементе до a_α. Радимо индукцију по α да постоји изоморфизам из F_α у No. Уколико је α лимит-ординал, ово је лако видети. Исто ако α има претходника чији је одговарајући елемент алгебарски над претходним пољем. Иначе, дефинишемо x као елемент угњежден између елемената који формирају изоморфизам са $F_{\alpha-1}$, где $a_{\alpha-1}$ одваја леви и десни скуп. Због реалне затворености ова два скупа, хомоморфизам који фиксира елементе $F_{\alpha-1}$ и слика $a_{\alpha-1}$ у x постоји. Евидентно, $F_\kappa = r$, и стога хомоморфизам постоји. □

Теорема 28. *Свако универзално утапајуће уређено Поље је изоморфно са No.*

Доказ. Овде се користимо чињеницом да строге класе имају исту "кардиналност". Добро уредимо обе класе и алтернативно креирамо реално-затворено поље у једној, проширивајући са следујућим елементом, и нађемо слику тог поља у другој. Индуктивно, слично као пре, имаћемо изоморфизам обе класе. □

Закључак: Класа No има улогу апстрактног, универзално утапајућег, реално-затвореног уређеног Поља.

2.4 Степеновање

Мада омега-мапа личи на степеновање, разликује се по томе што нема изоморфизам са позитивним бројевима по дизајну. Тип функције који би задовољавао критеријуме да се зове експоненцијалном би вероватно требало представљати изоморфизам између $(No, >, +)$ и $(No^+, >, \cdot)$. За ограничене бројеве можемо применити одговарајућу бесконачну суму, али за трансфинитне вредности такве суме би биле лоше дефинисане. Гоншорев приступ је довео до дефиниције која у потпуности представља претходни изоморфизам, до чега намеравамо и доћи.
Следећу дефиницију није проблематично разумети унутар теорије, ако се држимо тога да је увек $x^0 = 1$ и разумемо све њене елементе као рекурзивно дефинисане:

Дефиниција 20. *За општи ненегативан цео број* n *важи*

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$
$$e^b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!}$$
$$e = e^1$$

где је b *ограничен број.*

Наше познавање реалне анализе сугерише да овако дефинисано е се подудара са класичним бројем е. Такође познавање бесконачних сума имплицира да се e^x понаша на доста начина као степеновање у реалној анализи, укључујући и $e^a e^b = e^{a+b}$. Једна од ствари коју бисмо хтели да наша општа дефиниција задовољава јесте и да се поклапа са вредностима e^x за ограничено x.

Дефиниција 21. *Леви и десни скуп броја* $exp(x)$*, тј. експонованог* x*, јесу*

$$(exp(x))^L = \{0, exp(x^L)E_n(x - x^L), exp(x^R)E_{2n+1}(x - x^R)\}$$
$$(exp(x))^R = \{\frac{exp(x^R)}{E_n(x^R - x)}, \frac{exp(x^L)}{E_{2n+1}(x^L - x)^+}\}.$$

Да бисмо наставили доказивати теореме, потребно је имати неколико алатки. Прво, наравно, за позитивно x важи да $E_n(x)$ расте како n расте. За негативно инфинетесимално x важи да $E_{2n+1}(x)$ расте како n расте, а $E_{2n}(x)$ опада. Ако је x негативно трансфинитно, $E_{2n+1}(x)$ је сигурно негативно. Даље, за позитивно x, y важи неједнакост $E_{2n}(x+y) \geq E_n(x)E_n(y) \geq E_n(x+y)$. Слично за негативне инфинетесималне, $E_{4n+3}(x + y) \geq E_{2n+1}(x)E_{2n+1}(y) \geq E_{2n+1}(x + y)$. Ово су резултати који се користе биномним развојем.

Теорема 29. $exp(x)$ *је број.* $exp(x) > 0$*. За* $x < y$ *важи* $exp(x)E_n(y - x) < exp(y)$ *и* $exp(y)E_{2n+1}(x - y) < exp(x)$*. За* $x = y$ *важи* $exp(x) = exp(y)$*.*

Доказ. По индукцији, знамо да су опције степена бројеви. Свака десна опција је очито већа од нуле. Имамо неједнакости:

$$exp(x^L)E_n(x - x^L)E_m(x^R - x) \leq exp(x^L)E_p(x^R - x^L) < exp(x^R)$$
$$exp(x^R)E_{2n+1}(x - x^R)E_{2m+1}(x^L - x) \leq exp(x^R)E_{2p+1}(x^L - x^R) < exp(x^L)$$
$$E_m(x - x^L)E_{2n+1}(x^L - x), E_n(x^R - x)E_{2m+1}(x - x^R) < 1$$

$$exp({x_1}^S)E_n(x-{x_1}^S)E_m({x_2}^S-x) < exp({x_1}^S)E_p({x_2}^S-{x_1}^S) < exp({x_2}^S)$$

За довољно високо p, где у последњој неједнакости m или n је искључиво непарно и одабране опције нису једнаке. Испуњен је услов да покажемо да је $exp(x)$ број.
Очито је да $exp(x) > 0$. Нека је $x < y$. Ако има макар једно y^L или x^R да важи $x < y^L \vee x^R < y$, назовимо ту опцију z и утврдимо: $exp(x)E_n(y-x) < exp(x)E_n(z-x)E_n(y-z) < exp(y)$. Слично друга неједнакост. Иначе, један елемент једнак је некој опцији другог елемента. По индукцији неједнакости тривијално следе.
Нека $x = y$ сада. Онда је x угњеждено између опција y и по индукцији $exp(x)$ је угњеждено између опција $exp(y)$. Аналогно обрнуто, дакле $exp(x) = exp(y)$. □

Већ смо показали не само легитимност него и чување поретка у овој функцији. Следећи знатно већи корак јесте да покажемо хомоморфизам из $(No, +)$ у $(No^+, \cdot)$, за шта ћемо морати делити на случајеве у зависности бројева с којим радимо.

Дефиниција 22. *Број представљен нормалном формом као* $\sum\limits_{\beta<\alpha} \omega^{y_\beta} r_\beta$ *зовемо чисто бесконачним ако важи* $y_\beta > 0$.[5]

Категорије ограниченог и чисто бесконачног броја су те које ће нам природно делити случајеве, јер сваки број се може записати као збир ограниченог и чисто бесконачног броја.

Теорема 30. *За ограничене бројеве* $exp(x) = e^x$ *(и ограничени бројеви наслеђују својство* $exp(x)exp(y) = exp(x+y)$*).*

Доказ. Ако је број *реалан, можемо да се ослонимо на знање реалне анализе. Иначе, ослонићемо се на индукцију (све опције ограничених бројева се своде на друге ограничене бројеве, тако да је то оправдано). Запишимо x као $r + \iota$. Ако му је лева опција облика $s + \iota'$ где $s < r$, *реални део леве опције степена је $e^x E_n(r-s)$, што је мање од e^r. Ако је облика $r + \iota'$ где $\iota' < \iota$, имамо $exp(r+\iota')E_n(\iota-\iota') < e^{r+\iota}$. Слично за десну страну. Тако је e^x угњеждено између опција $exp(x)$.
Тежи део доказа јесте да његове опције нису исто тако угњеждене. У том случају тврдимо да $e^x = (\{e^x - \omega^{y_\beta}\epsilon\}, \{e^x + \omega^{y_\beta}\epsilon\})$, где ω^{y_β} стоји за општи "експонент" у нормалној форми e^x. Желимо да за насумично одабрано

[5] И нула спада у ову дефиницију. Не звучи нарочито прихватљиво, али ради када су у питању даље изведбе

y_β можемо одабрати довољно велико n да $e^{x^L} E_n(x - x^L)$ престигне одговарајућу опцију, а то радимо тако што се побринемо да $E_n(x - x^L)$ буде што "тачнија" апроксимација e^{x-x^L} (мора бити тачна до ω^{y_β}). Толико јесте осигурано (због Комбинаторне леме), а онда је у производу са e^{x^L} осигурано да смо престигли дату опцију. Идентичан аргумент ради за остала потребна поређења, где на неким местима уместо n морамо да се ограничимо на $2n + 1$. □

Теорема 31. *За u чисто бесконачно и b ограничено важи* $exp(u + b) = exp(u) + exp(b)$.

Доказ. Индукција. Нека $x = u + b$, и нека ниједно није нула, јер иначе је тривијално. Ако је $x^L = v + s$ где $v < u$ онда $exp(v+s)E_n(x-x^L) << exp(v)exp(s)E_{n+1}(u-v) < exp(s)exp(u)$. Наравно онда је и мање од $exp(u)exp(b)$. На десној страни одговарајући термини нестају јер су увек негатвни. Ако $x^L = u+s$ где $s < b$, онда $exp(u)exp(s)E_n(b-s) < exp(u)exp(b)$. Сличнан аргумент важи за x^R. Доказали смо да је производ угњежден између опција $exp(u + b)$.
Сада посматрамо опције производа. Проверимо да $r(exp(x))^L < exp(x)kada < r(exp(x))^R$ за чисто бесконачно x. То одмах показује да опције $(exp(x))^R(exp(y)-(exp(y))^S)+exp(x)(exp(y))^S$ нису угњеждене између опција $exp(x + y)$ Затим, нека L_n представља $exp(b^L)E_n(b - b^L)$ Желимо показати да $\frac{L_{n+1}-L_n}{e^b-L_n}$ није инфинетесимално. Ако $b - b^L$ није инфинетесимално, то је очито. Иначе, проверити да је вредност мања од 1. Скратити бројилац и именилац са e^{b^L}. Након што средимо, остаће нам $\frac{(b-b^L)^{n+1}}{(n+1)!(e^{b-b^L}-E_n(b-b^L)}$. Именилац можемо да средимо да има почетни термин (једнак бројиоцу) и суму чији је сваки члан облика $r(b - b^L)^k$, за $k > n + 1$. На крају добијамо $\frac{1}{1+\Sigma}$ где је Σ инфинетесимално. Овај број је већи од сваког *реалног броја мањег од 1- сразмеран је *реалним бројевима. Онда:

$$\begin{aligned}&exp(u)(exp(b))^L + (exp(u))^L(exp(b) - L_n) < exp(u)L_n + exp(u)(L_{n+1} - L_n)\\ &< exp(u + b)E_{n+1}(b - b^L)\end{aligned}$$

Слично за преостали скуп опција. По Теореми једноставности, доказано. □

Да бисмо наставили, приметимо да из чисто бесконачних бројева можемо да избацимо све коначно удаљене опције. Потом, "пола" опција у степену броја нестане, а остале опције граде број који је због једноставности једнак $(\{0, x^L(x - x^L)^n\}, \{\frac{x^R}{(x^R-x)^n}\})$. Корак даље, нека $x^L = u + b$ где је u чисто бесконачно (наравно веће од 0) а b ограничено. Ако је b позитивно, онда је $exp(u)exp(b)(x - u - b)^n$ очигледно много мање од

$exp(u)(x-u)^{n+1}$. Иначе $exp(u)exp(b)(x-u-b)^n \leq exp(u)(x-u)^n(1-b)^n << exp(u)(x-u)^{n+1}$. Слично важи и за десну страну. Нека $\infty(x)$ представља чисто бесконачни део x у следећој леми:

Лема. *За чисто бесконачно x имамо*

$$exp(x) = (\{0, exp(\infty(x^L))(x-\infty(x^L))^n\}, \{\frac{exp(\infty(x^R))}{(\infty(x^R)-x)^n}\}).$$

Теорема 32. *За чисто бесконачне бројеве важи $exp(x)exp(y) = exp(x+y)$.*

Доказ. Ради прегледности нећемо увек записивати ознаку за бесконачни део, подразумеваће се. Приметити како је $\infty(x+y) = \infty(x)+y$ и $x \succ \infty(x)$. Ово је довољно да оправда, користећи индукцију, да

$$(exp(x+y))^L = \{0, exp(y)exp(x^L)(x-x^L)^n, exp(x)exp(y^L)(y-y^L)^n\}$$
$$(exp(x+y))^R = \{exp(y)exp(x^R)(x^R-x)^{-n}, exp(x)exp(y^R)(y^R-y)^{-n}\}$$

Пошто имамо нулу, знамо да је производ угњежден у ове опције. Остаје само показати да су преостале опције сувишне. За десну страну имамо следеће неједнакости:

$$\begin{aligned} & exp(y)exp(x^L)(x-x^L)^n + \frac{exp(x)exp(y^R)}{(y^R-y)^m} - \frac{exp(x^L)exp(y^R)(x-x^L)^n}{(y^R-y)^m} \\ & \geq \frac{exp(x)exp(y^R)}{(y^R-y)^m} - \frac{exp(x^L)exp(y^R)(x-x^L)^n}{(y^R-y)^m} \\ & > 0.5\frac{exp(x)exp(y^R)}{(y^R-y)^m} > \frac{exp(x)exp(y^R)}{(y^R-y)^{m+1}} \end{aligned}$$

где је претпоследња неједнакост по несразмерности. Слично ако обрнемо места x и y.
За леву страну, видимо да $\frac{exp(x^R)}{(x^R-x)^n}$ је несразмерно веће од $\frac{exp(x^R)}{(x^R-x)^{n+1}} > exp(x)$. Онда је умањилац несразмерно већи од оба сабирка, и овај скуп опција је негативан. Такође, ако је $exp(y)exp(x^L)(x-x^L)^n$
$\leq exp(x)exp(y^L)(y-y^L)^n$, онда је преостала класа сабирка мања од
$2 \cdot exp(x)exp(y^L)(y-y^L)^n < exp(x)exp(y^L)(y-y^L)^{n+1}$. Слично ако важи супротна неједнакост. □

Из ове три теореме наравно следи:

Последица 6. *За било која два x, y важи $exp(x+y) = exp(x)exp(y)$. Такође $exp(x)exp(-x) = 1$.*

2.4.1 Природни логаритам

За налажење логаритма, имамо оруђе да се снађемо са ограниченим бројевима. Ускоро ћемо то знатно проширити.
Приметимо да је $exp(x)$ несразмеран са својим опцијама. То значи да је у сопственој класи еквиваленције најједноставнији елемент. Онда ω^b које је с њим у класи, по дефиницији једнакости, је једнако с њим. То доказује:

Теорема 33. *Степени чисто бесконачних бројева производе омега-мапе.*

Следећу дефиницију правимо искључиво за такве бројеве:

Дефиниција 23. *Природни логаритам омега-мапе неког броја је дефинисан*

$$(ln(\omega^b))^L = \{ln(\omega^{b^L}) + n, ln(\omega^{b^R}) - \omega^{\frac{b^R-b}{n}}\}$$
$$(ln(\omega^b))^R = \{ln(\omega^{b^R}) - n, ln(\omega^{b^L}) - \omega^{\frac{b-b^L}{n}}\}.$$

Теорема 34. *ln је добро дефинисан и једнак за једнаке вредности. За $a > b$ важи $n < ln(\omega^a) - ln(\omega^b) < \omega^{\frac{a-b}{n}}$ за природно n.*

Доказ. Све опције су по индукцији добро дефинисане. Очито $ln(\omega^{b^L})+n < ln(\omega^{b^R}) - m$. Ако ${b_1}^L \leq {b_2}^L$, неједнакост $ln(\omega^{{b_1}^L}) + n < ln(\omega^{{b_2}^L}) + \omega^{\frac{b-{b_2}^L}{m}}$ је тривијална. Иначе $ln(\omega^{{b_1}^L}) - ln(\omega^{{b_2}^L}) < \omega^{\frac{{b_1}^L-{b_2}^L}{m}} < \omega^{\frac{b-{b_2}^L}{m}} - n$. Сличан доказ за опције које укључују десне чланове b. Последња неједнакост која нам треба укључује АГ-неједнакост:

$$ln(\omega^{b^R}) - ln(\omega^{b^L}) < \omega^{\frac{b^R-b^L}{2p}} < \frac{1}{2}(\omega^{\frac{b-b^L}{p}} + \omega^{\frac{b^R-b}{p}})$$

За довољно велико p (штавише, максимум од m, n) прати да
$ln(\omega^{b^R}) - ln(\omega^{b^L}) < \omega^{\frac{b-b^L}{m}} + \omega^{\frac{b^R-b}{n}}$
За $a = b$ једнакост логаритама ће да прати по дефиницији једнакости када индуктивно применимо неједнакости тврдње. За $a > b$ налазимо њихове знаковне развоје. Ако је један иницијални сегмент другог, неједнакости су тривијалне. Иначе налазимо број дефинисан њиховим заједничким иницијалним сегментом, $a > c > b$. Додавањем одговарајућих једначина добијамо да $n \leq 2n < ln(\omega^a) - ln(\omega^b) < \omega^{\frac{a-c}{n}} + \omega^{\frac{c-b}{n}} < \omega^{\frac{a-b}{n}}$. Доказ је тиме завршен. □

Када је ово показано, приметимо да за било који ограничен број b и чисто бесконачан број u важи:

- $u + b$ је сложеније од u
- Ако је неки број између опција $ln(\omega^y)$, он $+b$ је исто између тих опција.

Из овога логички следи да

Лема. *$ln(\omega^y)$ је чисто бесконачни број.*

Сада нам остаје још једна теорема да заправо демонстрирамо изоморфизам:

Теорема 35. *$exp(ln(\omega^b)) = \omega^b$.*

Доказ. Применом Теореме 31, Теореме једноставности и дефиниције логаритма добијамо:

$$(\{0, r\omega^{b^L}(ln(\omega^b) - ln(\omega^{b^L}) - n))^m\}, \{s\omega^{b^R}(ln(\omega^{b^R}) - ln(\omega^b) + n))^{-m}\}$$

Применом Теореме 32, брзо видимо да је ω^b угњеждено између ових опција. Такође, бирањем опција где се b^U и r тј s поклапају, по Теореми Једноставности ово је задовољено. □

Овиме можемо привести крају: нека је $x = \omega^y r(1 + d)$ позитиван број. Тада је $ln(\omega^y) + ln(r) + \sum_k -\frac{(-d)^k}{k}$ број такав да је његов степен управо x. Нека функција која производи овакав резултат за x буде звана само $ln(x)$. Онда:

Дефиниција 24. *За $a > 0$, a^x дефинишемо као $exp(xln(a))$.*

И одељак приводимо крају Теоремом која лако прати из свега што смо рекли:

Теорема 36. *За $a > 1$, функција a^x представља изоморфизам између $(No, >, +)$ и $(No, >, \cdot)$, а за $a < 1$ између $(No, >, +)$ и $(No, <, \cdot)$.*

Закључујемо да је експоненцијална функција једна од класичних функција која се може проширити на надреалне бројеве.

3 Алтернативна концепција надреалних бројева

У овом поглављу посветићемо се концепцији надреалних бројева као знаковних редова (која се пре свега приписује Гоншору), видећемо како се надовезује на сву претходну теорију и погледати неке од њених предности и мана.

Дефиниције позајмљујемо из поглавља 2.1 и кажемо да су надреални бројеви функције из неког ординала у бинарни скуп $\Omega = \{+, -\}$, њихову класу ћемо звати No_G, еквиваленција јесте идентичност а њихов строги поредак је лексикографски. Такође се подсећамо дефиниције за дужину знаковног реда, и овде она ће представљати дужину/једноставност надреалног броја. Лако се може показати и без увида у претходну теорију да је $\geq$ и овде тотални поредак. Да би смо дефинисали операције, међутим, ослонац на претходну теорију је потребан. Можемо да заобиђемо помен класе No ако докажемо такозвану Фундаменталну теорему постојања, што ћемо учинити чисто да елиминишемо сувишну зависност. Почнимо од дефиниција:

Дефиниција 25. **Супремум скупа надреалних бројева F итерираног до α јесте*

$$sup(F)_\alpha = \{(\beta, sup(F)(\beta)) \in On \times \Omega | \beta \in \alpha\}$$

Где $sup(F)(\beta) = -$ ако $(\forall f \in F)(f_\beta = sup(F)_\beta \implies f(\alpha) = -)$, а иначе $sup(F)(\beta) = +$.
**Инфимум дефинишемо аналогно (заменити места плусевима и минусевима).*

Овај супремум/инфимум се битно разликују од оних које срећемо у реалној анализи, јер се дефинишу по дужини. Али имају довољно слична својства, која ћемо увидети у следећој леми:

Лема. *За било које $f \in F$ важи да $f_\alpha \leq sup(F)_\alpha$, постоји неко α где за свако $\beta > \alpha$ важи $f_\beta < sup(F)_\beta$ и $sup(F)(\beta) = -$. Такође, за било које $h < sup(F)_\alpha$ дужине највише α постоји $f \in F$ да $f \geq h$. Симетрична теорема важи за *инфимум.*

Доказ. Следећи доказ има парњака који важи за *инфимум. Прву тезу показујемо индуктивно. Претпоставимо да важи за свако $\beta < \alpha$. Ако за макар једно β важи строга неједнакост, због лексикографског поретка важи и за α. Иначе, делимо на 2 случаја:
Случај 1: α је лимит-ординал, тј. нема претходника. Онда можемо рећи да за свако $\beta < \alpha$ важи $sup(F)(\beta) = f(\beta)$, из чега прати $f_\alpha = sup(F)_\alpha$
Случај 2: α има претходника, и важи $f_{\alpha-1} = sup(F)_{\alpha-1}$. По дефиницији $sup(F)(\alpha) \geq f(\alpha)$ и тиме прати $f_\alpha \leq sup(F)_\alpha$.
Да је случај да је свака апроксимација једнака, то би значило да је дужина f већа од било којег ординала, што није случај. Због лексикографског поретка, на месту где неједнакост прва постане строга, надаље ће увек бити строга и по дефиницији сваки следећи знак ће бити минус.

Последња теза се исто доказује индуктивно. Одвојићемо мање и веће праве иницијалне сегменте супремума.
Случај 1: Већи иницијални сегменти су сви мањи од супремума, или другим речима, супремум се завршава искључиво плусевима. Ако је h мањи од неког од њих (што јесу ранији супремуми), онда смо готови. Иначе, може једино бити сегмент који претходи првобитном. По дефиницији, постоји $f \in F$ где $f_{\alpha-1} = h$ и $f(\alpha - 1)$ је или недефинисано или $+$, свакако $f \geq h$.
Случај 2: Не завршава се искључиво плусевима. Претпоставимо да је $h < sup(F)_\alpha$. Ако је његова дужина мања, знамо да је неки прави иницијални сегмент веће или једнаке дужине већи од њега. Ако је његова дужина тачно α, нађемо први ординал где се h и $sup(F)_\alpha$ разликују, назовимо је ψ. Очито $h < h_\psi < sup(F)_\alpha$ а $\psi < \alpha$, стога под истим принципом можемо да нађемо прави иницијални сегмент већи од h_ψ, па и од h. $\square$

Надаље, ради концизности, када кажемо $F < G$, мислимо да је сваки елемент из F мањи од сваког елемента из G.

Лема. *За скупове надреалних бројева важи $F < G$ важи $sup(F)_\alpha \leq inf(G)_\alpha$ и након неког α важи строга неједнакост.*

Доказ. Поново користимо индукцију, претпостављамо да важи за $\beta < \alpha$. Ако важи строга неједнакост макар негде, готови смо. Ако не, опет делимо на случајеве лимит-ординала (лако) и ординала са претходником (што сад гледамо). Да је случај да $sup(F)_\alpha > inf(G)_\alpha$, онда би важило $sup(F)(\alpha-1) = +$, тј да постоји $f \in F$ да $f_{\alpha-1} = sup(F)_{\alpha-1} \wedge f(\alpha-1) \neq -$ и слично да постоји $g \in G$ да $g_{\alpha-1} = inf(G)_{\alpha-1} \wedge g(\alpha-1) \neq +$. То би значило да

$$g \leq g_{\alpha-1} = inf(G)_{\alpha-1} = sup(F)_{\alpha-1} = f_{\alpha-1} \leq f$$

Што је контрадикција.
Да су стално једнаки, значило би да им је сваки знак једнаки. Међутим по претходној леми можемо одабрати ординал након које је сваки знак у инфимуму плус, а сваки знак у супремуму минус. Онда је инфимум већи од супремума. □

Са овом лемом на уму, и због доброг поретка ординала, за два скупа $F < G$ можемо одабрати најмање α где $sup(F)(\alpha) = -$, $inf(G)(\alpha) = +$. По претходној леми $sup(F)_\alpha = inf(G)_\alpha$, и ту вредност ћемо (не случајно) назвати (F, G). Евидентно, важи $F \leq sup(F)_{\alpha+1} < (F, G) < inf(G)_{\alpha+1} \leq G$. Доказали смо да бројеви који нису веће дужине не могу исто задовољавати. Ово доказује:

Теорема 37. *(Фундаментална теорема постојања) за свака два скупа надреалних бројева F, G, где $F < G$ постоји јединствен најједноставнији број између њихових елемената.*

Ради комплетности, потребно је увидети и да за сваки број h постоје неки F и G са чланивима строго мање дужине од х где $(F, G) = h$. Није тешко приметити да су иницијални сегменти h довољни да чине елементе та два скупа. Поред тога, требали бисмо доказати да је
еквивалентно изјавити $(F, G) \geq (F', G')$ и изјавити $(F, G) > F' \wedge G > (F', G')$. Један смер је тривијалан. Претпоставимо да $(F, G) > F' \wedge G > (F', G')$ али да $(F, G) < (F', G')$. Онда можемо извести да $F < (F', G') < G$ и да $F' < (F, G) < G'$. По дефиницији, (F, G) може да задовољава дате неједнакости једино ако му је (F', G') иницијални сегмент, и обрнуто, што би значило да $(F, G) = (F', G')$, што је контрадикција.

У овом тренутку, дефиниције за разне функције и операције можемо позајмити без да се ослонимо на класу No и доказати теореме идентичне онима у Конвејевој теорији. Остаје нам само да размотримо по чему се разликује до сада.
Прва од предности овог приступа јесте да сваки број има јединствену репрезентацију, што осим што је естетски лепо, јесте олакшање када дође до смисленог изражавања битних тврдњи у теорији (нпр. места где је

претходно написано да узимамо јединствене представнике неких класа бројева, у практичном смислу можемо да игноришемо ту спецификацију али у теоријском може да прави проблем). Затим, правилима на почетку даје утемељење које се не ослања на двоструку рекурзију, на коју смо се од почетка ослањали.
Неки ентитети имају и елегантније дефиниције, на пример нове *ординале можемо дефинисати као мапу из ординала у знак +, а *реалне бројеве као бројеве или коначне дужине или ω дужине да не завршава само са плусевима или само са минусевима (мана ове дефиниције јесте да се овако губи интуиција иза реалних бројева, предност јесте да је директнија дефиниција). Такође, узмимо појам раскорака, који иначе припада претходној глави. Навикли смо да бројеви стоје између два скупа других бројева, међутим ако исто покушамо са две праве класе, може бити да ниједан број буде између њих. Најпростији случај овога јесте кад No поделимо на два дисјунктна скупа. Раскораци би требало да представљају парове таквих класа где ниједан број не одговара. У контексту овог приступа, раскораке једноставно можемо дефинисати као функцију која пресликава све ординале у бинарни скуп Ω. Та функција јесте на нивоу класе, али не садржи класе, што их чини легитимним математичким појмом (главна брига код конструкције раскорака јесте њихова легитимност). Неки од примера раскорака јесу: On (сваки ординал се пресликава у плус), $-On$ (сваки ординал се пресликава у минус), $\frac{1}{On}$ (0 се пресликава у плус, остале ординале у минус), ∞ (првих ω се пресликава у плус, остале у минус), било које бесконачне итерације *супремума или *инфимума.

Једна од мана овог приступа јесте чињеница да користимо пре-дефинисане ординале да дођемо до задовољавајућег разумевања ове врсте надреалних бројева, док у претходној теорији то није случај. На практичном нивоу то није нарочита брига, али они којима је стало до естетике могу пробати наћи сличне концепције које директније дефинишу надреалне бројеве, избегавају ентитете амбигуалног поретка као + и −, а опет очувавају дух Гоншоровог приступа. Осим тога, ова теорија иако поткрепљује претходну, сувише зависи од појма "најједноставнијег броја између два скупа" који је само у претходној теорији примаран. У најмању руку, то јесте напомена да је битно разумети Конвеја макар колико и Гоншора да бисмо се озбиљно бавили надреалним бројевима.

Литература

[1] Donald E. Knuth. *Surreal Numbers*. 1974.

[2] John H. Conway. *On Numbers and Games*. 1976.

[3] Harry Gonshor. *An Introduction to the Theory of Surreal Numbers*. 1986.