Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из физике -

Калуца-Клајн теорија

Ученик:
Никола Лакић IVa

Ментор:
др Драгољуб Гочанин

Београд, јун 2023.

Садржај

Увод

Крајем треће године средње школе сам одабрао поље из ког желим да научим више. Као дете ме фасцинирала општа релативности и њене pop-science демонстрације. С тим у вези било је неупитно коју тему ћу да обрадим.

Тек касније сам се уско определио за Калуца-Клајн теорију. Изгледала ми је довољно модерно да би се главе за њом окретала, а ипак довољно архаично да могу да је савладам на неком базичном нивоу.

Овај матурски рад сам писао тако да буде приступачан било коме са основним познавањем математике и физике. При учењу за овај подвиг сам користио доста ресурса унакрсно. Неки су објашњавали одређене ствари боље од других. Покушао сам да напишем след мисли који је мени био потребан да ми теорија ”кликне”.

Прва два поглавља представљају преглед физике до тачке у времену где се налази тема овог рада. Такође, написао сам и 3 апендикса која би иначе гушила рад да нису на крају. Ако неко жели да научи општу релативност предлажем му руту: прво поглавље → апендикси → друго поглавље. Ако неко већ зна општу релативност, не би било лоше да опет прочита прва два поглавља јер у њима усвајам неке конвенције о нотацији.

Желим да се захвалим пре свега свом ментору др Драгољубу Гочанину, на његовим примедбама, сугестијама и непроцењивим дискусијама. Такође бих желио да се захвалим Ивану Станићу, др Дејану Ђокићу и др Игору Салому, који су на један или други начин имали утицај на моје разумевање физике.

1 Физика у равном простор-времену

1.1 Шта покушавамо да научимо

Општа теорија релативности је најлепша теорија коју је људски ум смислио. У суштини идеја која покреће читаву теорију је веома проста: гравитација је манифестација закривљеног простор-времена. Али, (и ово је једно гломазно али) да бисмо разумели геомтрију простора који надилази наш тродимензионални потребна нам је напредна математичка машинерија.

У овом првом поглављлу ћемо да се осврнемо на главне појаве у равном простор-времену и начин на који их описујемо.

Општа релативност (у даљем тексту понекад је називам скраћеницом ОТР) је различита од осталих теорија поља (нуклеарне силе, електромагнетизам...) које су дефинисане на самом простор-времену због тога што она јесте баш манифестација динамичности саме сцене на којој се остатак физике одвија.

Почнимо прво са освртом на Њутнову теорију гравитације која је врло прецизна у описивању великог броја појава у универзуму. Сила која се јавља између два тела масе m_1 и m_2 која се налазе на удаљености $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e_r}$ једнака је[1]:

$$\boldsymbol{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \boldsymbol{e_r}$$

Заједно са другим Њутновим законом $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ добијамо диференцијалну једначину након чијег решавања имамо једначину кретања материјалне тачке. Ову једначину еквивалентно можемо да представимо и преко **Поасонове једначине**:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

где је ρ густина масе. Заједно са релацијом $\nabla\Phi = \boldsymbol{a}$ добијамо једначине кретања као и раније.

---

[1] У овој једначини сам сентименталности ради оставио традиционално γ као гравитациону константу, у даљем тексту преузимам стандардну нотацију G.

Ове једначине ћемо заменити једном једначином[2] коју колоквијално зовемо **Ајнштајнове једначине поља**:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Али о том потом. Ова једначина изгледа доста намућено али само због грчких слова која се у њој појављују, сам садржај једначине и није нарочито љут.

Лева страна једначине је мера закривљености док је десна страна мера импулса и енергије који се крију у тензору енергије-импулса $T_{\mu\nu}$.

Одговор честица на појаву закривљености је нешто лакши да се свари. Наиме, честице желе да се крећу путем најмањег отпора (аналогија са струјом). Такве путеве називамо геодезијским путањама, или једноставно **геодезицима**. У равном простор-времену то су наравно праволинијски путеви, али како такви путеви генерално не постоје у закривљеним просторима честица се определи за следећу најбољу ствар. Параметризована путања честице $x^\mu(\lambda)$ прати такозвану *геодезијску једначину*:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

Наравно да није очекивано да ове једначине имају икаквог смисла поштовани читаоче али још мало, па ће све да кликне. Кренимо са правим стварима!

1.2 Принцип стационарног дејства

Начин на којиописујемо физику је преко нечега што се зове Лагранжијан. Лагранжијан је објекат који се у класичној механици дефинише као $L = K - V$ где су K и V кинетичка и потенцијална енергија респективно. Принцип који овакав лагранжијан треба да испуњава потиче дубоко из квантне теорије поља и зове се *принцип стационарног дејства* или *Хамилтонов принцип.*

Конструишимо функционал (функцију чији је аргумент још једна функција, а резултат реалан број) који ћемо да обележимо са S:

$$S[x^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x^i(t), \dot{x}^i(t))$$

---

[2] технички то је више једначина када се она распакује у све компоненте.

У једначини $x^i(t)$ су само просторне координате са конвенцијом $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, дакле нису степени од x.

Хамилтонов принцип каже да од свих путева $x^i(t)$ које честица може да узме, онај по којем се она креће је такав да је дејство S стационарно, тј. $\delta S = 0$. Често аутори кажу принцип минималног дејства, али ово генерално није тачно за целокупну путању честице.

Да бисмо добили нешто корисно погледајмо уопштену варијацију путање $x^i(t) \to x^i(t) + \delta x^i(t)$. Такође, да би честица бирала пут између два фиксна места потребно је да нам варијација путање нестане у почетном и крајњем тренутку $\delta x^i(t_1) = \delta x^i(t_2) = 0$. Тада варијацију дејства δS представљамо као:

$$\begin{aligned}\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta L &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\delta \dot{x}^i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\right)\delta x^i - \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\delta x^i\right]_{t_1}^{t_2}\end{aligned} \tag{1.1}$$

Где смо до друге линије дошли парцијалном интеграцијом. Члан ван интеграла умире, па уз услов $\delta S = 0$ добијамо:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0$$

Ово су тзв. **Ојлер - Лагранжове једначине** (множина јер за сваку независну координату $x^i(t)$ добијамо једну). Бацимо око на један тривијалан пример чисто комплетности ради.

Пример 1

Посматрајмо класичну честицу масе m која слободно лебди ван било каквог потенцијала. Тада наш лагранжијан има само кинетички члан, па имамо $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^i)^2$. Користећи (1.2) добијамо:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}^i \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = m\ddot{x}^i$$

На крају здруживањем видимо:

$$m\ddot{x}^i = 0$$

Што је управо први Њутнов закон, тело на које не делује сила неће убрзавати.

На прву лопту овај приступ изгледа беспотребно набацан и комплексан, али помоћу њега можемо с релативном лакоћом да изведемо диференцијалну једначину (додуше нерешиву) која, на пример, описује кретање двоструког клатна. О тежини решавања тог проблема само Њутновим законима сведочи чињеница да га ни сам Њутн није решио...

1.3 Геодезијска јендачина

Сада желимо да уопштимо нашу причу на просторе који су закривљени. Напомињем да још радимо са нерелативистичким честицама, и овде је већи фокус стављен на саму физику. Математику релевантну за описивање ових појмова разрађујемо у апендиксу А и Б.
Закривљен простор описујемо тако што говоримо о *инфинитезималним* растојањима међу две тачке x^i и $x^i + dx^i$. Ово растојање можемо да опишемо као:

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j \tag{1.2}$$

♣ Напомена

Ствар коју смо имплицитно дефинисали у једначини (1.2) јесте тзв. **Ајнштајнова конвенција о сумацији.** Наиме, ништа специјано, Ајнштајн је приметио да кад год имамо појављивање индекса у паровима 'један горе један доле' (као i и j изнад) увек вршимо сумацију. Да бисмо сачували папир не пиишемо $ds^2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} g_{ij}(x)dx^i dx^j$ него просто $ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$. У примеру испод се осврћемо на ово.

Члан $g_{ij}(x)$ називамо **метрика**. Метрика је матрица која је симетрична и недегенерисана (има ненулту детерминанту, што је довољан услов за постојање инверзне метрике $g^{ij}(x)$). Такође вреди напоменути да она зависи од локације, па зато обележавамо као функцију од x. У примеру испод ћемо видети како се ово испољава.

Пример 2

1. Прва метрика коју ћемо погледати јесте она која описује $\boldsymbol{R}^3$ - **Кронекер делта** δ^i_j. Кронекер делта симбол је дефинисан као:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

У свој својој ’елегантности’ онда добијамо:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \delta^1_1 dx^1 dx^1 + \delta^2_2 dx^2 dx^2 + \delta^3_3 dx^3 dx^3 \\ &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \end{aligned}$$

2. Лако је показати (Питагорином теоремом и уредном скицом) да је делић пута у *сферним координатама* дат као:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Одатле видимо да је мтерика управо дијагонална матрица са елементима који стоје уз $(dx^i)^2$ (немамо мешовите чланове типа $d\theta d\varphi$):

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Дакле, видимо да метрика изнад узима различите вредности за разне r и θ, па има смисла причати о вредности метрике само у околини неке тачке.

Брзину материјалне тачке у овој мало апстрактнијој нотацији записујемо као:

$$v = \frac{ds}{dt} \implies v^2 = g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j$$

Није за неповеровати да ће и наш Лагранжијан изгледати слично:

$$L = \frac{m}{2} g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j$$

Сада, једино што остаје јесте да нађемо релевантне изводе по координатама и по изводима координата. Уз то треба обратити пажњу да исти индекс не користимо два пута.

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{m}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^j \dot{x}^k$$

Вреди застати и обратити пажњу како је промењен индекс на метрици $i \to k$. Такође обратите пажњу како индекс i имамо на обе стране једначине, а по њему не вршимо сумацију на десној страни (немамо индекс i ’на

спрату’). Ово важи генерално. Индекси по којима не вршимо сумацију морају бити изједначени на обе стране. Ако неки индекс ’виси’ знамо да смо погрешили.
Надаље, добијамо:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m g_{ik}\dot{x}^k \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = m\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial t}\dot{x}^k + m g_{ik}\ddot{x}^k$$

Коначно, убацивањем ова два израза у Ојлер-Лагранжову једначину добијамо:

$$g_{ik}\ddot{x}^k + \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0$$

Како вршимо контракцију по индексима j и k (сабирамо по њима), та два индекса су нам еквивалентна, па су једнаки изрази $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ и $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$, самим тим можемо да одрадимо следећу акробацију:

$$g_{ik}\ddot{x}^k + \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\right)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \tag{1.3}$$

$$g_{ik}\ddot{x}^k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \tag{1.4}$$

Мало ћемо да средимо последњу релацију тако што ћемо да помножимо обе стране инверзном метриком, коју у пракси лако налазимо преко релације $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$. Множењем једначине (1.4) са g^{-1} добијамо:

$$\boxed{\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0} \tag{1.5}$$

Где смо успут увели *Кристофелове симболе* (множина јер као и раније за различите вредности ijk добијамо разне компоненте), дефинисане као:

$$\Gamma^i_{jk}(x) = \frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right)$$

Једначина (1.5) је **геодезијска једначина**, а путање x^i које добијемо су **геодезици**.

Пример 3

Присетимо се метрике у сферним координатама:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \text{ и инверзне } g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (r^2 \sin^2\theta)^{-1} \end{pmatrix}$$

Лако је проверити да је дурга метрика заиста инверз прве. Индекси варирају као $i, j = \{r, \theta, \varphi\}$. Ако се осећате ентузијастично можете користећи једначину за Кристофелове симболе потврдити следеће:

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r \ , \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r \sin^2\theta \ , \Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \tag{1.6}$$

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta \ , \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r} \ , \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{1.7}$$

Као што можете видети, рачунање ових симбола је права патња...

1.4 Специјална релативност

1.4.1 Честице у простору Минковског

Почнимо прво разматрањем честице која се креће у простору Минковског, који обележавамо као $\boldsymbol{R}^{3,1}$. Радимо у правоуглим координатама у којима је $x^\mu = (ct, x, y, z) \ , \mu = \{0, 1, 2, 3\}$ где смо прешли на Грчке симболе јер су кул и боље плаш не-физичаре (шалу на страну конвенција је да се слова алфабета користе за еуклидске просторе, а Грчка слова за не-еуклидске просторе). Метрика је дата као:

$$\eta_{\mu\nu} = diag(-1, \ 1, \ 1, \ 1)$$

Самим тим је растојање између две суседне тачке x^μ и $x^\mu + dx^\mu$ дата као:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Тачке за које је $ds^2 < 0$ су *временски раздвојене*, $ds^2 = 0$ су *светлосно раздвојене* и $ds^2 > 0$ су *просторно раздвојене.*

Из пређашње дефиниције примамљиво изгледа да узмемо корен и интегралимо ds како бисмо добили само Δs између два догађаја која нису нужно блиска. Међутим, ова процедура није баш оптимална јер изрази попут $\int \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ немају баш неки смисао... На добром смо путу, једино што нам фали је опет један математички маневар који се зове *параметризација*.

Наиме, ако сте већ радили аналитичку геометрију знате за ово али ако нисте, параметризација значи да узмемо неку криву у простору и опишемо је неким функцијама које се лепо понашају и које за аргумент узимају исту променљиву. Математички записано криву γ представљамо као $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^n$ где је $I \subset \boldsymbol{R}$ интервал.

Пример 4

Канонски пример параметризације криве је кружница. У равни, кружницу центрирану око координатног почетка записујемо у облику:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Посматрајмо смену $x \to r\cos t$ и $y \to r\sin t$ где нам t шета по интервалу $[0, 2\pi]$. Тада претходна једначина постаје:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Такође, овај ефекат смо могли да постигнемо и параметризацијом $x \to r\cos 2\pi v$ и $y \to r\sin 2\pi v$ где нам сада v иде по интервалу $[0, 1]$. Дакле, закључујемо да параметризација није јединствена, постоји брдо (бесконачно) параметризација за једну исту криву у $\boldsymbol{R}^n$.

Шта ћемо да урадимо јесте да параметризујемо криву $x^\mu(\lambda)$ неким параметром ламбда. Сада наши мали елементи путање нису само dx^μ него $(dx^\mu/d\lambda)d\lambda$, па можемо да напишемо наш жељени интеграл као:

$$\Delta s = \int_1^2 \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda$$

где интегралимо од неке прве до друге позиције генерички обележено. За временски раздвојене догађаје испада да узимамо корен из негативне вредности што је велики но-но, па ћемо само да додефинишемо **сопствено време** као:

$$\Delta\tau = \int_1^2 \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda$$

Вреди напоменути да испред интеграла за $\Delta\tau$ треба да стоји члан $1/c$ али у нашем свету проглашавамо да важи $\mathbf{c = 1}$.

Оваквим дефинисањем мало је чудно да поредимо путање које су на неким деловима временског, а на неким просторног карактера, али у пракси ово је редак случај јер све масене честице иду по временским путањама, а безмасене честице иду по светлосним путевима (што је досадно јер им је све нула...).

♣ Сопствено време

Сада ћемо застати и осврнути се на нека од својстава сопственог времена. Ценим да је већина читалаца чула за овај појам у курсу класичне механике или чак у средњој школи. Изнад је дефинисан у неку руку траљаво, али заправо физички смисао сопственог времена је то да је оно мера протицања времена коју показује часовник објекта који се креће. Разрадимио ово мало даље.

Замислимо да посматрамо хрпу часовника која се креће у простору произвољним путањама. У сваком делићу времена ово кретање можемо да сматрамо равномерним, па самим тим можемо да дефинишемо координатни систем везан за часовнике који заједно са њима чини инерцијални референтни систем.

Када протекне инфинитесимални интервал dt (мерено у нашем систему), сатови пређу пут $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Хајде да нађемо временски интервла dt' који протекне на сатовима који се крећу. У систему везаном за сатове они мирују, па је $dx'=dy'=dz'=0$, па инаваријантни интервал записујемо као:

$$-ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dt'^2 \tag{1.8}$$

$$dt' = dt\sqrt{1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}} = dt\sqrt{1-v^2} \tag{1.9}$$

Где је v брзина којом се крећу сатови. Користећи претходну релацију можемо да нађемо време које протекне на сатовима који се крећу када на нашем сату прође интервал $t_2 - t_1$:

$$t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1-v^2}$$

Као што видимо време које протекне за посматрача који се креће је увек краће у односу на време које протекне за посматрача који мирује (јер је $\sqrt{1-v^2} < 1$...). На крају закључујемо да:

$$\int_a^b ds$$

узима максималну вредност између две тачке у време-простору ако је свецка линија која их повезује **права**.

1.4.2 Лоренцове трансормације

Дошло је време да се ухватимо у коштац са референтним системима и њиховим утицајем на изглед путања честица. Да би наши референтни системи имали леп физички смисао захтевамо да **инваријантни интервал** ds буде доследан свог имена.

Једна опција јесу транслације у време-простору. Њих можемо да опишемо као $x^{\mu} \to x^{\mu'} = \delta^{\mu'}_{\mu}(x^{\mu}+a^{\mu})$ где су a^{μ} четири константна броја. Транслације остављају сам интервал Δx константним, па није ни чудо да је Δs непромењено.

Сада ћемо да пређемо на мало егзотичније трансформације - **ротације**. Пошто радимо у $\boldsymbol{R}^{3,1}$ нису баш класичне ротације него су мало пипавије. У овај скуп упадају и промена референтног система за константан вектор брзине или **буст** (*engl. boost*). овакве промене описујемо матричном једначином где је $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$ инваријантна у односу на време-простор:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}$$

или мало краће:

$$x' = \Lambda x$$

Тренутно немамо никакав услов за облик матрице $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$, што је мало лабава дефиниција. Ајде да узмемо у обзир услов инваријантности интервала:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^T \eta (\Delta x) = (\Delta x')^T \eta (\Delta x') \qquad (1.10)$$

$$= (\Delta x)^T \Lambda^T \eta \Lambda (\Delta x) \qquad (1.11)$$

Дакле:

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \qquad (1.12)$$

У индексној нотацији редослед чланова није битан јер су у суштини реални (ређе комплексни) бројеви, па је редослед другачији од матричне једначине изнад:

$$\eta_{\rho\sigma} = \Lambda^{\mu'}_{\rho} \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\nu'}_{\sigma} = \Lambda^{\mu'}_{\rho} \Lambda^{\nu'}_{\sigma} \eta_{\mu'\nu'}$$

Дакле тражимо матрице које испуњавају (1.12), матрице које задовољавају ту једначину зову се **Лоренцове трансформације**. Заједно са операцијом матричног множења Лоренцове трансформације формирају **Лоренцову групу**. Постоји тесна веза између ове групе и $SO(3)$ групе ротација у $\boldsymbol{R}^3$. Групу ротација чине 3×3 матрице које поштују једначину $R^T R = \mathbf{1}$, где је $\mathbf{1}$ јединична матрица. Такве матрице се називају *ортогоналне матрице* и када им је димензија 3 формирају грпу $O(3)$. Ова група укључује и промене смера, које зовемо трансформације парности. Ако желимо да одсечемо трансформације парности можемо да захтевамо јединичну детерминанту $|R| = 1$. Такве матрице се називају специјалним, па је група коју оне формирају **специјална ортогонална група** $SO(3)$. Како у Лоренцовој групи имамо и временску поред три просторне компоненте нотација је нешто другачија, па такву групу обележавамо као $O(1,3)$.

Бустове можемо да посматрамо као ротацију између просторне и временске осе, па је рецимо буст дуж x осе дат као:

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Где параметар ϕ шета по $(-\infty, \infty)$. У општем случају Лоренцове трансформације нису комутативне, па одатле видимо да Лоренцова група није Абелова. Скуп транслација и Лоренцових трансформација је не-Абелова група, тзв. **Поенкареова група**.

Погледајмо шта добијамо из горе дефинисане матрице:

$$t' = t\cosh\phi - x\sinh\phi \tag{1.13}$$

$$x' = -t\sinh\phi + x\cosh\phi \tag{1.14}$$

Одавде видимо да се тачка дефинисана са $x' = 0$ креће брзином:

$$v = \frac{x}{t} = \frac{\sinh\phi}{\cosh\phi} = \tanh\phi$$

У мало приземнијој нотацији $\phi = \tanh^{-1} v$ добијамо:

$$t' = \gamma(t - vx) \tag{1.15}$$

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{1.16}$$

Где је $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ наша драга константа. Наш апстрактан приступ је очувао стандардне Лоренцове трансформације. Применом ових једначина долазимо до стандардних ефеката специјалне релативности: контракција дужине, дилатација времена и релативност истовремености.

1.4.3 Релативистичко дејство

Да бисмо одредили релативистичко дејство за слободну честицу прва ствар коју треба да уочимо јесте да такво дејство мора да буде инваријантно у односу на Лоренцове трансформације (јер у супротном немамо глобални минимум дејства ако преласком у други референтни систем имамо путању за коју није нулта варијација дејства). Дакле дејство мора да зависи од неког Лоренцовог скалара. Даље, подинтегрална функција мора да буде диференцијал првог реда (како бисмо добили реалан број). Али једини овакав скалар који можемо да конструишемо за слободну честицу јесте управо инваријантни интервал ds или неки рескалиран интервал αds, где је α константно. Дакле, за слободну честицу дејство мора да има облик:

$$S = -\alpha \int_a^b ds$$

где интегралимо по свецкој линији честице (путања коју честица прави у простору Минковског док се креће). Релативистичко дејство има лепу геометријску интерпретацију (погледати напомену о сопственом времену изнад): *оно екстремизује путању између две тачке у простору Минковског.* Да би дејство било димензионо конзистентно морамо да прикачимо mc :

$$S = -mc \int_a^b \sqrt{-ds^2}$$

Минус испред дејства је ту да бисмо имали добар знак испред импулса и енергије. Дакле наш Лагранжијан је:

$$L = -mc\sqrt{c^2dt^2 - \dot{\mathbf{x}}^2}$$

Из Ојлер-Лагранжове једначине добијамо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{c^2dt^2 - \dot{\mathbf{x}}^2}}\right) = 0$$

Члан у загради можемо да запишемо као:

$$\mathbf{p_x} \equiv \frac{m\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}}} \equiv \gamma m\mathbf{v}$$

Што је позната релација за релативистички импулс. *Напомена*: у релацијама изнад сам оставио c јер га многи аутори остављају...

1.4.4 Геодезици у простор-времену

У овом поглављу само ћемо да дорадимо геодезијску једначину коју смо већ извели тако да она функционише за релативистичке честице. Радимо са релативистичким дејством изнад, па имамо да је:

$$S = -mc \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma L \quad \text{са} \quad L = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

Где смо одабрали произвољну параметризацију свецке линије честице $x^\mu(\sigma)$, па је $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\sigma$. Сада, да бисмо видели шта нам Ојлер-Лагражова једначина говори израчунајмо њене чланове:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\rho} = -\frac{1}{2L}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \quad \text{као и} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} = -\frac{1}{L}g_{\rho\nu}\dot{x}^\nu$$

Једначине кретања су тада[3]:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\rho} = 0 \implies \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{L}g_{\rho\nu}\dot{x}^\nu\right) - \frac{1}{2L}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$$

Ово је *замало* једначина коју смо и раније добили, једини проблемчић је што нам извод по σ погађа и L, па сређивањем налазимо:

$$g_{\mu\rho}\ddot{x}^\rho + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu}\right)\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = \frac{1}{L}\frac{dL}{d\sigma}g_{\mu\rho}\dot{x}^\rho$$

Ово је релативистички облик једначине (1.4), видимо да због корена у Лагранжијану имамо додатни члан са десне стране. Присетимо се примера 4, где смо видели да постоји много параметризација исте криве. Сад би било лепо да нађемо параметризацију која ће да убије члан са десне стране. Дакле, тражимо σ такво да:

$$\frac{dL}{d\sigma} \overset{?}{=} 0$$

Присетимо се како смо дефинисали сопствено време:

$$c\tau(\sigma) = \int_0^\sigma \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\sigma'}\frac{dx^\nu}{d\sigma'}}\;d\sigma' = \int_0^\sigma L(\sigma')d\sigma'$$

По конструкцији овог интеграла важи:

$$c\frac{d\tau}{d\sigma} = L(\sigma)$$

Ако одаберемо параметризацију $L(\tau)$ добијамо:

$$L(\tau) = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}} = \frac{d\sigma}{d\tau}L(\sigma) = \frac{c}{L(\sigma)}L(\sigma) = c$$

---

[3] Обратите пажњу да смо при извођењу О-Л једначина имали путање у функцији од времена t, па сада где год је примерено вршимо трансформацију $t \to \sigma$.

Дакле, поента је да ако параметризујемо L са τ добијамо $L = c$ и главно $dL/d\tau = 0$. Међутим, читалац може да провери да овај трик ради за било коју парамемтризацију облика:

$$\tilde{\tau} = a\tau + b$$

Овакве праметризације још називамо и **афине параметризације**.
Наша геодезијска једначина сада постаје:

$$\boxed{\frac{d^2x^\mu}{d\tilde{\tau}^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tilde{\tau}}\frac{dx^\rho}{d\tilde{\tau}} = 0} \tag{1.17}$$

Где су Кристофелови симболи дати као:

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x) = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma}\right)$$

1.5 Теорија класичних поља

Ово поглавље треба да нам послужи као добра вежба за оно што тек треба да урадимо. Општа релативност је теорија класичних поља, па самим тим има смисла да погледамо како класична поља изгледају у равном време простору са метриком Минковског. Такође, сличан приступ физици ћемо имати и у главном поглављу овог рада где ћемо додатно да уведемо још једну просторну координату која ће да нам обогати структуру метрике на многострукости.

У теорији класичних поља, Лагранжијан L можемо да представимо као интеграл тзв. **густине Лагранжијана $\mathcal{L}$**. Ова густина је функција поља Φ^i и њихових извода $\partial_\mu\Phi^i$:

$$L = \int d^3x\ \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu\Phi^i) \tag{1.18}$$

Дакле, дејство S сада узима облик:

$$S = \int dtL = \int d^4x\ \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu\Phi^i) \tag{1.19}$$

Као и раније добићемо Ојлер-Лагранжове једначине захтевом да дејство буде инваријантно у односу на мале веријације поља које представљамо као:

$$\Phi^i \to \Phi^i + \delta\Phi^i$$
$$\partial_\mu\Phi^i \to \partial_\mu\Phi^i + \delta\left(\partial_\mu\Phi^i\right) = \partial_\mu\Phi^i + \partial_\mu\left(\delta\Phi^i\right)$$

Где је у другој линији јасна легитимност замене варијације и извода. Погледајмо Тејлоров раазвој Лагранжијана (густине Лагранжијана али смо лењи као и иначе):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i\right) &\to \mathcal{L}\left(\Phi^i + \delta\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i + \partial_\mu \delta\Phi^i\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i}\delta\Phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \Phi^i\right)}\partial_\mu\left(\delta\Phi^i\right)\end{aligned}$$

Одавде је варијација дејства јасно дата са:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i}\delta\Phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \Phi^i\right)}\partial_\mu\left(\delta\Phi^i\right)\right] \tag{1.20}$$

Стандардна стратегија парцијалне интеграције другог члана варијације дејства и овде чини чуда, па добијамо:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \Phi^i\right)}\right)\right]\delta\Phi^i \tag{1.21}$$

Одавде следи:

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \Phi^i\right)}\right) = 0 \tag{1.22}$$

Ово су **Ојлер-Лагранжове** једначине за класичну теорију поља у равном простор-времену.

Постоје три енергије које обично асоцирамо са скаларним пољем, а то су:

кинетичка енергија: $\frac{1}{2}\,\dot{\Phi}^2$

градијентна енергија: $\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2$

потенцијална енергија: $V(\Phi)$

Иако потенцијал јесте Лоренц-инваријантан, кинетичка и градијентна енергија нису. Можемо да искористимо метрику како бисмо скували величину која јесте:

$$-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\Phi)(\partial_\nu\Phi) = \frac{1}{2}\,\dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2$$

Одавде нам је донекле очигледан избор Лагранжијана по аналогији кинетичка − потенцијална енергија:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\Phi)(\partial_\nu\Phi) - V(\Phi) \tag{1.23}$$

♣ Клајн-Гордонова једначина

Из малопређашње дискусије лако добијамо компоненте које иду у Ојлер-Лагранжову једначину, наиме:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} = -\frac{dV}{d\Phi} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} = -\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi \tag{1.24}$$

Враћањем у једначину 1.22 добијамо:

$$\Box\Phi - \frac{dV}{d\Phi} = 0$$

где смо увели д'Аламбертов (d'Alembertian) оператор $\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$. Сада ћемо да посматрамо поље осцилатора дато са $V = \frac{1}{2}m^2\Phi^2$. Овде је m тзв. маса поља (када квантизујемо поље добијамо ајгенвекторе импулса који представљају честице масе m). Одавде имамо:

$$\Box\Phi - m^2\Phi = 0 \tag{1.25}$$

Што још називамо и **Клајн-Гордонова једначина.**

Херман Минковски (1864 - 1909)

Херман Минковски рођен је 22. Јуна 1864. у данашњој Литванији (тадашње Руско царство), а умро је 12. Јануара 1909. у Немачкој. Био је Немачки математичар који је допринео геометријској интерпретацији бројева. Имао је завидне доприносе у теорији бројева, математичкој физици и у теорији релативности. Његова идеја да споји три просторне и једну временску димензију у један простор - простор Минковског - поплочала је пут за Алберта Ајнштајна да уведе специјалну релативност.

Син Немаца који су живели у Русији, Минковски се са родитаљима вратио у Немачку 1872. и провео своју младост у Пруском граду Кенигсберг. Био је математички виртуоз од малих ногу, те је уписао Универзитет у Кенигсбергу са само 15 година. Три године касније награђен је од стране Француске академије наука за његов рад о представљању бројева као збира пет квадрата.

За време студирања у Кенигсбергу упознао је још једног талентованог математичара, Давида Хилберта, са којим је блиско сарађивао како у Кенигсбергу тако и касније на Универзитету у Гетингену.

Након што је докторирао 1885 Минковски је предавао математику на Универзитету у Бону (1885 - 94), Кенигсбергу (1894 - 96), Цириху (1896 - 1902) и Гетингену (1902 - 09).

Заједно са Хилбертом истраживао је теорију електрона Данског физичара Хендрика Лоренца, и модификације те теорије у Ајнштајновој специјалној релативности. У научном раду под именом ”Време и простор” 1907 Минковски је увео своју познату четвородимензиону геометрију засновану на групи Лоренцових трансформација у специјалној релативности. Још један значајан рад у теорији бројева јесте "Геометрија бројева" који је објављен 1896. Његови радови су сабрани од стране Давида Хилберта у књизи "Сабрани радови" која је објављена 1911.

2 Ајнштајнове једначине поља

Пре него што кренем желим да препоручим читаоцу да погледа апендиксе А и Б ако није потпуно сигуран са математиком која нам је потребна. Ако јесте, опет може да погледа као начин да понови основе и усвоји ковенцију записа.

План за ово поглавље јесте да прво погледамо извођење Ајнштајнове једначине поља за ситуацију где нема материје. Добићемо неку једначину са којом ћемо даље да се играмо и погледамо нека решења. После тога ћемо да се бавимо још неким математичким проблемима. На крају стављамо и материју на сцену и уводимо тензор енергије-импулса.

2.1 Ајнштајн-Хилбертово дејство

Као што већ знамо, желимо да релативност буде манифестација геометрије време-простора. Као и свака физичка теорија, једначине опште релативности произилазе из варијације дејства - као што смо то видели у првом поглављу. Сада је питање какав облик треба да нам узме дејство како бисмо добили добру теорију. То дејство би требало да нам буде зависно од самих интрнзичних особина многострукости.

Простор-време је многострукост M заједно са Лоренцовом метриком. Дејство је интеграл на M. Да бисмо интегралили по многострукости потребна нам је запреминска форма (мера интеграције). Као што можете видети у апендиксу, метрика нам већ даје запреминску форму. Још нам преостаје да кандидујемо функцију у дејству коју ћемо да интегралимо. Једна таква функција која може да нам падне на памет јесте да то буде само Ричијев скалар R. С овом мотивацијом, размотримо следеће дејство:

$$S = \int d^4x \, \sqrt{-g} R \tag{2.1}$$

Ово је *Ајнштајн-Хилбертово дејство.* Не заборавимо да је минус у корену са метриком зато што радимо са Лоренцовом метриком која има једну негативну својствену вредност, па је $g = \det(g_{\mu\nu})$ негативно.

♣ Димензионалност

Једначина 2.1 није димензионо конзистентна. Фактор којим је обично унормалимо јесте:

$$S = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \, \sqrt{-g} R$$

Овај фактор нам је такав да би давао добру јачину за везивање материје касније.

Варијација дејства

Погледајмо сада варијацију овог дејства. Ово ћемо да урадимо из неколико корака. Погледајмо како се дејство мења када варирамо метрику $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$. Ако запишемо Ричијев скалар као $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ добијамо:

$$\delta S = \int d^4x \left((\delta\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right) \tag{2.2}$$

Сада ћемо члан по члан да дрљамо ове изразе како бисмо их свели на нешто крштено.

Тврђење 1. *Варијација* $\sqrt{-g}$ *је дата као:*

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} \; g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

Доказ. Користићемо тврђење да дијагонална матрица A испуњава својство:

$$\log \det A = \operatorname{tr} \log A$$

Ово је очигледно тачно за дијагоналне матрице, детерминанта је производ својствених вредности док је траг њихов збир, заједно са правилима логаритама имамо жељено тврђење. Уз ово добијамо:

$$\frac{1}{\det A} \delta(\det A) = \operatorname{tr}(A^{-1} \delta A)$$

Примењујући ово на метрику добијамо:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta(-g) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}(-g)g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$$

Користећи $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ следи тврђење. ☐

Тврђење 2. *Варијација Ричијевог тензора је дата као:*

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}$$

Где је:

$$\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\nabla_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}\right)$$

Доказ. Прво ћемо да погледамо варијацију Кристофеловог симбола $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$. Напоменимо да иако сам симбол није тензор, његова варијација јесте. Погледајмо како та варијација изгледа у нормалним координатама, где нам први извод метрике нестаје:

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\partial_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \partial_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu}\right)\\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\nabla_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}\right)\end{aligned}$$

Где смо у последњој линији заменили парцијалне изводе коваријантним изводима који се од њих разликују до на Кристофелов симбол, који у нормалним координатама нестаје. Како нам последња релација повезује два тензора, можемо да закључимо да ће она да важи у било ком координатном систему.

Сада ћемо да погледамо варијацију Римановог тензора. Он узима следећи облик у нормалним координатама:

$$R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho}$$

Одакле му је варијација:

$$\delta R^\sigma_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu \delta\Gamma^\sigma_{\mu\rho} = \nabla_\mu \delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\sigma_{\mu\rho}$$

Као и раније, заменили смо парцијалне изводе, те смо добли релацију тензора која мора уопштено да важи. Контракцијом индекса добијамо:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}$$

што смо и хтели да покажемо. ☐

Поента претходног тврђења јесте да закључимо да варијацију можемо да запишемо у облику:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \partial_\mu X^\mu$$

Где смо у X спаковали све чланове са инверзном метриком и Кристофеловим симболима. Наше дејство сада има облик:

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu X^\mu\right]$$

Последњи члан је потпун извод, па по теореми о дивергенцији можемо да га игноришемо. Изједначавањем $\delta S = 0$ добијамо:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \tag{2.3}$$

где је $G_{\mu\nu}$ Ајнштајнов тензор. Ово су Ајнштајнове једначине поља за случај где немамо материју. Ако извршимо контракцију 2.3 са $g^{\mu\nu}$ добијамо (имамо у виду да је $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$):

$$R_{\mu\nu} = 0$$

За овакве метрике кажемо да су *Ричи равне*.

2.1.1 Космолошка константа

Ајнштајн-Хилбертово дејство заиста јесте најједноставнија ствар која нам је могла пасти на ум као кандидат за дејство. Међутим, ако јој одузмемо константу добијамо следеће:

$$S = \frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}(R - 2\Lambda)$$

Где је Λ **космолошка константна**. Варијацијојм дејства сада добијамо једначину:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}$$

Када урадимо контракцију са $g^{\mu\nu}$ овог пута добијамо $R = 4\Lambda$. Када ово вратимо у једначину са космолошком константом, добијамо:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \tag{2.4}$$

Ускоро ћемо да решавамо ову једначину.

2.2 Нека решења једначине

Сада ћемо да погледамо нека од решења једначине 2.4. Погледаћемо разне сценарије и видети да се решења доста разликују у зависности од знака космолошке константе.

2.2.1 Простор Минковског

Почнимо са случајем где је $\Lambda = 0$. Овде се Ајнштајнова једначина своди на $R_{\mu\nu} = 0$. За решење не можемо да кандидујемо $g_{\mu\nu} = 0$ јер метрика мора бити недегенерисана.

Ограничење да је $\det g \neq 0$ значи ја је најпростија Ричи равна метрика управо простор Минковског:

$$ds^2 = -dt^2 + d\boldsymbol{x}^2$$

Још једна позната метрика која је Ричи равна јесте **Шварцшилдова метрика**:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{2.5}$$

2.2.2 де Ситеров простор

Сада ћемо да погледамо *де Ситеров*[1] простор за који је $\Lambda > 0$. Претпоставимо да тражимо метрику облика:

$$ds^2 = -f(r)^2 dt^2 + f(r)^{-2} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{2.6}$$

Можемо да нађемо компоненте Римановог тензора из овако задате метрике. Из тога можемо да нађемо компоненте Ричијевог тензора који је дијагоналан са компонентама:

$$R_{tt} = -f^4 R_{rr} = f^3 \left(f'' + \frac{2f'}{r} + \frac{f'^2}{f}\right)$$

Још је:

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta} = (1 - f^2 - 2ff'r)\sin^2\theta$$

---

[1] Willem de Sitter, holandski matematichar, fizichar i astronom.

Овако задат Ричијев тензор заиста може да се измасира тако да буде пропорционалан метрици. Једначине које функција f мора да задовољава су :

$$f'' + \frac{2f'}{r} + \frac{f'^2}{f} = -\frac{\Lambda}{f}$$

као и:

$$1 - f^2 - 2ff'r = \Lambda r^2$$

Лако можемо да проверимо да су дати услови задавољени за функцију:

$$f(r) = \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \quad \text{где је} \quad R = \frac{3}{\Lambda}$$

Метрика која одговара овоме је:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{2.7}$$

Ово је *де Ситеров простор.*

Геодезици у де Ситеровом простору

Погледајмо дејство за честицу у де Ситеровом простору. Обележимо сопствено време честице са σ. Тада је дејство:

$$S_{dS} = \int d\sigma \left[-f(r)^2\dot{t}^2 + f(r)^{-2}\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)\right] \tag{2.8}$$

Где је $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\sigma$.

Сваки степен слободе у горњем Лагранжијану који се појављује само са временским изводом води ка очуваним величинама. Лагранжијан изнад има два таква степена слободе $\phi(\sigma)$ и $t(\sigma)$. Први води ка очувању момента импулса:

$$l = \frac{1}{2}\frac{dL}{d\dot{\phi}} = r^2\sin^2\theta\dot{\phi}$$

Док је очувана вредност асоцирана са временом енергија:

$$E = -\frac{1}{2}\frac{dL}{d\dot{t}} = f(r)^2\dot{t}$$

Једначинама кретања које произилазе из 2.8 треба дати и услов који нам говори да ли посматрамо масивну или безмасену честицу. За масивне честице, услов обезбеђује да је путања временског типа:

$$-f(r)^2\dot{t}^2 + f(r)^{-2}\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) = -1$$

Без губитка општости узмимо раван $\theta = \pi/2$, тада је $\dot{\theta} = 0$ и $\sin^2\theta = 1$. Наш услов постаје:

$$\dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r) = E^2$$

где је ефективни потенцијал дат као:

$$V_{\text{ef}} = \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) f(r)^2$$

Одмах видимо физички смисао: потенцијал гура честицу ка великим вредностима r

За геодесике без момента импулса, потенцијал је као код инвертованог хармонијског осцилатора. Ако има нека почетну брзину, помераће се од тачке $r = 0$ са једначином кретања:

$$r(\sigma) = R\sqrt{E^2 - 1}\sinh\left(\frac{\sigma}{R}\right)$$

Метрика 2.7 има сингуларитет за $r = R$. Нешто се догађа у тој тачи, али претходно решење у њој нема проблем јер се оно обистини за коначно сопствено време $\sigma = R$. Решење овог 'парадокса' је да погледамо у временску координату. Она има интерпретацију као време које пролази некоме у $r = 0$:

$$\frac{dt}{d\sigma} = E\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}$$

Лако видимо да $t(\sigma) \to \infty$ како $r(\sigma) \to R$. Дакле, иако човек који иде по овој путањи прође кроз тачку $r = R$ за коначно сопствено време, његовом другару у $r = 0$ прође бесконачно времена.

Ово понашање је слично ономе што се деси на хоризонту догађаја за црну рупу. Разлика је у томе да Шварцшилдово решење има и сингуларитет за $r = 0$, док де Ситер нема. За де Ситеров простор као да имамо нешто што константно избацује материју на $r = R$.

де Ситер урањање

Испоставља се да постоји леп начин да посматрамо на де Ситеров простор као подмногострукост од $\boldsymbol{R}^{1,4}$ са метриком:

$$ds^2 = -(dX^0)^2 + \sum_{i=1}^{4}(dX^i)^2 \tag{2.9}$$

Показаћемо да је де Ситерова метрика 2.7 метрика коју добијамо на подмногострукости дефинисаном хиперболоидом временског типа датог са:

$$-(X^0)^2 + \sum_{i=1}^{4}(X^i)^2 = R^2 \tag{2.10}$$

Ако прогласимо X^4 као специјалну координату, а збир остале три напишемо као $r^2 = (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2$, онда услов постаје:

$$R^2 - r^2 = -(X^0)^2 + (X^4)^2 \tag{2.11}$$

Можемо параметризовати решења као:

$$X^0 = \sqrt{R^2 - r^2}\sinh(t/R) \quad \text{и} \quad X^4 = \sqrt{R^2 - r^2}\cosh(t/R)$$

Тада је варијација:

$$\begin{aligned} dX^0 &= \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\cosh(t/R)dt - \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\sinh(t/R)dr \\ dX^4 &= \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\sinh(t/R)dt - \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\cosh(t/R)dr \end{aligned}$$

док је варијација X^i за $i = 1, 2, 3$ стандардан делић дужине у $\boldsymbol{R}^3$ дат са $\sum_{i=1}^{3}(dX^i)^2 = dr^2 + r^2 d\Omega_2^2$ где је $d\Omega_2^2$ метрика на јединичној 2 сфери. Кратак рачун показује да повлачење метрике 2.10 на површ 2.11 даје де Ситерову метрику.

Овакав избор координата није идеалан. Прво наизглед насумично проглашавамо X^4 као специјалну координату док услов 2.10 не ради ништа слично. Ово крије неке симетрије де Ситеровог простора. Такође, ове координате не покривају читав хиперболоид, јер је $X^4 \geq 0$
Посматрајмо решења 2.10 облика:

$$X^0 = R\sinh(\tau/R) \quad \text{и} \quad X^i = R\cosh(\tau/R)y^i \tag{2.12}$$

где y^i за $i = 1, 2, 3, 4$ испуњавају услов $\sum_{i=1}^{4}(y^i)^2 = 1$, па самим тим параметризују јединичну 3 сферу. Ове координате имају предносту јер одржавају више симетрије де Ситеровог простора и покривају читав простор. Враћањем овога у 5д метрику Минковског 2.9 добијамо другачију метрику на де Ситеровом простору:

$$ds^2 = -d\tau^2 + R^2\cosh^2(\tau/R)d\Omega_3^2 \tag{2.13}$$

где је $d\Omega_3^2$ метрика на јединичној 3 сфери. Ове координате називамо *глобалне координате* јер покривају читав простор. Како су исте као 2.7 до на координатну трансформацију и оне такође морају да испуњавају Ајнсштајнове једначине.

Ове координате дају много лепшу интуицију за де Ситеров простор: он је временски зависно решење у ком се просторна $\boldsymbol{S}^3$ скупи то полупречинка R, па се након тога шири. Процес ширења је солидна апроксимација нашег универзума на великој скали.

Глобалне координате показују да нема ничега сумњивог када је $X^4 = 0$, на површи која одговара $r = R$. Ово нам говори да је то само координатни сингуларитет (као што је $r = 2GM$ за Шварцшилдову метрику).

2.2.3 Анти-де Ситеров простор

Поново тражимо решења Ајнштајнове једначине:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$$

Овај пут тражимо решења са негативном космолошком константом $\Lambda < 0$. Поступак решавања је исти као и у де Ситеровом простору, с тим да нам је потребна блага поправка на функцији $f(r)$, коју лако налазимо. С тим у вези метрика у анти-де Ситеровом простору је:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{2.14}$$

Где је $R^2 = -3/\Lambda$. Понекад користимо скраћениву AdS за овај простор.

За овај простор такође користимо трансформисану метрику увођењем смене $r = R \sinh\rho$, па она тада постаје:

$$ds^2 = -\cosh^2\rho\, dt^2 + R^2 d\rho^2 + R^2 \sinh^2\rho \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{2.15}$$

У овом случају немамо сингуларитете у r координати. Такође ћемо да видимо да ове координате покривају читав простор.

Геодезици у анти-де Ситеровом простору

Како де Ситер и анти-де Ситер спадају у генералну класу метрика 2.6, можемо да искористимо решења која смо нашли за де Ситеров простор са малим променама. Радијална трајекторија честице са масом која се креће по $\theta = \pi/2$ је опет дата као:

$$\dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r) = E^2 \tag{2.16}$$

Међутим, овај пут ефективни потенцијал је:

$$V_{\text{ef}}(r) = \left(1 + \frac{l^2}{R^2}\right)\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Поново, $l = r^2\dot{\phi}$ је момент импулса честице. Лако видимо да ако честица нема момент импулса, онда је потенцијал хармонијски који гура честицу у координатни почетак $r = 0$. Геодезици осцилују око $r = 0$.

Ако честица има момент импулса тада потенцијал има минимум у $r'^2 = Rl$ Геодезици се окрећу око r'. Такође, са коначном енергијом, честице не могу да оду у $r \to \infty$.

Слика коју добијамо у AdS је хармонијска замка која гура честице у координатни почетак. Међутим AdS је хомоген простор $\sim$ свака тачка је иста. Како је онда могуће да је и хомоген и да гура честице у $r = 0$? Ако уђемо у систем који је у $r = 0$, видели бисмо како честица иде ка нама и осцилује. Како је та честица на геодезијској путањи, имамо право да уђемо и у њен систем. И у том систему бисмо видели исту ствар, с тим да сада лик из координатног почетка лети ка нама. Тако да сваку честицу у анти-де Ситеровом простору можемо да прогласимо за центар универзума ка коме све пада.

Можемо да погледамо и кретање безмасене честице. Овај пут дејство мора да има услов:

$$-f(r)^2\dot{t}^2 + f(r)^{-2}\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) = 0$$

Ово нам говори да је геодезик путања светлосног типа. Сада добијамо:

$$\dot{r}^2 + V_{\text{nula}}(r) = E^2$$

Где је потенцијал:

$$V_{\text{nula}}(r) = \frac{l^2}{R^2}\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Овај пут потенцијал је коначан за $r \to \infty$, па с тим у вези нема ограничења за светлост да оде у бесконачност. Само што ће имати црвени помак услед гравитације.

Да бисмо решили једначину за безмасену честицу можемо да гледамо $r = R\sinh\rho$. Ако честица нема момент импулса добијамо:

$$R\dot{\rho} = \pm\frac{E}{\cosh\rho} \qquad \Longrightarrow \qquad R\sinh\rho = E(\sigma - \sigma_0)$$

Где је σ афина параметар геодесике. Видимо да $\rho \to \infty$ када $\sigma \to \infty$. Ако се сетимо како смо дефинисали енергију, можемо да погледамо шта се дешава у координатном времену:

$$E = \cosh^2\rho\,\dot{t}$$

Сада добијамо:

$$R\tan(t/R) = E(\sigma - \sigma_0)$$

Како $\sigma \to \infty$ координатно време тежи $t \to R\pi/2$. Дакле, не само да светлост иде у $\rho = \infty$ него то остварују у коначном координатном времену! То значи да када посматрамо динамику AdS простора морамо да поставимо неки гранични услов у бесконачности за бесмасене честице и поља.

Иако на први поглед анти-де Ситеров простор изгледа потпуно оперисан од реалности он се, заправо, користи у квантној гравитацији. Данас је јако популарна тема истраживања.[2]

Анти-де Ситер урањање

Као и де Ситеров простор, можемо да посматрамо анти-де Ситер простор као урођен у 5д простор, овај пут је то $\boldsymbol{R}^{2,3}$ са метриком:

$$ds^2 = -(dX^0)^2 - (dX^4)^2 + \sum_{i=1}^{3}(dX^i)^2 \tag{2.17}$$

где простор живи као хиперболоид:

$$-(dX^0)^2 - (dX^4)^2 + \sum_{i=1}^{3}(dX^i)^2 = -R^2 \tag{2.18}$$

Можемо да решимо овај услов са:

$$X^0 = R\cosh\rho\sin(t/R) \quad , \quad X^4 = R\cosh\rho\cos(t/R) \quad , \quad X^i = Ry^i\sinh\rho \tag{2.19}$$

---

[2] Juan Maldacena (1997), `https://arxiv.org/pdf/hep-th/9711200.pdf`

где y^i за $i = 1, 2, 3$ испуњавају $\sum_{i=1}^{3}(y^i)^2 = 1$ параметризују јединичну 2 сферу. Враћајући ово у 2.18 даје AdS метрику у хиперболичким координатама.

Постој још једна параметризација хиперболоида која је корисна:

$$X^i = \frac{r}{R}x^i \quad \text{за} \quad i = 0, 1, 2, X^4 - X^3 = r \quad , \quad X^4 + X^3 = \frac{R^2}{r} + \frac{r}{R^2}\eta_{ij}x^i x^j \quad (2.20)$$

где је $r \in [0, \infty)$. Промена координата јесте уклета, али метрика коју добијамо је сасвим океј:

$$ds^2 = R^2 \frac{dr^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2}\eta_{ij}dx^i dx^j \quad (2.21)$$

Ове координате не покривају читав AdS него само онај део хиперболоида ограничен са $X^4 - X^3 > 0$. Ово је познат као Поинкареов[3] део AdS-а. Даље, у 2.21 не можемо да проширимо временску координату $X^0 \in (-\infty, \infty)$. То значи да у 2.21 време иде од $-\infty$ до $+\infty$ док у глобалним координатама 2.19 време је у $[0, 2\pi R)$.
Постоје још два учестала начина на које записујемо Поинкареов део. Први сменом $z = R^2/r$:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(dz^2 + \eta_{ij}dx^i dx^j)$$

Други начин се добија сменом $r = Re^{\rho}$:

$$ds^2 = R^2 d\rho^2 + e^{2\rho}\eta_{ij}dx^i dx^j$$

У сваком од случајева масивне честице падају ка $r = 0$, $z = \infty$ или $\rho = -\infty$.

2.3 Симетрије

До сада смо упознали три простора: Минковски, де Ситер и анти-де Ситер. Ови простори су добри примери управо због симетрија које поседују.

Симетрије у простру Минковског су нам добро познате - то су транслације и ротације у простор-времену (где ротације можемо даље да поделимо

---

[3] Henri Poincaré, француски математичар и физичар, види крај апендикса А

на праве ротације и Лорнецове бустове). Ове симетрије су од огромног значаја, у равном простору Минковског оне су одговорне за очување енергије, импулса и момента импулса.
Сада желимо да научимо како да говоримо о симетријама уопштене метрике.

2.3.1 Изометрије

Интуитивно је отприлике јасно шта је симетрија. Сфера изгледа исто с које год стране да је погледамо. Ако на њој имамо неко удубљење симетрија ротације не ради више. Дакле, на глаткој сфери метрика је некако униформна, не постоји посебна тачка на њој. С друге стране метрика сфере са удубљењем није иста из сваке тачке.

Да бисмо одморили руке од силног млатарања требали бисмо да утемељимо ове идеје у математику. Да бисмо постигли ово потребан нам је концепт тока. Подсетимо се да је ток фамилија дифеоморфизама $\sigma_t\colon M \to M$. Ток можемо да идентификујемо са векторским пољем на многострукости чији вектори у свакој тачки представљају тангентне векторе на ток:

$$K^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$$

Овај ток је изометрија ако метрика у свакој тачки тока има исти облик.

$$\mathcal{L}_K g = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0 \tag{2.22}$$

Препуштам читаоцу да покаже еквиваленцију у 2.22. Ово је *Килингова једначина*[4], а свако K које је задовољава је *Килингов вектор* (векторско поље али смо лењи).

Некада је налажење Килингових вектора нарочито тривијално. Ако, на пример, метрика не зависи експлицитно од једне координате, рецимо x^1. Тада је векторско поље $X = \partial/\partial x^1$ Килингов вектор.

Структура која карактерише симетрије јесте **Лијева алгебра**. То налазимо из резултата:

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X,Y]}$$

Дакле Килингови вектори такође формирају Лијеву алгебру групе изометрија на многострукости.

---

[4] Wilhelm Killing, немачки математичар. Јако чудно искуство када се први пут сретнете са овим именом у страној литератури.

Пример 1 простор Минковског

Погледајмо Килингову једначину на простору Минковског са метрикокм $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu K_\nu + \partial_\nu K_\mu = 0$$

За решење прво можемо узети $K_\mu = c_\mu$. Ово представља транслације. Друго решење које можемо да нађемо је:

$$K_\mu = \omega_{\mu\nu} x^\nu$$

где важи $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Ово нам даје ротације и Лоренцове бустове. Јасније видимо структуру алгебре ако дефинишемо Килингове векторе као:

$$P_\mu = \partial_\mu \quad \text{као и} \quad M_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} x^\rho \partial_\nu - \eta_{\nu\rho} x^\rho \partial_\mu$$

Постоји 10 таквих Килинговиx вектора. Није тешко проверити да важи:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad , \quad [M_{\mu\nu}, P_\sigma] = -\eta_{\mu\sigma} P_\nu + \eta_{\sigma\nu} P_\mu$$
$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}$$

Што препознајемо као Лијеву алгебру Поинкареове групе $\boldsymbol{R}^4 \times \mathrm{SO}(1,3)$.

Изометрије де Ситер и анти-де Ситер простора

Изометрије ова два простора се најлакше уочавају када их гледамо као просторе уроњене у $\boldsymbol{R}^{1,4}$ и $\boldsymbol{R}^{2,3}$ респективно. Конструкција 2.10 нам говори да де Ситеров простор наслеђује групу симетрија од $\boldsymbol{R}^{1,4}$ и то $\mathrm{SO}(1,4)$. Слично, услов 2.18 допушта анти-де Ситеровом простору да наследи групу симетрије од $\boldsymbol{R}^{2,3}$ и то $\mathrm{SO}(2,3)$. Обе ове групе имају 10 димензија, па су ови простори 'исто симетрични' као и простор Минковског.

Просто је написати 10 Килингових спинора[5]:

$$M_{AB} = \eta_{AC} X^C \partial_B - \eta_{BC} X^C \partial_A$$

где су X^A за $A = 0, 1, 2, 3, 4$ координате у 5д простору, а η_{AB} одговарајућа метрика са сигнатуром $(-, +, +, +, +)$ за де Ситеров и $(-, -, +, +, +)$ за анти-де Ситеров простор. У оба случаја Лијева алгебра је она од

---

[5] Спинор = вектор на стероидима, има комплексну структуру, погледај `https://en.wikipedia.org/wiki/Spinor`

одговарајуће Лоренцове групе:

$$[M_{AB}, M_{CD}] = \eta_{AD}M_{BC} + \eta_{BC}M_{AD} - \eta_{AC}M_{BD} - \eta_{BD}M_{AC}$$

Добра ствар је што су оба хиперболоида инваријантна у односу на ове Килингове векторе, у смислу да нас тај ток води на другу тачку на хиперболоиду.

Посматрајмо де Ситеров простору у статичном делу $r^2 = (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2$ са:

$$X^0 = \sqrt{R^2 - r^2}\sinh(t/R) \quad \text{и} \quad X^4 = \sqrt{R^2 - r^2}\cosh(t/R)$$

Знамо да је метрика 2.7 независна од времена. То значи да је $K = \partial_t$ Килингов вектор. Када га гурнемо на 5д простор он постаје:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial X^A}{\partial t}\frac{\partial}{\partial X^A} = \frac{1}{R}\left(X^4\frac{\partial}{\partial X^0} + X^0\frac{\partial}{\partial X^4}\right) \tag{2.23}$$

Ово нам указује на особину де Ситеровог простора да важи $g_{\mu\nu}K^\mu K^\nu < 0$ за све Килингове векторе временског типа. Њих ћемо касније користити да дефинишемо енергију.

У анти-де Ситеровом простору немамо проблем са налажењем Килинговог вектора временског типа, просто узмемо $K = \partial_t$

Међутим у де Ситеровом простору знамо да статични део не покрива читав простор. Ако покушамо да проширимо Килингов вектор 2.23 неће свуда бити временског типа. Ово видимо јер у $X^4 > 0$ и $X^0 = 0$ Килингов вектор гура напред у X^0 смеру, а у $X^4 < 0$ и $X^0 = 0$ нас вуче назад у супротном смеру. То значи да Килингово векторско поље на неким деловима многострукости показује у будућност, а у другим у прошлост. Дакле, ако покушамо да дефинишемо енергију овим Килинговим вектором она ће у неким деловима бити позитивна док ће у другим бити негативна.

Поента ове дискусије јесте да нема добро дефинисане позитивне енергије у де Ситеровом простору. Ово је повезано са тиме да метрика у глобалним координатама зависи од времена.

2.3.2 Неке очуване величине

Поставивши своју далеко познату теорему, Еми Нетер[6] је утемељила дубоку повезаност симетрија и очуваних величина. У тренутном стању

---

[6] Emmy Noether, немачка математичарка.

ово значи да у простору у коме имамо изометрије имамо и неке очуване величине.

Посматраћемо масивну честицу која се креће у време-простору са метриком g. Честица ће се кретати по путањи $x^\mu(\tau)$ где је τ сопствено време честице. Ако простор-време има Килингов вектор K конструисаћемо величину очувану дуж геодезика као:

$$Q = K_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{2.24}$$

Да бисмо се уверили да је Q заиста инваријантно можемо да узмемо извод по сопственом времену, па добијамо:

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{d\tau} &= \partial_\nu K_\mu \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} + K_\mu \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \\
&= \partial_\nu K_\mu \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} - K_\mu \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} \\
&= \nabla_\nu K_\mu \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} = 0
\end{aligned}$$

где у преласку у другу линију користимо једначину геодезика, а у последњој симетрију Килинговог вектора.

Ово изнад је поприлично другачије од уобичајеног извођења Нетерине теореме. Корисно је да поново изведеме Килингову једначину која одговара очуваној величини уз помоћ Нетерине теореме. Погледајмо дејство масивне честице:

$$S = \int d\tau \; g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Размотримо сада инфинитезималну транформацију $\delta x^\mu = K^\mu(x)$. Тада се дејство трансформише као:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d\tau \partial_\rho g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} K^\rho + 2 g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dK^\nu}{d\tau} \\
&= \int d\tau \partial_\rho g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} K^\rho + 2 \frac{dx^\mu}{d\tau}\left(\frac{dK_\mu}{d\tau} - K^\nu \frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau}\right) \\
&= \int d\tau \left(\partial_\rho g_{\mu\nu} K^\rho - 2K^\rho \partial_\nu g_{\mu\rho} + 2\partial_\nu K_\mu\right) \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \\
&= \int d\tau 2 \nabla_\nu K_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}
\end{aligned}$$

Трансформација је симетрија дејства ако је $\delta S = 0$. Из симетрије члана $\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$ добијамо Килингову једначину:

$$\nabla_{(\nu}K_{\mu)} = 0$$

Из Нетерине теореме очувана је величина 2.24 из симетрије.
Раније смо видели неке очуване величине у де Ситер и анти-де Ситер простору попут енергије и момента импулса, што су управо примери ове теореме.

2.3.3 Комарови интеграли

Комарови[7] нам дају леп начин да повежемо очуване величине и време-простор.
За дати Килингови вектор $K = K^\mu \partial_\mu$ можемо да конструишемо 1-форму $K = K_\mu dx^\mu$. Од ове 1-форме даље можемо да конструишемо 2-форму:

$$F = dK$$

У компонентама наравно имамо $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ где је:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu K_\nu - \nabla_\nu K_\mu$$

Сада ћемо да покажемо следеће:

Тврђење 3. *Ако важе Ајнштајнове једначине у вакууму* $R_{\mu\nu} = 0$ *онда* F *поштује Максвелове једначине у вакууму:*

$$d\star F = 0 \iff \nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0$$

Доказ. Погледајмо Ричијев идентитет на Килинговом вектору K^σ:

$$(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)K^\sigma = R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}K^\rho$$

Контракцијом индекса μ и σ имамо:

$$(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)K^\mu = R_{\rho\nu}K^\rho$$

Знамо да K поштује Килингову једначину, па је $\nabla_\mu K^\mu = 0$. Дакле, Ричијев идентитет постаје:

$$\nabla_\mu\nabla_\nu K^\mu = R_{\rho\nu}K^\rho$$

Можемо да погледамо $\nabla^\mu F_{\mu\nu}$:

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = \nabla^\mu\nabla_\mu K_\nu - \nabla^\mu\nabla_\nu K_\mu = -2\nabla^\mu\nabla_\nu K_\mu = -2R_{\rho\nu}K^\rho$$

Користећи услов тврђења $R_{\mu\nu} = 0$ следи резултат. ☐

---

[7] Arthur Komar, амерички физичар.

Како ова 2-форма испуњава Максвелове једначине можемо да је искористимо у дефинисању Комаровог интеграла. Интегралимо по 3d подмногострукости Σ:

$$Q_{\text{Komar}} = -\frac{1}{8\pi G}\int_{\Sigma} d\star F = -\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\Sigma} \star F = -\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\Sigma} \star dK \tag{2.25}$$

Константа испред интеграла је руком убачена ради касније погодности. Како је $d\star F = 0$ лако проверавамо да је Q_{Komar} заиста очувано. Комарови интеграли су корисни у одређивању масе црних рупа и у сличиним акробацијама. Нећемо се бавити тиме у овом раду.

2.4 Везивање материје

До сада смо се играли са време-простором у коме имамо пробну честицу која се креће по геодесикама. Међутим, као што читалац претпоставља, ово није читава прича. Материја утиче на простор-време исто као што простор-време утиче на материју.

2.4.1 Теорије поља у закривљеном простор-времену

Како се материја везује за време-простор? Прво можемо да погледамо како се поља везују за простор-време.

Скаларна поља

Дејство скаларног поља $\phi(\boldsymbol{x})$ у равном време простору је:

$$S_{\text{skalar}} = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right) \tag{2.26}$$

Лако је ово генерализовати на закривљен време-простор. Треба да осигурамо да сваки члан у дејству има уз себе и запреминску форму и треба да заменимо $\eta \to g$. Дакле, имамо:

$$S_{\text{skalar}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right) \tag{2.27}$$

Парцијални извод смо заменили коваријантним. Иако је за скаларна поља небитно који извод пишемо јер су исти, касније ће се испоставити корисно.

2.4.2 Ајнштајнове једначине са материјом

Да бисмо разумели како материја утиче на простор-време, додаћемо још један део дејству у ситуацију без материје:

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) + S_{\mathrm{M}} \tag{2.28}$$

Где је S_{M} дејство материје. Знамо шта се догађа када варирамо дејство без S_{M}, сада нас занима само овај члан.

Дефиниција 1. *Тензор енергије-импулса је дат као:*

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\mathrm{M}}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

Приметимо да је овај тензор симетричан, што наслеђује од симетрије $g^{\mu\nu}$. Ако варирамо дејсто 2.28 добијамо:

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\,(G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu})\,\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.29}$$

Из овога уз услов $\delta S = 0$ следи:

$$\boxed{G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}} \tag{2.30}$$

Ово су комплетне Ајнштајнове једначине са материјом.

2.4.3 Тензор енергије-импулса

Дејство S_{M} је конструисано да буде инваријантно на дифеоморфизме. Ако варирамо метрику за дифеоморфизам $\delta g_{\mu\nu} = (\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu}X_{\nu)}$ тада добијамо:

$$\delta S_M = -2\int d^4x\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\nabla^\mu X^\nu = 0 \quad \text{за све} \quad X^\mu$$

Ово нам говори да је тензор енергије-импулса коваријантно очуван:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{2.31}$$

Иако овако дефинисан тензор енергије-импулса изгледа као нешто што нужно настаје услед закривљености простора, он се јавља и у теоријама без гравитације. У тим теоријама он настаје коа последица 'Нетер струја' које су ту због транслационе инваријантности у времену и простору.

Пример 2

Лако можемо да нађемо тензор енергије-импулса за скаларна поља. Треба да варирамо дејство 2.27 у односу на метрику. Тада добијамо:

$$\delta S_{\text{skalar}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\nabla^\rho\phi\nabla_\rho\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\phi) - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\right)\delta g^{\mu\nu} \quad (2.32)$$

Одавде налазимо тензор енергије импулса:

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\nabla^\rho\phi\nabla_\rho\phi + V(\phi)\right) \quad (2.33)$$

Еквивалентан резултат у равном време-простору у коме је $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ је, на пример:

$$T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)$$

Где је ∇ уобичајен градијент. Ово препознајемо као густину енергије за скаларно поље.

Алберт Ајнштајн (1879 - 1955)

Алфа и омега, почетак и крај, онај који јесте, амин, доктор - све су то синоними за овог човека. Његов утицај на савремену физику је невероватан. Ово се поготово односи на његово неочекивано објављивање рада у вези са општом релативности.[8]

Ајнштајн је рођен у Улму у Немачкој и рано је показао интересовање за науку и математику. Након студија физике и математике у Швајцарској, радио је као патентни службеник у Берну, где је почео да развија своје идеје о релативности. Године 1905. објавио је низ радова о специјалној релативности.

Ајнштајн је наставио да ради на својој теорији релативности, а 1915. је објавио своју општу теорију релативности, која је указивала да гравитација није сила, већ пре закривљеност време-простора узрокована присуством масе и енергије.

Поред свог рада на релативности, Ајнштајн је такође дао значајан допринос квантној механици и статистичкој механици, а био је и снажан заговорник пацифизма и грађанских права.

Ајнштајн је 1921. године добио Нобелову награду за физику за свој рад у теоријској физици, а наставио је да ради и предаје у разним институцијама током свог живота. Умро је у Принстону, Њу Џерси, 1955. године у 76. години.

---

[8] Наш певач је можда најбоље срочио општу реакцију физичарског света на овај рад `https://youtu.be/MrHF_Z6RhOc?t=66`

3 Калуца-Клајн теорија

3.1 Додатне димензије

3.1.1 Рођење додатних димензија у теоријама физике

Свет свакодневног искуства је тродимензионалан. Али зашто би то било тако? Питање датира барем до Кеплеру, који је спекулисао да би трострука природа Свете Тројице могла бити одговорна. Новији аргументи су укључивали стабилност планетарних орбита и основних стања атома, употребу ширења таласа за пренос информација, фундаменталне константе природе и антропски принцип, као и ефекте црвоточине, космолошка константа, одређена разматрања без геометрије, теорије струна и вероватноће нуклеације у квантној космологији. Све ове линије расуђивања конвергирају ка истом закључку: да је, у складу са заједничком интуицијом, простор састављен од три макроскопске просторне димензије.

Ипак, искушење да се петља са димензионално7ћу природе показало се неодољивим за физичаре током година. Главни разлог за то је тај што се феномени који захтевају веома различита објашњења у тродимензионалном простору често могу показати као манифестације једноставнијих теорија у вишедимензионалним многострукостима. Али како се ова идеја може ускладити са уоченом тродимензионално7ћу простора? Ако постоје додатне координате, зашто изгледа да је физика независна од њих? Корисно је имати на уму да нове координате не морају нужно бити сличне дужини (у смислу да се мере у метрима, рецимо), или чак свемирске (у погледу њиховог метричког потписа). Конкретан пример који нарушава оба ова очекивања увео је 1909. Минковски, који је показао да се успеси Максвелове обједињене електромагнетне теорије и Ајнштајнове специјалне релативности могу шватити геометријски ако се време, заједно са простором, сматра делом четворо-димензионалне многострукост преко $x^0 = ict$. Многи од горе наведених аргумената против више од три димензије били су заобиђени чињеницом да четврта координата није означавала растојање. А разлог што се физика тако дуго чинила тродимензионалном је била велика величина параметра ц транспоновања димензије, што је значило да би се ефекти мешања просторних и временских координата (тј. контракција дужине, дилатација времена) појавили само при веома великим брзинама.

Инспирисан блиским везама између Минковског четвородимензионалног простор-времена и Максвеловог уједињења електрицитета и магнетизма, Нордстром[1] 1914. и (независно) Калуца 1921. су први покушали да уједине гравитацију са електромагнетизмом у теорији пет димензија. Обојица су се тада суочила са питањем: зашто није уочена пета димензија у природи? У време Минковског већ су постојали експериментални феномени (наиме, електромагнетни) чија се инваријантност у односу на Лоренцове трансформације могла тумачити као четвородимензионална инваријантност координата. Ниједна такво запажање није указивало на пету димензију. Нордстром и Калуца су стога избегли питање и једноставно захтевали да сви изводи у односу на x^4 нестану. Другим речима, физика је требало да се одигра — из још непознатих разлога — на четвородимензионалној хиперповршини у петодимензионалном универзуму (Калуцин услов цилиндра).
Уз ову претпоставку, обојица су били успешни у добијању једначина поља и електромагнетизма и гравитације из једне петодимензионалне теорије. Нордстром, који је радио као и пре опште теорије релативности, претпоставио је скаларни гравитациони потенцијал; док је Калуца користио Ајнштајнов тензорски потенцијал. Специфично, Калуца је демонстрирао ту општу релативност, када се тумачи као а петодимензионална теорија у вакууму, садржи четвородимензионалну општу релативност у присуству електромагнетног поља заједно са Максвеловим једначинама електромагнетизма. (Постојала је и Клајн-Гордонова једначина за скаларно поље без масе, али Калуза у то време то није ценио — и заправо је потиснуо.) Сви наредни покушаји уједињења виших димензија потичу из овог изванредног резултата. Различите модификације Калуцине петодимензионалне шеме, укључујући Клајнову идеју о компактификацији додатне димензије (о којој ћемо разговарати за тренутак) су предложили Ајнштајн, Џордан, Бергман и неколико других кроз године, али није проширена на више од пет димензија све док нису развијене теорије о јаким и слабим нуклеарним интеракцијама. Очигледно питање је било да ли се ове нове силе могу ујединити са гравитацијом и електромагнетизмом истим методом.

---

[1] Gunnar Nordström, фински теоријски физичар.

Кључ за постизање овога лежао је у концепту инваријантности гејџа, који је постајао препознат као основа свих интеракција физике. На пример, електродинамика би се могла извести наметањем локалне $U(1)$ гејџ инваријантности на лагранжијан слободних честица. Са тачке гледишта гејџ инваријантности, Калуцин подвиг у издвајању електромагнетизма из петодимензионалне гравитације више није био толико изненађујући: у ствари је функционисао зато што је $U(1)$ инваријантност гејџа додата Ајнштајновим једначинама прерушена у костим инваријантности у односу на трансформације координата дуж те пете димензије. Другим речима, гејџ симетрија је објашњена као геометријска симетрија простор-времена. Електромагнетно поље се тада појавило као векторско гејџ поље у четири димензије. Било је природно, иако не једноставно, проширити овај увид на групе са сложенијом симетријом. Де Вит[2] 1963. године био је први који је предложио инкорпорацију неабелове $SU(2)$ гејџ групе Јанга[3] и Милса[4] у Калуца-Клајнову теорију димензија $(4+d)$. Потребне су најмање три додатне димензије.

3.1.2 Приступи вишедимензионом уједињењу

Овде истичемо три кључне карактеристике свих модела о којима је до сада било речи:

1. Они поштују Ајнштајнову визију природе као чисте геометрије. (Ова идеја се може пратити у нематематичком облику барем до Клифорда 1876., а постоје наговештаји тога још у индијским Ведама, према Вилеру и другима.) Електромагнетно и Јанг-Милсово поље , као и гравитационо поље, у потпуности су садржани у вишедимензионалном Ајнштајновом тензору ${}^{(4+d)}G_{AB}$; односно у метрици и њеним изводима. Није потребан експлицитни тензор енергије-импулса ${}^{(4+d)}T_{AB}$.

2. Они су минимална проширења опште теорије релативности у смислу да нема модификације математичке структуре Ајнштајнове теорије. Једина промена је да индекси тензора прелазе од 0 до $(3+d)$ уместо од 0 до 3.

---

[2] Bryce DeWitt, амерички теоријски физичар.

[3] Chen Ning Yang, кинески теоријски физичар.

[4] Robert Mills, амрички теоријски физичар

3. Они су а приори цилиндрични. Није предложен никакав механизам који би објаснио зашто физика зависи од прве ћетири координате, али не и од додатних.

Прва два од њих су пријатна са становишта елеганције и једноставности. Трећи се, међутим, модерним очима чини измишљеним. У настојању да се поправи овај недостатак, вишедимензионална уједињена теорија је еволуирала у три мање или више независна правца од времена Калуце. Сваки од њих жртвује или модификује једну од карактеристика 1 до 3 изнад.

Прво, предложено је да се додатне димензије не појављују у физици јер су компактне и неуочљиве на експериментално доступним енергецким скалама. Овај приступ је био успешан на много начина и доминантна је парадигма у уједињењу виших димензија. Међутим, ако неко жели да на овај начин уједини више од саме гравитације и електромагнетизма, чини се да у пракси треба напустити Ајнштајнов циљ геометризовања физике, барем у смислу 1 горе.
Други начин да се додатне димензије збришу из вида је да се оне посматрају као математички артефакти сложеније основне теорије, жртвујући 2 горе. Ово се може урадити, на пример, ако се класична (афина) геометрија која лежи у основи Ајнштајнове опште релативности замени пројективном геометријом. Додатне димензије тада постају визуелна помагала која нам могу, али не морају, помоћи да разумемо основну математику природе, али која не одговарају физиђким координатама.
Трећи приступ проблему објашњења тачне цилиндричности је да се размотри могућност да она не мора нужно бити тачна, опуштајући 3 горе. То јест, нове координате се узимају као номинална вредност, дозвољавајући физици да у принципу зависи од њих. Ова зависност се вероватно појављује у режимима који још увек нису добро испитани експериментом - баш као што релевантност четврте димензије Минковског за механику није била очигледна при нерелативистичким брзинама. Када се укључи зависност од додатних димензија, открива се да петодимензионалне Ајнштајнове једнаћине ${}^5R_{AB} = 0$ садрже четвородимензионалне ${}^4G_{\alpha\beta} = {}^4T_{\alpha\beta}$ са општим тензором енергије и импулса ${}^4T_{\alpha\beta}$ уместо само електромагнетног ${}^4T^{EM}_{\alpha\beta}$.

3.1.3 Приступ компактификације

Клајн је 1926. показао да би стање Калуциног цилиндра настало природно ако би пета координата имала под 1 кружну топологију, у ком случају би физичка поља зависила од ње само периодично и могла би се развити у Фуријеовом реду; и под 2 била довољно мала (компактификована) скала, у ком случају би енергије свих Фуријеових модова изнад основног стања могле бити тако високе да буду неопажене (осим раном универзуму). Тако би физика била ефективно независна од Калуцине пете димензије, што смо и желели. Као бонус, из почетка се чинило да би развијање електромагнетног поља у Фуријеове модове у принципу могло да објасни квантизацију електричног набоја. (Овај аспект теорије је морао бити напуштен, међутим, пошто се однос наелектрисања и масе виших модова није поклапао са односом ниједне познате честице. Данас се елементарни набоји идентификују само са Фуријеовим модовима основног стања, а њихови мала маса се приписује спонтаном кршењу симетрије.) Шема није била савршена; још увек је било потребно објаснити зашто се додатне димензије тако значајно разликују по топологији и размери од познатих просторно-временских. Њихова величина је посебно морала бити изузетно мала (испод скале атометра ($1am = 10^{18}m$), према актуелном експерименту). Постојало је и питање како тумачити ново скаларно поље које се појавило у теорији. Ове потешкоће су се, међутим, показале као превазилазне. Скаларна поља нису толико претећа као што су се некада чинила; сада се само претпостављa да су сувише масивна да би била примећена. И читава индустрија је израсла око проучавања механизама компактификације и топологије компактних простора.

Шта више, Клајнова стратегија компактификације додатних димензија постала је доминантна у обједињеној физици виших димензија, што је последњих година довело до нових поља као што су једанаестодимензионална супергравитација и десетодимензионална теорија суперструна.

3.2 Два примера

Сада ћемо да оставимо историју и причу иза себе и да пређемо на математику - једна формула говори више од милион речи.

3.2.1 Скаларно поље са једном додатном димензијом

Посматрајмо простор са једном додатном димензијом која ће да буде круг. Ту димензију називамо y и за њу важи $y \equiv y + 2\pi R$. Нека скаларно поље као аргумент узима све координате наше многострукости. Можемо да га рзвијемо у Фуријеов ред на следећ начин:

$$\phi(x^\mu, y) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \phi_n(x) e^{iyn/R} \tag{3.1}$$

Слично примеру са краја првог поглавља, ово поље ће да поштује модификовану Клајн-Гордоново једначину;

$$\Box_5\, \phi = m^2\phi \quad \text{где је} \quad \Box_5 = \Box + \partial_y^2 \tag{3.2}$$

Ако уврстимо у ово развој од ϕ добијамо:

$$\left(\Box - \frac{n^2}{R^2}\right)\phi_n = m^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Box\phi_n = \underline{\left(m^2 + \frac{n^2}{R^2}\right)}\phi_n \tag{3.3}$$

Где смо у претходној једначини добили спектар честица које називамо **Калуца-Клајн спектар**. Овде ступа прича о високим енергијама и компактификацији. Треба нам начин да објаснимо то што ове честице нисмо нашли у природи, па самим тим захтевамо да је R јако мало, а како је маса сваке честице $\propto R^{-2}$ видимо да нам то обезбеђује јако високе енергије.

Ефективно дејство

Сада ћемо да видимо шта нам говори дејство оваквог поља. Оно природно узима облик:

$$S^{5D} = \frac{1}{2}\int d^4x \int_0^{2\pi R} dy \left[-(\partial_\mu\phi)^2 + m^2\phi^2\right] \tag{3.4}$$

Једна лема коју користим и коју је лако показати јесте:

$$\int_0^{2\pi R} dy\; e^{i(m+n)y} = 2\pi R\delta_{m+n,0}$$

Тада дејство постаје:

$$\begin{aligned} S &= \sum_n \frac{1}{2}\int d^4x\; 2\pi R\left[-(\partial_\mu\phi_n)^2 - \frac{nm}{R^2}\phi_n\phi_m\delta_{n+m,0} + M^2\phi_n^2\right] \\ &= \frac{2\pi R}{2}\int d^4x\; \sum_n \left[-(\partial_\mu\phi_n)^2 + \left(M^2 + \frac{n^2}{R^2}\right)\phi_n\right] \end{aligned}$$

Једначину изнад можемо да нормализујемо $\tilde{\phi}_n = \frac{\phi_n}{\sqrt{2\pi R}}$, тада добијамо:

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x \sum_n \left[-(\partial_\mu\phi_n)^2 + \left(M^2 + \frac{n^2}{R^2}\right)\phi_n\right] \tag{3.5}$$

Као и раније добијамо спектар маса $M_n^2 = M^2 + \frac{n^2}{R^2}$.

3.2.2 Гејџ поље

Следећа ситуација коју желимо да размотримо јесте гејџ поље са још једном димензијом. Сада користимо индекс $M = (\mu, 4) \iff (x^\mu, y)$, где $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Разматрамо потенцијал дат у облику:

$$A_M = \begin{pmatrix} A_\mu(x, y) \\ \phi(x, y) \end{pmatrix}$$

где је $\phi \equiv A_4$. Као и раније, зависност о y развијамо у ред. Електромагнетни тензор има облик:

$$F_{MN}^2 = F_{\mu\nu}^2 + 2F_{\mu 4}^2 \quad \text{где је} \quad F_{\mu 4} = \partial_\mu A_4 - \partial_4 A_\mu = \partial_\mu \phi - \partial_y A_\mu$$

Сада имамо услов $5D$ гејџ инваријантности:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda \quad \text{и} \quad \delta\phi = \partial_y \Lambda$$

Такође је:

$$\delta A_\mu^n = \partial_\mu \Lambda_n \quad \text{и} \quad \delta\phi_n = i\frac{n}{R}\Lambda_n$$

Сада разликујемо два случаја за вредности n:

- $n = 0 \implies$ уобичајена $4D$ гејџ инваријантност.
- $n \neq 0 \implies$ гејџ избор[5]: $\phi_n = 0$

Уз ово изнад, електромагнетни тензор постаје:

$$F_{\mu 4}^n = \begin{cases} i\frac{n}{R}A_\mu^n & , n \neq 0 \\ \partial_\mu \phi_0 & , n = 0 \end{cases}$$

С овим у виду, $5D$ ђество узима облик:

$$S = \int dy\, \frac{1}{4}F_{MN}^2 = \sum_n \left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(n)2} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{1}{2}\frac{n^2}{R^2}A_\mu^{(n)2} \right) \tag{3.6}$$

Дакле, добили смо $U(1)$ гејџ поље + безмасено скаларно поље + масивне КК векторе са масама $\frac{n^2}{R^2}$.

---

[5] Гејџ избор је техника којом, у грубо речено, бирамо репрезентативног члана из сваке класе еквиваленције која настане при гејџ инваријантности.

3.3 Гравитација

Оно што треба да покажемо у овом поглављу јесте да наша $5D$ метрика даје $4D$ гравитацију + $U(2)$ + скалар (радион). Стратегија коју пратим је доста слична два претходна примера. Претпоставићемо једну додатну димензију y и метрику записати као $5D$ објекат. Након тога треба да се играмо са $5D$ дифеоморфизмима да бисмо измасирали ту општу метрику у нешто са чиме можемо да радимо. За све детаље овогг рачуна топло препоручујем предавања 13.
Након првог корака употребе дифеоморфизама на општој метрици добијамо следеће[6]:

$$G_{MN} = e^{2\phi}\begin{pmatrix} \hat{g}_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu & A_\mu \\ A_\nu & 1 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

где смо дефинисали $\hat{g}_{\mu\nu} = \hat{G}_{\mu\nu} - A_\mu A_\nu$ где је велико G стандардна $4D$ метрика уз гејџ избор. Из ове метрике следе нека од следећих тврђења:

$$\begin{aligned} R\left[e^{2\phi}g_{\mu\nu}\right] &= e^{-2\phi}\left\{R - (D-1)D^2\phi - (D-2)(D-1)(D\phi)^2\right\} \\ \sqrt{g}\left[e^{2\phi}g_{\mu\nu}\right] &= e^{D\phi}\sqrt{g} \\ \sqrt{g}R^{(5)}\left[e^{2\phi}\hat{G}_{MN}\right] &= e^{3\phi}\left\{\hat{R}^{(5)} - 8\hat{D}_\mu^2 - 12(\hat{D}_\mu\phi)^2\right\} \end{aligned}$$

Метрику $\hat{G}$ можемо да запишемо као:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} \hat{g} + A\otimes A^T & A \\ A^T & 1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Користећи метрика изнад могуће је израчунати Кристофелове симболе (доста напоран посао). Одатле добијамо релацију $\hat{R}^{(5)} = \hat{R}^{(4)} + \frac{1}{4}F^2$. После овога можемо да нађемо:

$$\sqrt{g}R^{(5)}\left[e^{2\phi}\hat{G}_{\mu\nu}\right] = R - \frac{1}{2}(D\varphi)^2 + \frac{1}{4}e^{\sqrt{3}\varphi}F^2 \tag{3.9}$$

Где смо скалирали $\phi \to \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi$. На крају, имамо $5D$ дејство које носи информације и о гравитацији и о електромагнетизму:

$$S = \frac{1}{2k_5^2}\int dyR^{(5)} = \frac{2\pi R}{2k_5^2}\left\{R^{(4)} - \frac{1}{2}(D\varphi)^2 + \frac{1}{4}e^{\sqrt{3}\varphi}F^2 + \sum_{n\neq 0}(\text{масивна спин 2 поља})\right\} \tag{3.10}$$

---

[6] Не плашите се члана испред, ту је само скалирања ради и преформулише се милион пута кроз извођење, није ни битан у суштини.

3.3.1 Путописи ка вишим димензијама

Два главна концепта леже у основи модерне физике: локална координатна инваријантност и локална унутрашња или гејџ симетрија. Први води до теорије гравитације; ово последње води ка теорији гејџа јаких, слабих и електромагнетних интеракција.
Изванредно Калуцино откриће је да ако претпоставимо да је простор-време уграђено у простор са димензијом већом од четири, ова два концепта можда нису независна – други може бити изведен из првог. Физика је толико запањујућа, а математика тако елегантна да би многи теоретски физичари могли бити разочарани ако природа не користи Калуцин механизам на неком нивоу. Природо, молим те немој нас разочарати!

Штавише, теорија струна, водећи кандидат за обједињавање све четири фундаменталне интеракције, може бити конзистентно формулисана само у вишедимензионалном простор-времену и стога захтева Калуцин механизам[7]. А приори, то не мора бити; да је неко написао доследну теорију квантне гравитације која укључује познате интеракције у $4D$ простор-времену, Калуца-Клајн теорија би нестала на сметлишту историје физике. Такође, да Калуца-Клајн теорија није могла природно да инкорпорира Јанг-Милсову теорију, такође би била отписана.

---

[7] При томе јој треба 6 додатних димензија, а не једна. Да би ово објаснили, теоретичари струна користе Калуцин механизам и пакују тих 6 димензија у тзв. **Калаби-Јау многострукост**.

Теодор Калуца (1885 - 1954)

Теодор Калуца је био немачки математичар и физичар рођен 9. новембра 1885. у Опелну у Немачкој (данас Ополе, Пољска). Најпознатији је по свом раду у теоријској физици, посебно по свом пионирском доприносу развоју Калуца-Клајн теорије, која је имала за циљ да уједини гравитацију и електромагнетизам.

Калуза је завршио своје рано образовање у Опелну, а затим је наставио да студира математику и физику на Универзитету у Кенигсбергу. Докторирао је 1909. године под надзором познатог математичара Адолфа Хурвица. По завршетку докторских студија, Калуца је неколико година радио као професор у средњој школи, током којих је наставио истраживање теоријске физике.

Године 1919. Калуза је објавио револуционарни рад под насловом ”О проблему јединства физике”, који је представио нову петодимензионалну теорију гравитације и електромагнетизма. У овој теорији, Калуца је комбиновао Ајнштајнову теорију опште релативности са Максвеловим једначинама електромагнетизма у јединственом оквиру. Увео је концепт пете димензије, постулирајући да се електромагнетизам може описати закривљено71у ове додатне димензије.

Упркос његовом револуционарном раду, Калуцини доприноси нису одмах добили признање током његовог живота. Суочавао се са значајним изазовима у својој каријери, укључујући финансијске потешкоће и ограничене могућности за истраживање. Калуца је наставио да предаје на разним институцијама током свог живота, радећи као професор у средњој школи, предавач и на крају као професор математике на Универзитету у Кенигсбергу.

Трагично, Калуцина каријера је прекинута због његове преране смрти. Преминуо је 19. јануара 1954. у Гетингену, у Немачкој, у 68. години. Упркос првобитном недостатку признања, Калуцине идеје су имале трајан утицај на теоријску физику, утичући на следеће генерације физичара и доприносећи текућој потрази за јединствена теорија основних сила природе. Његов рад остаје важна прекретница у историји теоријске физике и наставља да инспирише истраживаче у њиховој потрази за дубљим разумевањем универзума.

А Увод у глатке многострукости

Ово и следће поглавље су можда и најбитнија поглавља овог рада. Циљ ми је да на приступачан и логичан начин уведем главне (нама потребне) резултате из диференцијалне геометрије и топологије глатких многострукости.

Ове области математике су доста софистикована машинерија, па с тим у вези треба да напоменем да се често (макар ја јесам) човек изгуби у силним симболима и изгуби мотивацију. Да бисмо заобишли ово у што већој мери, прво поглавље ће да уведе разне појмове који ће нам требати (вектори, дуални вектори) на мање формалан начин, чисто утилитарно. У другом поглављу концепте уводим формално, иако опет има мало луфта у излагању, па можда не испуњава критеријум појединих математичара. Ако читалац сматра да му није утољен жеђ овим прегледом, предлажем му да консултује литературу.

Ово поглавље захтева доста стрпљења али на крају је исплативо. Знање из диференцијалне геометрије и тензорског рачуна је широко примењиво у разним областима физике невезано за ОТР. Било како било, коцепти су поприлично праволинијски, те сматрам да ће цењени читалац добро да се снађе!

Препорука: Увешћемо доста нових појмова и сви су интимно повезани, мислим да није лоше уз себе имати папир и оловку и пратити текст упоредо и проверавати извођења.

А.1 Шетња кроз теорију

А.1.1 Вектори

Почињемо нашу причицу са звездом елементарне физке - **вектором**. Прва ствар коју вреди рећи јесте да у простору Минковског немамо класичне три-векторе него **четворовекторе** (у неким књигам и квадривекторе или 4векторе).

Прва битна ствар коју треба избацити из наших испраних мозгова јесте то да мислимо о векторима као стрелама у простору. Обично се тако уводе, као стреле које се пружају од једне до друге тачке (имају правац и интензитет). Обично уз то допуштамо да их транслирамо кроз простор и калемимо једне на друге тек тако. Ово је проблем у било ком простору који није раван (Еуклидски), јер на пример није јединствено одређена крива која спаја две тачке на многострукости, па самим тим није јединствено дефинисано ни сабирање и одузимањне.

Да бисмо изашли на крај са овим проблемом од сада ћемо да размишљамо о векторима стриктно везаним уз једну тачку у простору. Скуп свих могућих вектора које можемо провући кроз једну тачку p називамо **тангентни простор** у тачки p и обележавамо га са $\boldsymbol{T_p}$. Име је доследно јер се испоставља да сви вектори које асоцирамо за дату тачку заправо јесу тангентни на ту многострукост. (Замислите сферу и неку тачку на њој, тангентни простор је раван тангентна на сферу у тој тачки, а вектори су 'стреле' које као почетак имају ту тачку и леже у тангентној равни. На пример, није вектор стрела која иде кроз центар сфере и садржи дату тачку на њој.) Ипак ово је само илустративно објашњење које зависи од простора у коме је многострукост уткана (рецимо сфера је уткана у $\boldsymbol{R}^3$), што нам није потребно.

У следећем поглављу ћемо повезати тангентни простор са стварима које можемо да направимо од саме многострукости. За сад, мислите на T_p као апстрактни векторски простор везан за сваку тачку у време-простору.

Векторски простор над пољем реалних бројева је скуп свих објеката (вектора) које можемо сабирати и множити константама (елемнтима поља над којим правимо векторски простор). Дакле, за било која два вектора V и W и реалне бројеве a и b важи:

$$(a+b)(V+W) = aV + bV + aW + bW$$

Сваки векторски простор има свој координантни почетак (нула вектор) као идентитет за сабирање. Постоје додатне структуре које можемо да рамзатрамо (унутрашњи, спољашњи производи) али за сада нам је ово доста.

Даље, **векторско поље** је само скуп вектора у простору где имамо тачно један добро дефинисан вектор за сваку тачку у простору (као длаке на глави). Од користи би нам било да нађему неку базу за ове векторске просторе како бисмо могли да разматрамо компоненте вектора.

База у векторском простору је скуп линеарно независних вектора који покривају тај простор. Линеарно независни значи да је решење једначине $\sum a_i \boldsymbol{v_i} = 0$ само тривијално $a_i = 0$. Покривају простор значи да је сваки вектор у том простору линеарна комбинација базних вектора. Приметите како не захтевамо да буду нормални један на други или јединичне дужине.

За дати векторски простор постоји бесконацно много начина да одаберемо базне векторе. Међутим, скуп басних вектора ће увек имати исти број елемената, тај број називамо **димензија** векторског простора. Рецимо, у простору Минковског димензија је наравно 4.

Замислимо да за сваки тангентни простор одаберемо базис $\hat{e}_\mu$, са $\mu = \{0, 1, 2, 3\}$ као и иначе. Рецимо такође да ћемо 'прилагодити базис координатам x^μ' - то значи да је рецимо $\hat{e}_1$ усмерен ка x оси. Ово није никакво правило али обично бирамо базис усмерен тако да нам олакша рад. Сада било који апстрактни вектор A можемо да напишемо у облику:

$$A = A^\mu \hat{e}_\mu$$

Коефицјенти A^μ су компоненте вектора A.

Чест пример вектора у простору јесте управо тангентни вектор на неку криву. Координате параметризоване криве у простору су одређене параметром, рецимо $x^\mu(\lambda)$. Тангентни вектор $V(\lambda)$ има компоненте:

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

Читав вектор је $V = V^\mu \hat{e}_\mu$. Лоренцовом трансформацијом координате x^μ се мењају док параметризација λ остаје иста. Одавде закључујемо да се компоненте тангентног вектора мењају као:

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} V^\nu$$

Сам вектор V се не мења (у супротности са његовим компонентама) под дејством Лоренцових трансформација. Ово можемо да искористимо при извођењу начина на који се базиси мењају. Обележимо базисне векторе у транформисано систему са $\hat{e}_{\nu'}$:

$$V = V^\mu \hat{e}_\mu = V^{\nu'} \hat{e}_{\nu'} = \Lambda^{\nu'}_{\mu} V^\mu \hat{e}_{\nu'}$$

Ово мора да важи које год нумеричке вредности ми узели за V^μ, па можемо да закључимо да важи:

$$\hat{e}_\mu = \Lambda^{\nu'}_{\mu} \hat{e}_{\nu'}$$

Слично, да бисмо добили нов базис након транформације можемо претходну једначину да помножимо инверзном Лоренцовом матрицом $\Lambda^{\mu}_{\nu'}$.

А.1.2 Дуални вектори

Наставимо нашу дискусију са првим рођаком вектора - **дуалним векторима**. Дуалне векторе дефинишемо као објекте који припадају **котангентном простору T_p^*** (за разлику од тангентног простора). Дуални вектори се најбоље осликавају њиховим дејством, јер су у сржи они заправо пресликавања која обичне векторе сликају у реалне бројеве. Дакле ако $\omega \in T_p^*$, тада за било која два вектора важи:

$$\omega(aV + bW) = a\omega(V) + b\omega(W) \in \boldsymbol{R}$$

Лепа ствар код ових објеката је што они са уобичајеном операцијом сабирања формирају векторски простор, па слично као и за обичне векторе важи:

$$(a\omega + b\eta)(V) = a\omega(V) + b\eta(V)$$

Као и раније, ствари изгледају доста згодније када уведемо базис у овај векторски простор. Ово можемо да изведемо тако што ћемо да захтевамо следеће за неки базис $\hat{\theta}^\nu$:

$$\hat{\theta}^\nu \hat{e}_\mu = \delta^\nu_\mu$$

У овом запису аналогно имамо $\omega = \omega_\mu \hat{\theta}^\mu$. Понекад се у литератури елементи тангентног простора T_p називају **контраваријантни вектори**, а елементи котангентног простора **коваријантни вектори**. Данас се чешће користе изрази: вектори са горњим и вектори са доњим индексима.

Погледајмо у новој нотацији како дуал напда (чест термин за дејство оператора над објектима) неки произвољан вектор:

$$\begin{aligned}\omega(V) &= \omega_\mu \hat{\theta}^\mu (V^\nu \hat{e}_\nu)\\ &= \omega_\mu V^\nu \hat{\theta}^\mu \hat{e}_\nu\\ &= \omega_\mu V^\nu \delta^\mu_\nu\\ &= \omega_\mu V^\mu\end{aligned} \tag{A.1}$$

Што је управо унутрашњи (скаларни) производ ова два вектора. Још једна ствар коју видимо јесте да је последња једначина комутативна, па самим тим еквивалентно дејству дуалног на обичан вектор можемо дефинисати и дејство вектора на дуал:

$$V(\omega) = \omega(V) = \omega_\mu V^\mu$$

Дакле дуални простор дуалног простора јесте управо почетни векторски простор, што можемо записати као $(T_p^*)^* = T_p$.

Пример А.1.

Јако познат пример дуалног вектора јесте класични **градијент** скаларне функције. Он представља скуп свих парцијалних извода у односу на дату координату, и обележавамо га са d:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \hat{\theta}^{\mu}$$

Извод композитне функције нам даје релацију за градијент у трансформисаним координатама:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} = \Lambda^{\mu}_{\mu'} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}$$

Користимо и следећу нотацију како бисмо скратили запис:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} \phi = \phi_{,\mu}$$

Дакле x^{μ} има горњи индекс али када се налази у имениоцу извода он имплицира доњи индекс за свеукупан објекат.

Приметимо да градијент напада пример вектора који сам изнад навео - тангенту на криву $x^{\mu}(\lambda)$, на начин на који бисмо очекивали:

$$\partial_{\mu} \phi \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \lambda} = \frac{d\phi}{d\lambda}$$

А.2 Увод у глатке многострукости

Горе смо се мало играли са идејом о векторима и дуалима, а сада ћемо све то да ставимо на чврсту математичку основу и да генерализујемо све на просторе који нису нужно равни.

Сцена на којој ће се одвијати представа наше маште се зове **многострукост**. О многострукостима можете размишљати као о простору са добро дефинисаном димензијом n, који локално (довољно зумирано) изгледа као $\boldsymbol{R}^n$. Гледано глобално, овај простор не мора бити еуклидски и може имати егзотичну топологију.

Неки стандардни примери многострукости са којиима смо се већ сусретали јесу $\boldsymbol{R}^n$ јер зумирано он јесте $\boldsymbol{R}^n$. Даље, сфера $\boldsymbol{S}^n$ (нула сфера су само две тачке $\{-1, 1\}$, $\boldsymbol{S}^1$ је кружница итд...), торус $\boldsymbol{T}^n = \boldsymbol{S}^1 \times \ldots \times \boldsymbol{S}^1$

($\boldsymbol{T}^2$ је крофна или шоља за перверзније међу вама.)

А.2.1 Тополошки простори

Топологија је јако лепа област математике коју у основи занима геометрија разних објеката и које ствари остају инваријантне под дејством разних трансформација датог објекта. Људи и дан данас раде бројна истраживања у овој области математике. Ја је овде уводим чисто утилитарно и дискусија је значајно осакаћена и скраћена, мада остало је довољно меса да имамо са чиме да радимо.

Дефиниција 2 (*Топологија*)**.** *Колекција (скуп) подскупова скупа X се назива* **топологија на скупу $\boldsymbol{X}$** *и обележава као $\mathcal{T}$ ако важи следеће:*

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- *За произвољно (можда и бесконачно) много елемената $S_i \in \mathcal{T}$ важи: $\bigcup_i S_i \in \mathcal{T}$*
- *За коначно много елемената $S_i \in \mathcal{T}$ важи: $\bigcap_i S_i \in \mathcal{T}$*

Скуп заједно са његовом топологијом називамо **тополошки простор** $(X, \mathcal{T})$, међутим ова нотација је злопаћење, па га обично ословљавамо само са X ако нисмо у опасности да се збунимо.

Подскупове U скупа X који припадају његовој топологији $\mathcal{T}$ називамо **отвореним скуповима**. Дефиницију изнад је лако преформулисати у језик отворених скупова:

$\emptyset, X$ *су отворени скупови, произвољна унија и коначан пресек отворених скупова је такође отворен скуп.*

Скуп U је затворен ако је $X \setminus U$ отворен.

Пример А.2.

Сада ћемо да погледамо неколико лаких примера топологија:

1. Ако је $X = \{a, b, c\}$, неке топологије на том скупу су $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset\}$ коју још зовемо и **тривијална топологија**, даље $\mathcal{T}_2 = \{X,\ \emptyset,\ \{a, b\},\ b,\ \{b, c\}\}$...
2. За било који скуп X *скуп свих подскупова скупа X* је топологија и називамо је **дискретна топологија**.
3. Нека је X скуп; нека је $\mathcal{T}_c$ скуп свих подскупова U од X таквих

да је $X \backslash U$ или **пребројив** или читаво X. Тада је $\mathcal{T}_c$ топологија на X.

Сада ћемо да дефинишемо појам који ће да одстрани све 'нонсенс' тополошке просторе који нису од физичког значаја. Прелиминарно, за скуп U кажемо да је **околина** тачке p ако $p \in U$. Услов који ћемо да поставимо назива се **Хаусдорфов** услов, а простор који га испуњава **Хаусдорфов простор**. Наиме он каже да можемо да одаберемо околину тачке p тако да из ње можемо да изоставимо произвољну тачку $q \neq p$. Математички, за било које $p, q \in X$ постоје U и V такви да $U \cap V = \emptyset$ и $p \in U$ и $q \in V$.
Рецимо, један познат пример Хаусдорфовог простор је $\boldsymbol{R}$ са топологијом $\mathcal{T} = \{(a,b) \mid a < b,\ (a,b) \subset \boldsymbol{R}\}$.
Нотација: Ако је X тополошки простор и $V \subset X$ онда је **предслика** скупа V дата као $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$.

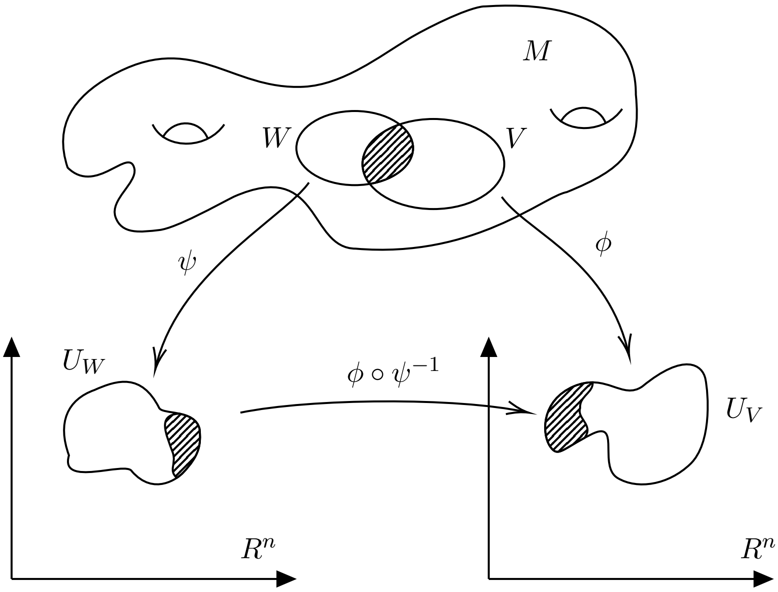
Дефиниција 3. *Нека су X и Y тополошки простори између којих је успостављено пресликавање $f : X \to Y$. Кажемо да је f непрекидно ако је за сваки отворен скуп $V \subset Y$ његова предслика $f^{-1}(V)$ отворен скуп у X.*

Дефиниција 4 (*Хомеоморфизам*)**.** *Хомеоморфизам између два тополошка простора M и $\tilde{M}$ је пресликавање $f : M \to \tilde{M}$ које је:*

1. *инјективно: $p \neq q \implies f(p) \neq f(q)$*
2. *сурјективно: $f(M) = \tilde{M}$.*
3. *је непрекидно и има непрекидан инверз.*

А.2.2 Глатке многострукости

Сада смо дошли до звезде овог поглавља - **глатке многострукости**. Глатке или диференцијабилне многострукости су јако битне јер само време простор ћемо да представимо као једну многострукост на којој се одвија сва физика. Хајде да дефинишемо овај појам. Напомињем да је други услов у дефиницији мало гломазан али да дискусија после дефиниције има циљ да га што боље расветли.



Слика А.1: Сагласна пресликавања на глаткој многострукости

Дефиниција 5 (*Многострукост*)**.** *Многострукост M је n-димензиони Хаусдорфов тополошки простор такав да:*

1. *M је локално хомеоморфно са $\boldsymbol{R}^n$. То значи да за свако $p \in M$ постоји отворена околина $\mathcal{O}_p$ и хомеоморфизам $\phi : \mathcal{O}_p \to U$ где је U отворен скуп у $\boldsymbol{R}^n$.*
2. *Одаберимо било која два скупа V и W који се преклапају $V \cap W \neq \emptyset$. Захтевамо да су одговарајућа пресликавања $\phi : V \to U_V$ и $\psi : W \to U_W$* **сагласна***, што значи:*

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap W) \to \phi(V \cap W)$$

је глатко пресликавање *(има непрекидне изводе произвољног реда, у ознаци C^∞).*

Пресликавања ϕ се зову *мапе* (у географском смислу) а скуп мапа *атлас*. Размишљајте о свакој мапи као начину да уведемо координатни систем на мали делић многострукости. Координата која одговара тачки $p \in \mathcal{O}_\alpha$ је:

$$\phi_\alpha(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$$

Координате краће записујемо као $x^\mu(p)$ где нам $\mu \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Преузимамо конвенцију да се координате обележавају са ’степенима’ тј. са горњим индексима, касније ће се показати као корисно.

Ако тачка p упада у више мапа ϕ_α она ће генерално да се слика у потпуно дисјунктне U_α околине одговарајућег Еуклидског простора $\boldsymbol{R}^n$. Нема потребе за паником, ова ситуација је потпуно аналогна томе што тачку у равни можемо да лоцирамо правоуглим (x, y) и рецимо поларним координатама (r, θ). Иако ова два уређена пара нису иста, они носе податке о истој тачки.
Пресликавања из дефиниције облика $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ се зову **функције транзиције**.

Пример А.3.

Овај пример за циљ има да приближи причу о другом услову из горње дефиниције. Ако је драгом читаоцу већ јасно шта се догађа, без губитка континуитета може да прескочи овај пример.
Узмимо за многострукост M планету Земљу. Ако Земљу представимо као сферу радијуса a, било која тачка на њој се може представити са два броја: географском ширином и дужином. Нека је θ мера ширине (0 на екватору, $\pi/2$ на Северном полу и $-\pi/2$ на Јужном полу). Нека је φ мера дужине (нула на главном меридијану кроз Гринич, мерено позитивно у западном смеру).
Драгољуб се налази у Математичкој гимназији и описује своје окружење xy координатана (x иде источно, y иде северно). Нека су координате географске ширине и дужине координатног почета његовог система λ и γ. У језику глобалних координата било која тачка у xy систему ће имати координате:

$$x = a(\varphi - \gamma) \quad y = a(\theta - \lambda).$$

Правоугаоне координате су равне, док је сфера закривљена, па се ова два система поклапају само локално.
Никола се налази мало даље од Београда, рецимо у Шимановцима. Свој простор он обележава координатама $x'y'$ (x' исток, y' север), са координатним почетком на месту λ' и γ'. Такчка на његовој мапи има координате:

$$x' = a(\varphi - \gamma') \quad y' = a(\theta - \lambda').$$

Како посматрачи и инструменти који живе на сфери немају појам о одзумираном изгледу њиховог простора, ментална слика о њему појавиће се тек онда када нађу довољно мапа, које стављене једна уз другу покривају читаву сферу. Да би мерили тачно и *интринзично* особине Земљине површи, кад год се xy и $x'y'$ преклапају они морају да се слажу.

Можемо да спојимо две мапе тако што их на **гладак начин ушијемо**. Са тако спојеним мапама имамо представу о ширем подручју (Од Шимановаца до Математичке) него што бисмо са једном од њих имали. Да бисмо пресликали једну мапу директно у другу можемо, рецимо, да решимо за глобалне координате из једне од две коресподенције изнад:

$$\varphi = \frac{x'}{a} + \gamma' \quad \theta = \frac{y'}{a} + \lambda'$$

И ово уврстимо у прву релацију:

$$x = x' + a(\gamma - \gamma') \quad y = y' + a(\lambda - \lambda')$$

Ова инверзија једне локално еуклидске мапе, са циљем да је повежемо са другом локално еуклидском мапом је управо пример **функције транзиције**.

A.2.3 Пресликавања између многострукости

Читав поента представљања компликованих тополошких простора као неки подскуп Еуклидских простора јесте да сада лако можемо да пренесемо сво математичко знање које имамо о Еуклидским просторима и на многострукости.

Рецимо, за функцију $f : M \to \boldsymbol{R}$ кажемо да је глатка ако је пресликавање $f \circ \phi^{-1} : U \to \boldsymbol{R}$ глатко за све мапе ϕ.

Слично, за пресликавање $f : M \to N$ између две многострукости M и N (које не морају бити исте димензије) је глатко ако је пресликавање $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : U \to V$ глатко за све мапе $\phi : M \to U \subset \boldsymbol{R}^m$ и $\psi : N \to V \subset \boldsymbol{R}^n$.

Дефиниција 6. *Дифеоморфизам је глатко бијективно пресликвање* $f : M \to N$ *између две многострукости* M *и* N *такво да му је и инверз* $f^{-1} : N \to M$ *гладак. Нужно због постојања инверза је да* N *и* M *имају исту димензију.*

А.3 Тангентни простори

Дошли смо до дела где желимо да радимо математику на многострукостима. Прво почињемо са изводима.
Посматрајмо функцију $f : M \to \boldsymbol{R}$. Да бисмо нашли извод функције у некој тачки p уведимо прво мапу $\phi = (x^1, \ldots, x^n)$ у околини тачке p. Тада можемо да конструишемо пресликавање $f \circ \phi^{-1} : U \to \boldsymbol{R}$ где је $U \subset \boldsymbol{R}^n$. Знамо да диференцирамо функције у $\boldsymbol{R}^n$, па самим тим добијамо:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right|_p = \left.\frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x^\mu}\right|_{\phi(p)}$$

Ово очигледно зависи од мапе коју одаберемо. Самим тим смо мотивисани да нађемо дефиницију која је мало више интринзична.

А.3.1 Тангентни вектори

Посматраћемо скуп свих глатких функција на многострукости M, у ознаци $C^\infty(M)$.

Дефиниција 7. *Тангентни вектор X_p је објекат који узима извод глатких функција у тачки $p \in M$. Специфично $X_p : C^\infty(M) \to \boldsymbol{R}$ и важи:*

1. *Линеарност: $X_p(f+g) = X_p(f) + X_p(g)$*
2. *$X_p(f) = 0$ ако и само ако је f константно*
3. *Лајбницово правило: $X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g)$*

Ова дефиниција 'вектора' јесте доста чудна. Ремети нам појам о вектору који имамо из остатка физичарске каријере, као неке апстрактне стрелице у простору.
Лако је проверити да објекат:

$$\left.\partial_\mu\right|_p := \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p$$

испуњава све услове из горње дефиниције. Сада желимо да покажемо да скуп горенаведених парцијалних извода формира базис за тангентни простор у тачки p. Да бисмо ово одрадили мало безболније имамо једну лему.

Лема. *Ако је функција* $F : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ *глатка* (C^∞) *тада за свако* $a = (a^1, \ldots, a^n) \in \boldsymbol{R}^n$ *посотји* C^∞ *функција* H_μ *таква да за свако* $x \in \boldsymbol{R}^n$ *имамо:*

$$F(x) = F(a) + \sum_{\mu=1}^{n} (x^\mu - a^\mu) H_\mu(x)$$

Доказ. Почнимо са основном теоремом интегралног рачуна:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(s) ds$$

Сада ћемо да урадимо скалирање интервала $[a, x] \to [0, 1]$ сменом $s = t(x - a) + a$. Тада је $ds = dt(x - a)$, па имамо:

$$F(x) - F(a) = (x - a) \int_0^1 F'(t(x - a) + a) dt$$

Што је тражено тврђење за $n = 1$. За $n > 1$, функцију F можемо да представимо као $F = (F^1, \ldots, F^n)$, где је свако $F^i : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. Применом на свако F^i добијамо жељени резултат. ☐

Приметите како у горњем тврђењу нисмо захтевали да функција има Тејлоров развој у некој тачки. Ово нам даје математичку моћ и слободу јер је тако тврђење општије. Међутим, као ментално олакшање о горњој леми можете да размишљате као да функција има Тејлоров развој, па је све доста интуитивније.

Теорема 1. *Скуп свих тангентних вектора у тачки* p *формира* n*-димензиони векторски простор који називамо* **Тангентни простор**. *Тангентни вектори* $\partial_\mu\big|_p$ *праве базис овог простора, тј. сваки вектор* $X_p \in T_p$ *можемо представити као:*

$$X_p = X^\mu \partial_\mu \bigg|_p$$

где су $X^\mu = X_p(x^\mu)$ *компоненте тангентног вектора у том базису.*

Доказ. Дефинишемо функцију $F = f \circ \phi^{-1} : U \to \boldsymbol{R}$ са мапом $\phi = (x^1, \ldots, x^n)$ у околини p. Тада, по претходној леми, функцију F у некој околини (можда мањој) тачке p можемо представити као:

$$F(x) = F(x^\mu(p)) + (x^\mu - x^\mu(p)) F_\mu(x)$$

Ударимо оператор ∂_μ на обе стране претходне једначине, приметимо да су чланови $F(x^\mu(p))$ и $-x^\mu(p)F_\mu(x)$ константни, док у члану $x^\mu F_\mu(x)$ преживи само први члан у Лајбницовом правилу, па имамо:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x^\mu}\right|_{x(p)} = F_\mu(x(p))$$

Сличну ствар можемо да урадимо и за функцију f. Присетимо се како смо дефинисали $F = f \circ \phi^{-1}$, деловањем десне композиције са ϕ на обе стране једначине видимо да добијамо n функција на M, и то $f_\mu = F_\mu \circ \phi$. Онда за произвољну тачку q која је блиска тачки p по леми имамо:

$$f \circ \phi^{-1}(x^\mu(q)) = f \circ \phi^{-1}(x^\mu(p)) + (x^\mu(q) - x^\mu(p))[f_\mu \circ \phi^{-1}(x^\mu(q))]$$

Знамо да је $\phi^{-1}(x^\mu(q)) = q$, па имамо:

$$f(q) = f(p) + (x^\mu(q) - x^\mu(p))f_\mu(q)$$

За тачке $q = p$ можемо да добијеммо:

$$f_\mu(p) = F_\mu \circ \phi(p) = F_\mu(x(p)) = \left.\frac{\partial F}{\partial x^\mu}\right|_{x(p)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right|_p$$

Сада ћемо да погледамо дејство вектора X_p. Он на фукцију f делује као:

$$X_p(f) = X_p(f(p) + (x^\mu - x^\mu(p))f_\mu)$$

Користећи основна правила о манипулисању тангентних вектора налазимо:

$$X_p(f) = X_p(f(p)) + X_p\left((x^\mu - x^\mu(p))\right) f_\mu + (x^\mu(p) - x^\mu(p))X_p\left(f_\mu\right)$$

Први члан умире јер је $f(p)$ константно. Последњи члан умире јер по Лајбницовом правилу треба да нађемо вредност 'неизведене' функције у истој тачки, што је овде идентички 0. Дакле, остаје нам само средњи члан од кога преживи:

$$X_p(f) = X_p(x^\mu)\left.\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right|_p$$

Одакле следи да се тангентни вектор X_p може написати као:

$$X_p = X^\mu \partial_\mu\big|_p$$

са $X^\mu = X_p(x^\mu)$ као и раније.

Да бисмо показали да је $\partial_\mu\big|_p$ базис, треба показати да је линеарно независан и да покрива простор. Одозго видимо да покрива простор. Да бисмо показали линеарну независност, нека је $\alpha = \alpha^\mu \partial_\mu\big|_p = 0$. Деловање овог вектора на функцију $f = x^\nu$ добијамо $\alpha(x^\nu) = \alpha^\mu(\partial_\mu x^\nu)\big|_p = \alpha^\nu = 0$. ово завршава доказ.

$\square$

Мењање координата

Координате су нам потребне да бисмо могли да радимо математику на многострукостима. Али да би наша теорија била од неке дубље важности желимо да будемо сигурни да ништа физички не зависи од нашег избора координата и да ниједан координатни систем с којим радимо није ништа друго до математичка олакшица.

Дакле, кључна идеја јесте да тангентни вектор X_p постоји као објекат независно од координата у којима га изражавамо. С друге стране, јасно видимо да базис за тангентни простор у тачки p дат као $\partial_\mu|_p$ зависи од координата. Да бисмо га дефинисали потребна нам је мапа ϕ и координате x^μ, па овакав базис још називамо и *координатни базис*.
Хајде да одаберемо још једну мапу у околини тачке p обележену као $\tilde{\phi}$ и координате $\tilde{x}^\mu$. Тада произвољан тангентни вектор X_p можемо да представимо као:

$$X_p = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_p = \tilde{X}^\mu \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu}\bigg|_p$$

Видимо да је сам вектор исти али да су му се компоненте промениле. Да бисмо нашли везу између ове две репрезентације можемо да погледамо дејство овог вектора на неку функцију f:

$$X_p(f) = X^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\bigg|_p = \tilde{X}^\mu \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu}\bigg|_{\phi(p)} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^\nu}\bigg|_p$$

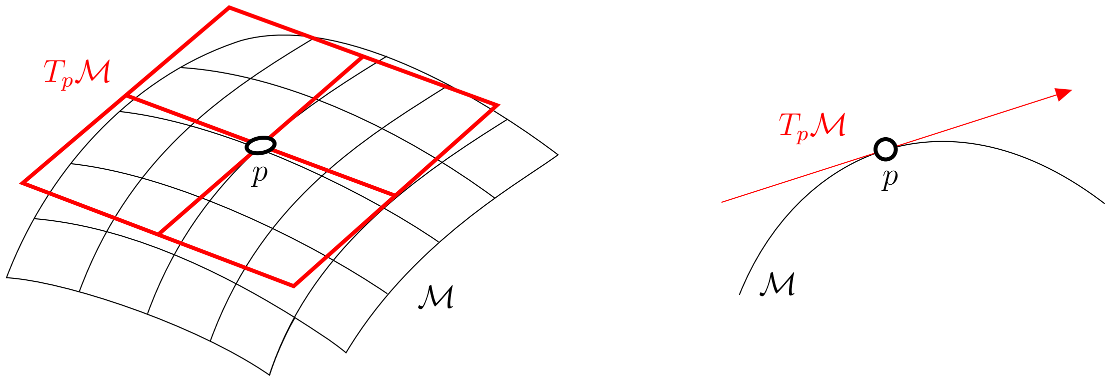
Где смо у другој једнакости користили правило композитног извода. Можемо да гледамо ову једначину на два начина, прво као промену базиса:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_p = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu}\bigg|_{\phi(p)} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu}\bigg|_p \tag{A.2}$$

Такође, на ово можемо гледати као промену компоненти вектора:

$$\tilde{X}^\nu = X^\mu \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu}\bigg|_{\phi(p)} \tag{A.3}$$

Мало архаичан назив за компоненте вектора које поштују трансформацију изнад јесте **контраваријантне компоненте**.



Слика А.2: Тангентни простор у тачки p

Геометријска интерпретација

Посматрајмо глатку криву на многострукости M која садржи тачку p. Суштински она је пресликавање $\sigma : I \to M$ где је $I \subset \boldsymbol{R}$, ми ћемо је параметризовати као $\sigma(t)$ тако да је $\sigma(0) = p$.
Са датом мапом ова крива постаје $\phi \circ \sigma : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ параметризована са $x^\mu(t)$. Без предзнања о диференцијалној геометрији рекли бисмо да је тангента на криву у тренутку $t = 0$ дата као:

$$X^\mu = \left.\frac{dx^\mu(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

Ово можемо да усмемо као компоненте тангентног вектора X_p, па добијамо:

$$X_p = \left.\frac{dx^\mu(t)}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p$$

Када овим вектором делујемо на функцију $f \in C^\infty(M)$ он нам говори колико брзо се у односу на нас мења та функција док ми идемо дуж наше криве.
Ово даје значење термину тангентни простору $T_p(M)$. Он представља простор свих могућих тангенти на све криве које пролазе кроз дату тачку p.

А.3.2 Векторска поља

До сада сва прича о векторима била је везана за једну тачку на многострукости. Као што можете претпоставити сада ћемо да успоставимо начин да одаберемо тангентни вектор за сваку тачку $p \in M$ и тако добијемо векторски простор.

Векторско поље је глатко приписивање тангентног вектора X_p свакој тачки p на многострукости. То значи да када векторским пољем нападнемо функцију оно нам као резултат да још једну глатку функцију која описује како се оригинална функција мења у свакој тачки коју она садржи. Дакле, векторско поље X (сада без индекса јер је слободно да шета) је пресликавање $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$. Функција $X(f)$ је дата као:

$$X(f)(p) = X_p(f)$$

Простор свих векторских поља на M се обележава као $\mathfrak{X}(M)$. За дати базис на M било које векторско поље можемо да представимо као:

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Где су сада X^μ глатке функције.

Комутатор

Када смо увели појам векторског поља лепо би било да видимо у каквом су она односу међусобно. Испоставља се да не постоји начин да смислено уведемо појмове као што су 'производ два векторска поља' који би и даље били векторско поље. Да бисмо ово видели мало јасније, нека су $X, Y \in \mathfrak{X}$ и нека је $f, g \in C^\infty$:

$$XY(fg) = X(fY(g) + Y(f)g) = X(f)Y(g) + fXY(g) + gXY(f) + Y(f)X(g)$$

као што видимо ово није $fXY(g) + gXY(f)$ што би по важило по Лајбницовом правилу да $XY \in \mathfrak{X}$.

Једна корисна математичка конструкција која као аргумент узима два векторска поља, а као резултат даје такође векторско поље јесте **комутатор** дефинисан својим дејством на произвољну функцију f:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

Оваква конструкција позната је и као *Лијева заграда.* У координатном базису комутатор изгледа овако:

$$\begin{aligned}[X, Y](f) &= X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(Y^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}\right) - Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(X^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}\right) \\ &= \left(X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} - Y^\mu \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu}\right)\frac{\partial f}{\partial x^\nu}\end{aligned} \tag{A.4}$$

Видимо да ово држи за произвољну функцију f, па је згодно записати га и у операторском облику:

$$[X,Y] = \left(X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} - Y^\mu \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Пример А.4.

Сада ћемо да покажемо да важи тзв. **Јакобијев идентитет**:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

Посматрајмо први члан овог израза где ћемо ради лакшег записа применити 'скраћенице' $\frac{\partial\,\text{нешто}}{\partial x^\mu} = (\text{нешто})'$. Добијамо:

$$[Y,Z] = YZ' - ZY' \implies [X,[Y,Z]] = X(YZ'' - ZY'') - (YZ' - ZY')X'$$

Где смо у другом делу користили Лајбницово правило. Сличним записом остале две заграде видимо да се сваки члан крати и да заиста важи идентитет.
Ово нам обезбеђује услов да скуп свих векторских поља на многострукости M чини *Лијеву алгебру*.

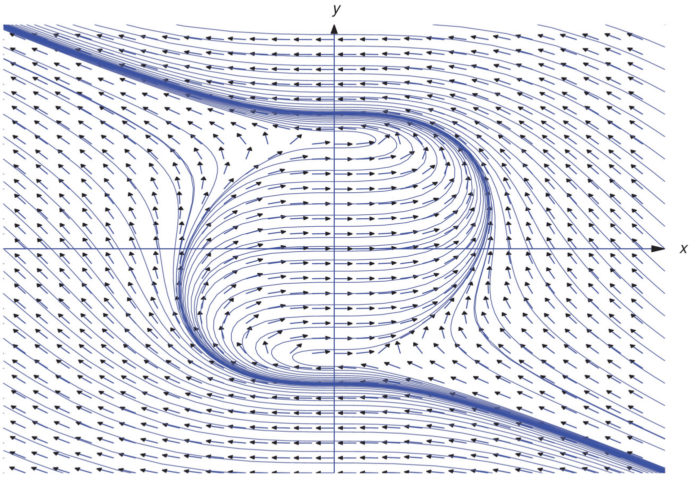
А.3.3 Интегралне криве

Овај део даје још једну визуелну помоћ за векторска поља. *Ток* на многострукости M је једно-параметарска фамилија дифеоморфизама $\sigma_t : M \to M$ где параметар $t \in \boldsymbol{R}$. Ова пресликавања имају особину да је $\sigma_0 = Id_M$ и да за произвољне s,t важи $\sigma_{s+t} = \sigma_s \circ \sigma_t$, одакле лако видимо да важи $\sigma_{-t} = 1/\sigma_t$. Због оваквог тока се појављују *струјне линије* од којих ћемо још захтевати да буду глатке.

Можемо дефинисати векторско поље тако што узмемо тангенту на струјне линије у свакој тачки. У датом координатном систему имамо:

$$X^\mu(x^\mu(t)) = \frac{dx^\mu(t)}{dt}$$

С друге стране, ако нам је дато векторско поље на многострукости можемо да интегралимо претходну диференцијалну једначину да добијемо струјне линије асоциране с тим векторским пољем. Овакве линије називамо **интегралне криве** настале од поља X.



Слика А.3: Интегрална крива неког $2D$ векторског поља

У наставку ће нам требати само инфинитезимални ток који настаје од датог поља, па ће нам користити апроксимација:

$$x^\mu(t) = x^\mu(0) + tX^\mu(x) + \mathcal{O}(t^2) \tag{A.5}$$

Видимо да извод претходне једначине конзистентан са једначином пре.

А.3.4 Лијев извод

Наше[1] тренутно знање је прилично сведено. Знамо како да узмемо извод функције увођењем векторског поља X где је $X(f)$ управо тај извод. Следећа ствар коју желимо да радимо јесте да узмемо извод векторског поља Y у смеру неког другог векторског поља X.

Да бисмо могли да одузмемо два вектора који се налазе у различитим тачкама многострукости треба нам начин да идентификујемо (у смислу успоставимо коресподенцију не у смислу пронађемо) тангентне просторе којима они припадају. Сада ћемо да уведемо два појма који ће нам омогућити да ово урадимо.

---

[1] Marius Sophus Lie је био норвешки математичар који је крунисан открићем објеката који се зову Лијеве групе. 'Лијев', дакле, није ијекавски изговор за леви...

Гурање и повлачење

Узмимо у обзир дифеоморфно пресликавање између две многострукости $\varphi : M \to N$. Рецимо да поред овога имао и функцију $f : N \to \boldsymbol{R}$. Тада можемо да направимо нову функцију коју обележавамо као $(\varphi^* f) : M \to \boldsymbol{R}$:

$$(\varphi^* f)(p) = f \circ \varphi(p)$$

Кориштење пресликавања да објекте оригинално дефинисане на N повучемо на M називамо **повлачење**. Увођењем координатног базиса x^μ на M и y^α на N пресликавање постаје $\varphi = y^\alpha(x)$. Тада повлачење има облик:

$$(\varphi^* f)(p) = f(y^\alpha(p))$$

С друге стране, векторска поља имају природнији облик када прелазе са многострукости у другом смеру. За дато векторско поље Y на M можемо конструисати **гурање** векторског поља на N у ознаци $(\varphi_* Y)$ које на произвољну функцију $f : N \to \boldsymbol{R}$ делује као:

$$[(\varphi_* Y)(f)](\varphi(p)) = [Y(\varphi^* f)](p)$$

Дакле, функције вучемо, а поља гурамо. У индексној нотацији је $Y = Y^\mu \partial/\partial x^\mu$, па једначина изнад постаје:

$$(\varphi_* Y)(f) = Y^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f(y)}{\partial y^\alpha}$$

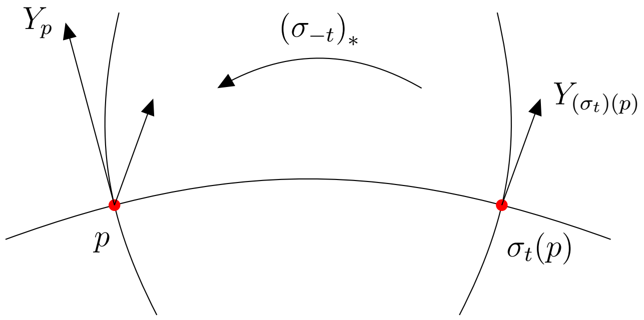
У компонентама:

$$(\varphi_* Y)^\alpha = Y^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \tag{A.6}$$

Конструкција Лијевог извода

Сада ћемо користећи ове идеје направити извод. Посматрајмо векторско поље X на многострукости M. Оно производи неки ток $\sigma_t : M \to M$. Пошто је ово легитимно пресликавање можемо га користити да направимо гурање из $T_p(M)$ у $T_{\sigma_t}(M)$. Ово је управо оно што нам треба ако желимо да поредимо тангентне векторе у суседним тачкама. Резултујући диференцијални оператор се зове **Лијев извод** у ознаци $\mathcal{L}_X$.
Погледајмо Лијев извод обичне функције f:

$$\mathcal{L}_X(f) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\sigma_t(x)) - f(x)}{t} = \left.\frac{df(\sigma_t(x))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{dt}\right|_{t=0}$$



Слика А.4: Конструкција Лијевог извода

Међутим знамо да је $X^\mu = dx^\mu/dt$, па добијамо:

$$\mathcal{L}_X(f) = X^\mu(x)\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = X(f) \tag{A.7}$$

Одавде закључујемо да је *дејство Лијевог извода на функције управо дејство векторског поља на функцију.*

Погледајмо сада дејство Лијевог извода на векторско поље Y:

$$\mathcal{L}_X(Y) = \lim_{t\to 0}\frac{((\sigma_{-t})_*Y)_p - Y_p}{t}$$

Обратимо пажњу на минус у σ_{-t}. Разлог овоме је управо то да поља гурамо. Пресликавање σ_t нас из тачке p доводи у тачку $\sigma_t(p)$. Да бисмо тангентни вектор $Y_{\sigma_t(p)} \in T_{\sigma_t}$ гурнули у тангентни простор T_p треба да се вратимо у времену, па користимо инверзно пресликавање $(\sigma_{-t})_*$.

Као олакшицу прво ћемо наћи извод базисних вектора ∂_μ:

$$\mathcal{L}_X = \lim_{t\to 0}\frac{(\sigma_{-t})_*\partial_\mu - \partial_\mu}{t}$$

Из једначине А.6 знамо дејство гурања на координатни базис само треба да заменимо y^α са инфинитезималним протицањем из А.5 дато са $x^\mu(t) = x^\mu(0) - tX^\mu(x) + \ldots$, па имамо:

$$(\sigma_{-t})_*\partial_\mu = \left(\delta^\nu_\mu - t\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} + \ldots\right)\partial_\nu$$

Коначно видимо да Лијев извод делује на базис као:

$$\mathcal{L}_X\partial_\mu = -\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu}\partial_\nu$$

Да бисмо нашли дејство на почетно поље Y користимо стандардне особине извода:

$$\mathcal{L}_X(Y^\mu\partial_\mu) = (\mathcal{L}_X Y^\mu)\partial_\mu + Y^\mu(\mathcal{L}_X\partial_\mu)$$

Где ћемо $Y^\mu(x)$ просто посматрати као n функција, па уз помоћ А.7 добијамо:

$$\mathcal{L}_X(Y^\mu\partial_\mu) = X^\nu\frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\nu}\partial_\nu - Y^\mu\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu}\partial_\mu$$

Довитљив читалац већ можда види колико је сати. Наиме, ово је управо структура комутатора, па на крају добијамо:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \tag{A.8}$$

Лијеви изводи нам неће требати много у овом раду али њихово увођење добро осликава неке технике и начин размисљања у диференцијалној геометрији.

А.4 Тензори

Објекат који ће да заузме централно место у нашој даљој дискусији јесте **тензор**. Њега ћемо да уведемо на донекле апстрактан начин као мултилинеарно пресликавање које за аргумент узима одређен број вектора и ковектора. Да бисмо боље разумели суштину тензора од помоћи нам је да у овом моменту опет посетимо дуалне векторе (ковекторе).

А.4.1 Дуални вектори

За сваку тачку $p \in M$ имамо везан тангентни простор T_p. Дуални простор овоме јесте котангентни простор T_p^*, а његови елементи су *котангентни вектори* или краће *ковектори*.
Као и раније, свакој тачки на многострукости можемо да припишемо ковектор и ако ово урадимо на гладак начин добићемо ковекторско поље које називамо и **један-форма**, у ознаци $\Lambda^1(M)$.

Као што смо видели у почетном поглављу дејство дуалног вектора на обичан вектор даје реалан број у виду унутрашњег производа. Ово у неку руку може да послужи као мотивација да уведемо интуитивну један-форму која би при дејству на векторско поље дала функцију (неку бројну вредност у свакој тачки, што је управо функцја). С овим на уму погледајмо следећи објекат дефинисан за произвољну функцију $f \in C^\infty$:

$$df(X) = X(f)$$

Видимо да овако дефинисан објекат df као аргумент узима векторско поље X и даје реалну функцију, па можемо да прогласимо $df \in \Lambda^1(M)$. Овај метод можемо користити да нађемо базис за Λ^1, тако што ћемо уместо произвољне функције f одабрати координатне функције x^μ:

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \partial_\nu(x^\mu) = \delta_\mu^\nu$$

Где смо векторско поље X заменили базисом ∂_μ. Ово значи да dx^μ представља базис за $\Lambda^1(M)$, дуалан координатном базису ∂_μ. Било који ковектор можемо да напишемо у облику:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu$$

Погледајмо сада шта се деси када променимо мапу ϕ на $\tilde{\phi}$. Читалац је подстакнут да се подсети приче о промени координата за обичне векторе, па да сам наслути облик трансформације. У сваком случају, знамо да се базис за векторе мења као:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Дуални базис би требао да се мења у инверзном облику, па имамо:

$$d\tilde{x}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Одавде онда имамо:

$$d\tilde{x}^\mu \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \right) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} dx^\rho \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \right) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} dx^\rho \left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \right) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} \delta_\sigma^\rho$$

Након што у крајњем члану уведемо замену $\sigma \to \rho$ (да бисмо се отарасили δ_σ^ρ) добијамо:

$$\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial \tilde{x}^\nu} = \delta_\nu^\mu$$

Одавде можемо да узмемо први члан с леве стране монструозне једначине изнад и да га упоредимо с последњим:

$$d\tilde{x}^\mu \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \right) = \delta_\nu^\mu$$

Као што бисмо и очекивали за матрицу и њен инверз... Произвољну један-форму ω можемо да запишемо у овим мапама као:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \tilde{\omega}_\mu d\tilde{x}^\mu \quad \text{где је} \quad \tilde{\omega}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \omega_\nu$$

Компоненте вектора који се трансформишу на овај начин се називају **коваријантне**.

А.4.2 Лијев извод један-форми

Метод који ћемо користити да нађемо овај извод није другачији од онога којои смо користили за налажење извода векторског поља. Основна идеја коју користимо јесте да преселимо дуални вектор ис једног котангентног протора T_p^* у други.

Једина разлика на коју треба обратити пажњу јесте чињеница да се форме са једне на другу многострукост **повлаче**, за разлику од векторских поља која се гурају.
Разматрајмо пресликавање $\varphi : M \to N$ и 1-форму $\omega : T(N) \to \boldsymbol{R}$. Како можемо да спојимо ова два концепта? Врло просто, ако гурнемо векторско поље X са M на N добијамо поље $(\varphi_* X)$. Ако на тај нови објекат делујемо 1-формом $\omega(\varphi_* X)$ добијамо пресликавање које као аргумент узима објекат дефнисан на M и слика га у реалне бројеве. Ово је исто као да смо повукли ω на M, па ту деловали на X. Такво запажање нас мотивише да дефнишемо повлачење један-форме ω као:

$$(\varphi^* \omega)(X) = \omega(\varphi_* X)$$

Увођењем координата x^μ на M и y^α на N добијамо:

$$(\varphi^* \omega)_\mu = \omega_\alpha \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$$

Пређимо сада на посао. Да бисмо дефинисали Лијев извод $\mathcal{L}_X$ потребан нам је ток који се јавља услед постојања векторског поља X који обележавамо са $\sigma_t : M \to M$, одакле добијамо:

$$\mathcal{L}_X \omega = \lim_{t \to 0} \frac{(\sigma^* \omega)_p - \omega_p}{t}$$

Приметимо да сада вучемо са $\sigma_{(+)t}$ за разлику од σ_{-t} које смо имали код векторских поља. Разлог овоме је промена смера 'пребацивања' објеката (вектроска поља се гурају $\Longleftrightarrow$ у смеру преслсикавања, а форме у супротном смеру). Инфинитезималан ток који делује на координате их мења као $x^\mu(t) = x^\mu(0) + tX^\mu + \ldots$, па је повлачење базисних вектора dx^μ:

$$\sigma_t^* dx^\mu = \left(\delta^\mu_\nu + t \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} + \ldots \right) dx^\nu$$

Дакле, онда је:

$$\mathcal{L}_X(dx^\mu) = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Уз Лајбницово правило и запис $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ добијамо:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X\omega &= (\mathcal{L}_X\omega_\mu)dx^\mu + \omega_\nu\mathcal{L}_X dx^\nu) \\ &= (X^\nu\partial_\nu\omega_\mu + \omega_\nu\partial_\mu X^\nu)dx^\mu \end{aligned} \tag{A.9}$$

Где смо на ω_μ гледали као на n функција из реалних у реалне, па смо их у другој линији напали само пољем X.

А.4.3 Тензорска поља

Дефиниција 8. *Тензор ранга* (r, s) *у тачки* p *је мултилинеарно пресликавање:*

$$T : \underbrace{T_p^*(M) \times \ldots \times T_p^*(M)}_{r} \times \overbrace{T_p(M) \times \ldots \times T_p(M)}^{s} \to \boldsymbol{R}$$

Тензор ранга (r, s) у тачки p је мултилинеарно пресликавање:

Пример тензора које већ знамо су: дуални вектори - тензори ранга $(0, 1)$ (потребан им је један вектор у аргументу да би дали реалан број!), вектори - тензори ранка $(1, 0)$, скалари - тензори ранга $(0, 0)$.
Као и раније, *тензорско поље* је приписивање тензора свакој тачки многострукости на гладак начин.

За дати векторски базис e_μ и дуални базис f^ν компоненте тензора су:

$$T^{\nu_1\ldots\nu_r}{}_{\mu_1\ldots\mu_s} = T(f^{\nu_1}, \ldots, f^{\nu_r}, e_{\mu_1}, \ldots, e_{\mu_s})$$

Операције са тензорским пољима

За два тензора T и S који су респективно ранга (r, s) и (p, q) тензорски производ се дефинише крајње интуитивно:

$$\begin{aligned} &S \otimes T(\omega_1, \ldots, \omega_p, \eta_1, \ldots, \eta_r, X_1, \ldots, X_q, Y_1, \ldots, Y_s) \\ &\quad = S(\omega_1, \ldots, \omega_p, X_1, \ldots, X_q)T(\eta_1, \ldots, \eta_r, Y_1, \ldots, Y_s) \end{aligned} \tag{A.10}$$

Ово ће бити нови тензор ранга $(r + p, s + q)$. У компонентама ово је:

$$(S \otimes T)^{\mu_1,\ldots,\mu_p,\nu_1,\ldots,\nu_r}{}_{\rho_1,\ldots,\rho_q,\sigma_1,\ldots,\sigma_s} = S^{\mu_1,\ldots,\mu_p}{}_{\rho_1,\ldots,\rho_q} T^{\nu_1,\ldots,\nu_r}{}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_s}$$

Још једна операција коју можемо да радимо над тензорима јесте **контракција индекса**. Од тензора T ранга (r, s) добијамо тензор ранга

$(r-1, s-1)$. Да бисмо ово урадили један аргумент заменимо са f^μ, а други са e_μ, одакле множењем да два посвим $\mu = 0, 1, \dots, n$ добијамо јединице. На пример, за тензор T ранга $(2,1)$ контракцијом добијамо тензор S ранга $(1,0)$:

$$S(\omega) = T(\omega, f^\mu, e_\mu)$$

Алтернативно бисмо могли да добијемо тензор $S'(\omega) = T(f^\mu, \omega, e_\mu)$. Гледајући на ово са стране индекса добијамо:

$$S^\nu(\omega) = T^{\nu\mu}{}_\mu \quad \text{или} \quad S'^\nu(\omega) = T^{\mu\nu}{}_\mu$$

Следећа операција је **симетризација и антисиметризација**. На пример, за дати тензор T ранга $(0,2)$ можемо да га симетризујемо или антисиметризујемо на следећи начин:

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \frac{1}{2}(T(X,Y) + T(Y,X)) \\ A(X,Y) &= \frac{1}{2}(T(X,Y) - T(Y,X)) \end{aligned} \tag{A.11}$$

У индексима ово постаје:

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) \quad \text{и} \quad A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$$

Друга нотацију коју ћемо често да користимо је:

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) \quad \text{и} \quad T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$$

Ово процедуру можемо да одрадимо над p индекса уз услов да су или сви горе или сви доле. Тада ћемо њихов збир да делимо са $p!$ јер је то број пермутација p објеката. Такође, код антисиметризације сваки члан ће имати предзнак $+$ или $-$ у зависности од парности пермутације индекса.

$$\begin{aligned} T^\mu{}_{(\nu\rho\sigma)} &= \frac{1}{3!}\left(T^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + T^\mu{}_{\rho\nu\sigma} + T^\mu{}_{\rho\sigma\nu} + T^\mu{}_{\sigma\rho\nu} + T^\mu{}_{\sigma\nu\rho} + T^\mu{}_{\nu\sigma\rho}\right) \\ T^\mu{}_{[\nu\rho\sigma]} &= \frac{1}{3!}\left(T^\mu{}_{\nu\rho\sigma} - T^\mu{}_{\rho\nu\sigma} + T^\mu{}_{\rho\sigma\nu} - T^\mu{}_{\sigma\rho\nu} + T^\mu{}_{\sigma\nu\rho} - T^\mu{}_{\nu\sigma\rho}\right) \end{aligned} \tag{A.12}$$

Напомена о парности пермутације

Парност пермутације p бројева је број замена између два броја у низу које треба да урадимо на почетној конфигурацији да бисмо добили неку другу. Битно тврђење које нећу доказати јесте да је парност пермутације једнозначна. Рецимо, низ 25431 је непарна пермутација низа 12345 јер су нам потребне 3 замене да бисмо од почетне конфигурације дошли до крајње ($2 \to 1, 1 \to 5, 3 \to 4$).

Да бисмо симетризовали или антисиметризовали два индекса који нису суседна користимо вертикалне линије да раздвојимо остатак индекса од њих:

$$T_{[\mu|\nu|\rho]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu\rho} - T_{\rho\nu\mu})$$

A.5 Диференцијалне форме

Тензорска поља која су нам од посебног значаја су потпуно антисиметрична $(0, p)$ тензорска поља која називамо и p-форме. скуп свих p-форми на многострукости M се обележава као $\Lambda^p(M)$.

За дату p-форму ω и q-форму η можемо да узмемо тензорски производ који антисиметризујемо да бисмо добили $p+q$-форму. Овакав објекат се зове *спољашњи производ* (негде и веџ производ):

$$(\omega \wedge \eta)_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \omega_{[\mu_1 \dots \mu_p} \eta_{\nu_1 \dots \nu_q]}$$

Овај мистериозни коефицјент је ту јер се испоставља да се за неке операција са формама он врло лепо пократи. У следећем тврђењу ово доказујем. Тврђење је мало насилно, па га на прво читање можете прескочити.

Теорема 2. *Нека је* $(\epsilon^1, \dots, \epsilon^n)$ *базис за* T_p^*. *За било која два мултииндекса* $I = (i_1, \dots, i_k)$ *и* $J = (j_1, \dots, j_l)$ *важи:*

$$\epsilon^I \wedge \epsilon^J = \epsilon^{IJ}$$

Где је $IJ = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ *конкатинација ова два индекса.*

Доказ. Из мултилинеарности довољно је да покажемо:

$$\epsilon^I \wedge \epsilon^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) = \epsilon^{IJ}(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}})$$

за било који низ базисних вектора $(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}})$. Избегавајући доказ за случајеве где се индекси p понављају или их нема на једној од две стране, прелазим на случај где нема ових проблема. Нека је $P = (p_1, \ldots, p_{k+l})$ и нека је $P = IJ$. По дефиницији:

$$\begin{aligned}
&\epsilon^I \wedge \epsilon^J(E_{p_1}, \ldots, E_{p_{k+l}}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!}\text{Alt }(\epsilon^I \otimes \epsilon^J)(E_{p_1}, \ldots, E_{p_{k+l}}) \\
&= \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn }\sigma)\epsilon^I(E_{p_{\sigma(1)}}, \ldots, E_{p_{\sigma(k)}})\epsilon^J(E_{p_{\sigma(k+1)}}, \ldots, E_{p_{\sigma(k+l)}})
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Једини ненулти чланови који преживљавају у горњој суми јесу чланови где σ пермутује првих k индекса и последњих l индекса из P одвојено. Другим речима $\sigma = \tau\eta$ где су $\tau \in S_k$ пермутује $(1, \ldots, k)$ и $\eta \in S_l$ пермутује $(k+1, \ldots, k+l)$. Како је $sgn\ (\tau\eta) = (sgn\ \tau)(sgn\ \eta)$, имамо:

$$\begin{aligned}
&\epsilon^I \wedge \epsilon^J(E_{p_1}, \ldots, E_{p_{k+l}}) \\
&= \frac{1}{k!l!}\sum_{\tau \in S_k, \eta \in S_l} (\text{sgn }\tau)(\text{sgn }\eta)\epsilon^I(E_{p_{\tau(1)}}, \ldots, E_{p_{\tau(k)}})\epsilon^J(E_{p_{k+\eta(1)}}, \ldots, E_{p_{k+\eta(l)}}) \\
&= \left(\frac{1}{k!}\sum_{\tau \in S_k}(\text{sgn }\tau)\epsilon^I(E_{p_{\tau(1)}}, \ldots, E_{p_{\tau(k)}})\right) \\
&\times \left(\frac{1}{l!}\sum_{\eta \in S_l}(\text{sgn }\eta)\epsilon^J(E_{p_{k+\eta(1)}}, \ldots, E_{p_{k+\eta(l)}})\right) \\
&= (\text{Alt }\epsilon^I)(E_{p_1}, \ldots, E_{p_k})(\text{Alt }\epsilon^J)(E_{p_{k+1}}, \ldots, E_{p_{k+l}}) \\
&= \epsilon^I(E_{p_1}, \ldots, E_{p_k})\epsilon^J(E_{p_{k+1}}, \ldots, E_{p_{k+l}}) = 1
\end{aligned} \tag{A.14}$$

□

Већ производ је антикомутативан у смислу да је $\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega$. Производ две 1-форме је:

$$\omega \wedge \pi = \frac{1}{2}(\omega_\mu \pi_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu + \omega_\nu \pi_\mu dx^\nu \wedge dx^\mu) = \frac{1}{2}(\omega_\mu \pi_\nu - \omega_\nu \pi_\mu)dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Ово представља 2-форму. Најопштија 2-форма је облика $\tau = \frac{1}{2}A_{ij}dx^i \wedge dx^j$. С тим у вези лако видимо како општу p-форму локално можемо да запишемо као $\omega = \frac{1}{p!}A_{\mu_1 \ldots \mu_p}dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p}$.[2]
За $\omega \in \Lambda^p(M)$ и $\eta \in \Lambda^q(M)$ имамо следеће тврђење:

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq}\eta \wedge \omega$$

---

[2] Ово важи само локално. Није тачно и глобално. Не можемо баш сваку форму да раставимо овако. У физици форме су довољно здраворазумне да се могу раставити овако. Тачно тврђење јесте да се свака k-форма може написати као линеарна комбинација форми које су растављиве.

Ако обе ове форме запишемо као производ респективних dx^μ видимо како заменом парова у том производу добијамо експонент pq.

Пример А.5.

Да бисмо стекли мало бољу интуицију о значењу веџ производа, посматрајмо два вектора који живе у $M = \boldsymbol{R}^3$. Нека је $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ и $\eta = \eta_\mu dx^\mu$:

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= (\omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3) \wedge (\eta_1 dx^1 + \eta_2 dx^2 + \eta_3 dx^3)\\ &= (\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1) dx^1 \wedge dx^2 + (\omega_2\eta_3 - \omega_3\eta_2) dx^2 \wedge dx^3 + (\omega_3\eta_1 - \omega_1\eta_3) dx^3 \wedge dx^1\end{aligned} \tag{A.15}$$

Као што можете да видите, веџ производ за два 3-вектора јесте управо њиво векторски производ у $\boldsymbol{R}^3$, што представља површину паралелограма образованог са ω и η.

Из претходног примера можемо да наслутимо зашто је битно да имамо веџ производ. Наиме, не постоји природна генрализација векторског производа × у просторима са димензијом већом од 3. Јако нам је битно да имамо начин да конструишемо површине и запремине у вишедимензионим просторима. С тим у вези интерпретација веџ производа јесте управо вишедимензиони рођак векторског производа.

Као што ћемо ускоро да видимо, да бисмо радили интеграле на многострукостима биће нам потребна инфинитезимална запремина тј. мера по којој интегралимо. Њу ћемо да дефнишемо као веџ производ n базисних вектора.

А.5.1 Спољашњи извод

Спољашњи или **екстерни** извод је генерализација диференцијала. Када смо први пут конструисали 1-форму записали смо је као:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

Сада ћемо да проширимо ово знање на више димензија.

Дефиниција 9. *Спољашњи извод је пресликавање:*

$$d : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M)$$

које у локалним координатама делује као:

$$(d\omega) = \frac{1}{p!}\frac{\partial\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p}$$

Алтернативно, деловање овог извода можемо и да запишемо као:

$$(d\omega)_{\mu_1\ldots\mu_{p+1}} = (p+1)\partial_{[\mu_1}\omega_{\mu_2\ldots\mu_{p+1}]}$$

Следећа тврђења која доказујемо су стандардна али мало сувопарна. Ако нисте попили кафу јутрос доказе можете да прескочите за сада.

Прво тврђење које наводим без доказа јер следи одмах из дефниције јесте да је оператор d линеаран.

Лема. *Ако је ω глатка k-форма и η глатка l-форма дефинисана на отвореном скупу многострукости, тада важи:*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

Доказ. Из линеарности довољно је размотрити чланове облика $\omega = udx^I \in \Lambda^k$ и $\eta = vdx^J \in \Lambda^l$ за глатке функције u и v. Прво треба да покажемо да d задовољава $d(udx^I) = du \wedge dx^I$ за било који мултииндекс I, не нужно растући. Ако I има поновљен индекс очито важи $d(udx^I) = 0 = du \wedge dx^I$ (јер је $dx \wedge dx = 0$). Ако се индекси не понављају, нека је σ пермутација која I шаље у растући мултииндекс J. Тада важи:

$$d(u\, dx^I) = (sgn\ \sigma) d(u\, dx^J) = (sgn\ \sigma) du \wedge dx^J = du \wedge dx^I$$

Користећи ово рачунамо:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d\left((u\, dx^I) \wedge (v\, dx^J)\right) \\ &= \left(uv\, dx^I \wedge dx^J\right) \\ &= (v\, du + u\, dv) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \left(du \wedge dx^I\right) \wedge \left(v\, dx^J\right) + (-1)^k \left(u\, dx^I\right) \wedge \left(dv \wedge dx^J\right) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \end{aligned} \tag{A.16}$$

где нам члан $(-1)^k$ долази из чињенице да је $dv \wedge dx^I = (-1)^k\, dx^I \wedge dv$ јер је dv 1-форма, а dx^I k-форма □

Ову лему ћемо да користимо да покажемо следећу теорему.

Теорема 3. *За сваку форму ω важи:*

$$d(d\omega) = 0$$

Ово још пишемо као $d^2 = 0$

Доказ. Прво ћемо да покажемо да тврђење важи за 0-форму или у приземнијим терминима глатку функцију. У том случају:

$$\begin{aligned} d(du) &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x^j}dx^j\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^i \wedge dx^j = 0 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Последња једнакост следи из Клероовог правила симетрије парцијалних извода који су непрекидни. За општи случај, користимо $k = 0$ случај и претходну лему:

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left({\sum_J}' d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}\right) \\ &= {\sum_J}' d(d\omega_J) \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} \\ &+ {\sum_J}' \sum_{i=1}^{k} (-1)^i d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge d(dx^{j_i}) \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} = 0 \end{aligned} \tag{A.18}$$

□

Још нека тврђења чије доказе заобилазим су:

- $d(\varphi^* \omega) = \varphi^*(d\omega)$ где је φ^* повлачење.
- Из претходног важи $d(\mathcal{L}_X \omega) = \mathcal{L}_X(d\omega)$

p-форма је *затворена* ако свуда важи $d\omega = 0$. Форма је *тачна* ако је $\omega = d\eta$ свуда за неко η.

А.5.2 Интеграција

Последња ствар коју желимо да радимо на многострукостима јесу интеграли. Као што сам рекао у претходном поглављу, користићемо веџ производ да дефинишемо меру за интеграл.

Интеграција на многострукостима

Дефиниција 10. *Запреминска форма v је форма димензије n:*

$$v = v(x)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

Где $v(x) \neq 0$. Ако таква форма постоји свуда, многострукост M је **оријентисана**.

Ако је $v(x) < 0$ оријентација је леворука, а ако је $v(x) > 0$ оријентација је десноруκа.

Није довољно да дефинишемо $v(x)$ само локално. Треба да ушијемо све области дефинисаности тако да се оријентација не промени. У другим координатама запреминска форма постаје:

$$v = v(x)\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^{\mu_1}}d\tilde{x}^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{\mu_n}}d\tilde{x}^{\mu_n} = v(x)det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}\right)d\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{x}^n$$

Што одржава оријентацију ако је :

$$det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}\right) > 0$$

За дату запреминску форму на M можемо да интегралимо било коју функцију $f : M \to \boldsymbol{R}$. У мапи $\phi : \mathcal{O} \to U$, са координатама x^μ:

$$\int_{\mathcal{O}} fv = \int_U dx^1 \ldots dx^n f(x)v(x)$$

Интеграција на подмногострукостима

Дефиниција 11. *Многострукост Σ димензије k је подмногострукост од M ако постоји $1-1$ пресликавање $\phi : \Sigma \to M$ и $1-1$ пресликавање $\phi_* : T_p(\Sigma) \to T_{\phi(p)}(M)$*

Тада можемо да интегралимо k-форму ω на M по k-димензионој подмногострукости Σ. Ово радимо повлачењем k-форме на Σ:

$$\int_{\phi(\Sigma)} \omega = \int_\Sigma \phi^* \omega$$

А.5.3 Стоксова теорема

Многострукост са границом дефнишемо на сличан начин ако обичну многострукост. Разлика је у томе да у мапама $\phi : \mathcal{O} \to U$ отворен скуп U представља отворен подскуп од $\boldsymbol{R}^{n+} = \{\{x^1, \ldots, x^n\} | x^n \geq 0\}$. Граница има кодимензију 1 (1 мању димензију) и означава се као ∂M, представља подмногострукост са $x^n = 0$. За следеће тврђење прескачем сувопаран доказ.

Теорема 4 (Стоксова теорема)**.** *Посматрајмо многострукости M са границом ∂M. Ако је димензија мнгострукости n онда за било коју $(n-1)$-форму ω важи следеће:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Хенри Поинкаре (1854 - 1912)

Поинкаре је био Француски математичар, физичар и природни филозоф који је имао монументалан допринос у разним пољима укључујући: математику, теоријску физику, небеску механику, оптику итд...

Поинкаре је рођен у Нансију у Француској и као мали је показао јак афинитет ка математици. Студирао је на Еколу у Паризу, а касније је докторирао на Универзитету Париза.
Поинкареов највећ допринос је био у топологији, грани математике која проучава геометријске особине објеката које су инваријантне под дејством хомеоморфизама. Такође је допринео и методама за решавање диференцијалних једначина и проблему кретања система три тела при гравитационој интеракцији.

У теоријској физици је био пионир у проучавању електромагнетних таласа и имао је огроман допринос у теорији релативности посебно у области Лоренцових трансформација и тумачењу појма истовремености.
Био је јако заинтересован у филозофију и писао је о темама попут природе научног питања, односу математике и физике и улози интуицијеу начном откривању.

Поинкаре је окићен многим признањима за време свог живота, укључујући и примање на Француску академију наука и у Краљевско друштво Лондона. Био је и председник Међународног конгреса математичара 1900.

Умро је 1912. у Паризу са 58 година, иза себе оставивши богат и дубок допринос у разним гранама науке, тиме заувек уклесавши своје име у велелепну историју науке.

Б Увод у Риманову геометрију

Објекат који желимо да уведемо у овом поглављу је управо и најбитнији за нашу дискусију о релативности. Тај објекат је наравно метрика. Иако се поглавље зове ,,Увод у Риманову геометрију” наша метрика ће, као метрика Минковског, имати један минус. Због њега прецизнији назив онога што изучавамо је Лоренцова геометрија. У суштини - небитно, пређимо на ствар.

Б.1 Метрика

У првом поглављу сам увео метрику $\eta_{\mu\nu}$ коју смо дефнисали као објекат који нам даје појам о удаљености објеката у равном простору. На сличан начин ћемо да уведемо нашу општију метрику. Специфично, дефнисаћемо унутрашњи производ на $T_p(M)$ помоћу ње.

Дефиниција 1. *Метрика је* $(0,2)$ *тензорско поље које испуњава следеће услове:*

- *Симетрична је:* $g(X,Y) = g(Y,X)$
- *Није дегенерисана: Ако је за било које* $p \in M$ *и за свако* $Y \in T_p(M)$ $g(X,Y)|_p = 0$ *онда је* $X_p = 0$

У датим координатама можемо да запишемо метрику као:

$$g = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu \otimes dx^\nu$$

Стандарднија нотација је да $g \to ds^2$, а да симбол тензорског производа само избришемо, па имамо $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$. Компоненте метрике $g_{\mu\nu}$ можемо да добијемо тако што метриком делујемо на пар базисних вектора:

$$g_{\mu\nu} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)$$

Метрика је симетична матрица коју погодним избором базиса за T_p можемо дијагонализовати. Недегенерисаност нам гарантује ненулте дијагоналне елементе. Број минуса и плусева у метрици је константан. Број минуса називамо *сигнатура* (или потпис) метрике.

Б.1.1 Риманова многострукост

Многострукост која има метрику са свим позитивним дијагоналним елементима се назива **Риманова многострукост**. Лак пример овакве многострукости јесте $\boldsymbol{R}^n$ са метриком:

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + \ldots + dx^n \otimes dx^n$$

Компоненте ове метрике су дате кронекер делтом $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$.
Уопштено, Римановом метриком можемо да меримо дужину вектора (норму) као:

$$|X| = \sqrt{g(X,X)}$$

Користећи метрику такође можемо да меримо удаљеност између две тачке дуж неке криве на многострукости. Нека су p и q и нека је $\sigma : [a,b] \to M$ параметризована крива са особином $\sigma(a) = p$ и $\sigma(b) = q$. Тада је удаљеност дата као:

$$s = \int_a^b dt \sqrt{g(X,X)|_{\sigma(t)}}$$

Б.1.2 Операције са метриком

Сада ћемо да бацимо око на неке основне употребе метрике.

Метрика као изоморфизам

Прво тврђење које посматрамо јесте да метрика даје природан изоморфизам између вектора и ковектора.
Нека је $X = X^\mu \partial_\mu$. Сада можемо да користимо метрику да спустимо индекс са горњег на доњи, па самим тим и да превратимо вектор у његов дуал који ћемо исто обележавати са X:

$$X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu$$

Како је метрика недегенерисана лако можемо да нађемо њен инверз из релације $g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = \delta^\nu_\mu$. На инверзну метрику можемо да гледамо као симетрично $(2,0)$ тензорско поље које можемо записати као $\hat{g} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu$.

С овим у виду, није тешко закључити да метриком такође можемо да подигнемо индекс и то на следећи начин:

$$X^\mu = g^{\mu\nu} X_\nu$$

У $\boldsymbol{R}^n$ стандардна метрика δ_μ^ν је толико проста да је изоморфизам тривијалан, па самим тим и не видимо разлику између вектора и дуалних вектора у уобичајеним разматрањима.

Запреминска форма

На крају првог поглавља апендиска смо се упознали за интеграцијом на многострукостима за коју нам је била потребна запреминска форма као мера интеграције.

На Римановој многострукости запреминску форму дефинишемо као:

$$v = \sqrt{det g_{\mu\nu}}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

Детерминанту обично краће пишемо као $\sqrt{g} = \sqrt{det g_{\mu\nu}}$. На Лоренцовој многострукости због сигнатуре метрике узимамо да је запреминска форма:

$$v = \sqrt{-g}\, dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$$

Теорема 1. *Запреминска форма је независна од одабира координата.*

Доказ. Посматрајмо други скуп базисних вектора $\tilde{x}^\mu$, па онда имамо:

$$dx^\mu = A^\mu{}_\nu d\tilde{x}^\nu \quad \text{где је} \quad A^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}$$

У новим координатам веџ производ постаје:

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = A^1{}_{\mu_1} \ldots A^n{}_{\mu_n} d\tilde{x}^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge d\tilde{x}^{\mu_n}$$

Десну страну једначине можемо да поредамо у $d\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{x}^n$ уз то да треба да узмемо у обзир знак у зависности од пермутације индекса.

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n &= \sum_\pi sgn(\pi) A^1{}_{\pi(1)} \ldots A^n{}_{\pi(n)} d\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{x}^n \\ &= det(A) d\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{x}^n \end{aligned}$$

Где су π све пермутације $\{1, \ldots, n\}$. Како је $det(A) > 0$ одржана оријентација. Овај фактор је уобичајен Јакобијан који имамо при промени

мере у интегралу.
Компоненте метрике се мењају као:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\nu} \tilde{g}_{\rho\sigma} = (A^{-1})^\rho{}_\mu (A^{-1})^\sigma{}_\nu \tilde{g}_{\rho\sigma}$$

Одакле јој је детерминанта:

$$det\ g_{\mu\nu} = (det\ A^{-1})^2 det\ \tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{det\ \tilde{g}_{\mu\nu}}{(det\ A)^2}$$

Приметимо да се детерминанте A скрате, па заиста можемо да пишемо запреминску форму као:

$$v = \sqrt{|\tilde{g}|}\ d\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{x}^n$$

□

Запреминску форму можемо да запишемо и у другачијем облику:

$$v = \frac{1}{n!} v_{\mu_1 \ldots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_n}$$

Где је тензор $v_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ одређен помоћу потпуно антисиметричног објекта $\epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ где је $\epsilon_{1 \ldots n} = +1$, а остали знакови су одређени парно71у пермутације.

$$v_{\mu_1 \ldots \mu_n} = \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n}$$

Како је $v_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ знамо да $\epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ није баш тензор, него тензор подељен детерминантом. Негде се то зове **тензорска густина**.

Због постојања природне запреминске форме, када имамо метрику на многострукости можемо да интегралимо функције користећи метрику као меру:

$$\int_M fv = \int_M dx^n \sqrt{\pm g} f$$

Хоџов дуал

Следећи објекат који ћемо да посматрамо је мени из непознатих разлога правио доста муке док сам учио општу релативност. Могу да кажем да није од неизоставне важности за даљи напредак текста али опет треба да се прокључуви суштину онога што он говори.

На оријентисаној многострукости M можемо да користимо потпуно антисиметричан тензор $\epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ да бисмо дефинисали пресликавање које p-форме шаље у $(n-p)$-форме у ознаци $(\star\omega) \in \Lambda^{n-p}(M)$ дефинисан као:

$$(\star\omega)_{\mu_1 \ldots \mu_{n-p}} = \frac{1}{p!}\sqrt{|g|}\, \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_{n-p}\nu_1 \ldots \nu_p} \omega^{\nu_1 \ldots \nu_p}$$

Ово пресликавање $\star : \Lambda^p \to \Lambda^{n-p}$ се зове **Хоџов звезда оператор**.

Б.2 Конексија и закривљеност

Већ смо се упознали са неким начинима да узмемо извод на многострукостима. Векторско поље је у суштини извод за сваку дату тачку на многострукости. Упознали смо и Лијев извод где смо морали мало мудрије да приступимо проблему. Тада смо користили ток који настаје при постојању векторског поља да бисмо идентификовали два векторска простора у различитим тачкама многострукости.
Међутим, постоји још један кориснији начин да узимамо изводе објеката на многострукостима и он ће нам бити тема неколико предстојећих поглавља. Тај објекат се зове *коваријантни извод*.

Б.2.1 Коваријантни извод

Дефиниција 2. *Конексија је пресликавање* $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. *Обично записујемо* $\nabla(X,Y)$ *као* $\nabla_X Y$ *и објекат* ∇_X *се зове коваријантни извод. Он задовољава следеће особине за сва векторска поља* X, Y, Z:

- $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- $\nabla_{(fX+gY)} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ *за све функције* f *и* g,
- $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (\nabla_X f)Y$ *где дефинишемо* $\nabla_X f = X(f)$.

Можемо да нађемо вредност коваријантног извода у базису $\{e_\mu\}$ од $\mathfrak{X}(M)$:

$$\nabla_{e_\rho} e_\nu = \Gamma^\mu_{\rho\nu} e_\mu$$

где су $\Gamma^\mu_{\rho\nu}$ компоненте конексије. Обележавамо их исто као Кристофелове симболе из првог поглавља. Касније ћемо да видимо међуоднос ова два објекта. Користићемо нотацију $\nabla_{e_\mu} = \nabla_\mu$. Погледајмо сада облик дејства конексије на опште векторско поље:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_X(Y^\mu e_\mu)\\ &= X(Y^\mu)e_\mu + Y^\mu \nabla_X(e_\mu)\\ &= X^\nu e_\nu(Y^\mu)e_\mu + X^\nu Y^\mu \nabla_\nu e_\mu\\ &= X^\nu \left(e_\nu(Y^\mu) + \Gamma^\mu_{\nu\rho}Y^\rho\right) e_\mu\end{aligned}$$

Видимо да можемо да извучемо читав члан X^ν, па има смисла писати компоненте коваријантног извода као:

$$\nabla_\nu Y = \left(e_\nu(Y^\mu) + \Gamma^\mu_{\nu\rho}Y^\rho\right) e_\mu$$

Конексија није тензор

Да бисмо показали тврђење у наслову овог поглавља треба да погледамо конексију у неком другом базису:

$$\tilde{e}_\nu = A^\mu{}_\nu e_\mu$$

Ако су $\tilde{e}_\nu$ и e_μ координатни базиси онда је:

$$A^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}$$

Из претходне главе знамо како очекујемо да се мењају компоненте $(1,2)$ тензора:

$$\tilde{T}^\mu_{\nu\rho} = (A^{-1})^\mu{}_\tau A^\lambda{}_\nu A^\sigma{}_\rho T^\tau{}_{\lambda\sigma}$$

Погледајмо сада компененте конексије $\Gamma^\mu_{\rho\nu}$:

$$\nabla_{\tilde{e}_\rho}\tilde{e}_\nu = \tilde{\Gamma}^\mu_{\rho\nu}\tilde{e}_\mu$$

Уврштавање релације између два базиса, претходна једначина постаје:

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{\rho\nu}\tilde{e}_\mu = \nabla_{(A^\sigma{}_\rho e_\sigma)}(A^\lambda{}_\nu e_\lambda) = A^\sigma{}_\rho \nabla_{e_\sigma}(A^\lambda{}_\nu e_\lambda) = A^\sigma{}_\rho A^\lambda{}_\nu \Gamma^\tau_{\sigma\lambda} e_\tau + A^\sigma{}_\rho e_\lambda \partial_\sigma A^\lambda{}_\nu$$

Што можемо да запишемо као:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^\mu_{\rho\nu}\tilde{e}_\mu &= (A^\sigma{}_\rho A^\lambda{}_\nu \Gamma^\tau_{\sigma\lambda} + A^\sigma{}_\rho \partial_\sigma A^\tau{}_\nu)e_\tau\\ &= (A^\sigma{}_\rho A^\lambda{}_\nu \Gamma^\tau_{\sigma\lambda} + A^\sigma{}_\rho \partial_\sigma A^\tau{}_\nu)(A^{-1})^\mu{}_\tau \tilde{e}_\mu\end{aligned}$$

Скидањем члана са базисом видимо да се конексија трансформише као:

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{\rho\nu} = (A^{-1})^\mu{}_\tau A^\sigma{}_\rho A^\lambda{}_\nu \Gamma^\tau_{\sigma\lambda} + (A^{-1})^\mu{}_\tau A^\sigma{}_\rho \partial_\sigma A^\tau{}_\nu$$

Први члан јесте оно што бисмо очекивали али други члан је вишак који је карактеристичан за конексију, па самим тим закључујемо да конексија није тензор.

Изводи тензора

Да бисмо стекли осећај, погледајмо прво дејство коваријантног извода на један-форму. Користећи Лајбницово правило добијамо:

$$\nabla_X(\omega(Y)) = (\nabla_X\omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y)$$

Где посматрамо дејство форме на неко векторско поље као њену дефинишућу карактеристику. Узимајући у обзир да је $\omega(Y)$ заправо само функција, добијамо:

$$\nabla_X(\omega(Y)) = X(\omega(Y))$$

На крају имамо:

$$(\nabla_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$$

У координатама имамо:

$$\begin{aligned} X^\mu(\nabla_\mu\omega)_\nu Y^\nu &= X^\mu\partial_\mu(\omega_\nu Y^\nu) - \omega_\nu X^\mu(\partial_\mu Y^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho}Y^\rho) \\ &= X^\mu(\partial_\mu\omega_\rho - \Gamma^\nu_{\mu\rho}\omega_\nu)Y^\rho \end{aligned}$$

Где примећујемо да се чланови за изводима по Y скрате при преласку из прве у другу линију. Читав резултат је линеаран, па можемо да дефинишемо дејство коваријантног извода на форму без ослонца на неко спољасње поље Y. Дакле, важи:

$$(\nabla_\mu\omega)_\rho = \partial_\mu\omega_\rho - \Gamma^\nu_{\mu\rho}\omega_\nu$$

На сличан начин можемо да проширимо овај аргумент на произвољан (p, q) тензор:

$$\begin{aligned} \nabla_\rho T^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} =& \partial_\rho T^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} + \Gamma^{\mu_1}_{\rho\sigma}T^{\sigma\mu_2\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} + \ldots + \Gamma^{\mu_p}_{\rho\sigma}T^{\mu_1\ldots\mu_{p-1}\sigma}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} \\ & - \Gamma^\sigma_{\rho\nu_1}T^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\sigma\nu_2\ldots\nu_q} - \ldots - \Gamma^\sigma_{\rho\nu_q}T^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_{q-1}\sigma} \end{aligned}$$

Где је поступак очигледан, за сваки горњи индекс добијамо $+\Gamma T$ члан, а за сваки доњи $-\Gamma T$ члан.

Б.2.2 Торзија и закривљеност

Иако конексија није тензор, сада ћемо да видимо како можемо да користимо операције које смо до сада научили како бисмо је измасирали у тензор.

Дефиниција 3. **Торзија** *је* $(1,2)$ *тензор* T *који на поља* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *и форму* $\omega \in \Lambda^1(M)$ *делује на следећи начин:*

$$T(\omega; X, Y) = \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])$$

Следећи тензор који дефинишемо је од виталног значаја за рад у закривљеном време-простору.

Дефиниција 4. **Закривљеност** *је* $(1,3)$ *тензор* R *који на поља* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *и форму* $\omega \in \Lambda^1(M)$ *делује на следећи начин:*

$$R(\omega; X, Y, Z) = \omega(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z)$$

Закривљеност још називамо и **Риманов тензор**.

Линеарност

Да бисмо се уверили да су тензори које смо изнад дефнисали заправо тензори, треба да проверимо да су линеарни у својим аргументима. Линеарност је поприлично очигледа за ω. За поља треба мало посла. Докази су праволинијски и захтевају само примену Лајбницовог правила и дефиниције разних објеката.

Теорема 2. *За торзију* T *важи:* $T(\omega; fX, Y) = fT(\omega; X, Y)$.

Доказ. Директним рачуном имамо:

$$\begin{aligned} T(\omega; fX, Y) &= \omega\left(\nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX, Y]\right) \\ &= \omega\left(f\nabla_X Y - f\nabla_Y X \uwave{-Y(f)X} - f[X, Y] \uwave{+Y(f)X}\right) \\ &= fT(\omega; X, Y) \end{aligned}$$

□

Слично тврђење важи и за Риманов тензор.

Теорема 3. *За закривљеност* R *важи:* $R(\omega; fX, Y, Z) = fR(\omega; X, Y, Z)$

Доказ. Користећи дефницију закривљености и онсовна тврђења добијамо:

$$\begin{aligned}
R(\omega; fX, Y, Z) &= \omega(\nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{fX}Z - \nabla_{[fX,Y]}Z) \\
&= \omega\left(f\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - \nabla_{(f[X,Y]-Y(f)X)}Z\right) \\
&= \omega\left(f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - Y(f)\nabla_X Z - \nabla_{f[X,Y]}Z + \nabla_{Y(f)X}Z\right) \\
&= \omega\left(f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{-Y(f)\nabla_X Z} - f\nabla_{[X,Y]}Z \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{+Y(f)\nabla_X Z}\right) \\
&= f\omega(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) \\
&= fR(\omega; X, Y, Z)
\end{aligned}$$

□

Линераност у Y је идентична са X. Линеарност по Z се слично доказује.

Теорема 4. *За закривљеност R важи: $R(\omega; X, Y, fZ) = fR(\omega; X, Y, Z)$*

Доказ. Доказ препуштам читаоцу као лаку вежбу. □

Овим смо се уверили да су и торзија и закривљеност нови тензор на нашој многострукости.

Компоненте

Погледајмо шта добијамо кад наши нови тензори нападну базисне векторе и ковекторе:

$$\begin{aligned}
T^\rho{}_{\mu\nu} &= T(f^\rho; e_\mu, e_\nu) \\
&= f^\rho(\nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu - [e_\mu, e_\nu]) \\
&= f^\rho(\Gamma^\sigma_{\mu\nu}e_\sigma - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}e_\sigma) \\
&= \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} \\
&= \Gamma^\rho_{[\mu\nu]}
\end{aligned}$$

Где последњи члан у другом реду идентички нестаје. Торзија је очигледно антисиметрична у доња два индекса $T^\rho{}_{\mu\nu} = -T^\rho{}_{\nu\mu}$. Конексије које су *симетричне* у доњем индексу тј. за које је $T^\rho{}_{\mu\nu} = 0$ се називају **конексије без торзије**.

Компоненте закривљености су дате као:

$$R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} = R(f^\sigma; e_\rho, e_\mu, e_\nu)$$

Накарадан редослед индекса у тензору се објашњава појавом да су индекси μ и ν асоцирани са коваријантним изводом, па их тако групишемо.

$$\begin{aligned}
R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu} &= f^{\sigma}\left(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}e_{\rho} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}e_{\rho} - \nabla_{[e_{\mu},e_{\nu}]}e_{\rho}\right) \\
&= f^{\sigma}\left(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}e_{\rho} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}e_{\rho}\right) \\
&= f^{\sigma}\left(\nabla_{\mu}(\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}e_{\lambda}) - \nabla_{\nu}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}e_{\lambda})\right) \\
&= f^{\sigma}\left((\partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho})e_{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\tau}_{\mu\lambda}e_{\tau} - (\partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho})e_{\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\tau}_{\nu\lambda}e_{\tau}\right) \\
&= \partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}
\end{aligned}$$

Из претходне једначине видимо да је Риманов тензор антисиметричан у последња два индекса.

Ричијев идентитет

Следеће тврђење је више математичка виртуозност него нека невероватна идеја. Корисно је у једном делу другог поглавља, па не замерам читаоцу ако прескочи овај монструозан израз.

Теорема 5. *Важи Ричијев идентитет:*

$$2\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}Z^{\sigma} = R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu}Z^{\rho} - T^{\rho}{}_{\mu\nu}\nabla_{\rho}Z^{\sigma}$$

Доказ. Погледајмо комутатор коваријантних извода који делују на поље Z:

$$\begin{aligned}
\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}Z^{\sigma} &= \partial_{[\mu}(\nabla_{\nu]}Z^{\sigma}) + \Gamma^{\sigma}_{[\mu|\lambda|}\nabla_{\nu]}Z^{\lambda} - \Gamma^{\rho}_{[\mu\nu]}\nabla_{\rho}Z^{\sigma} \\
&= \partial_{[\mu}\partial_{\nu]}Z^{\sigma} + (\partial_{[\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu]\rho})Z^{\rho} + (\partial_{[\mu}Z^{\rho})\Gamma^{\sigma}_{\nu]\rho} + \Gamma^{\sigma}_{[\mu|\lambda|}\partial_{\nu]}Z^{\lambda} \\
&+ \Gamma^{\sigma}_{[\mu|\lambda|}\Gamma^{\lambda}_{\nu]\rho}Z^{\rho} - \Gamma^{\rho}_{[\mu\nu]}\nabla_{\rho}Z^{\sigma}
\end{aligned}$$

Први члан одумире, док се трећи и четврти скрате, одакле нам следи тврђење. Напомена:

$$R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu]\rho} + 2\Gamma^{\sigma}_{[\mu|\lambda|}\Gamma^{\lambda}_{\nu]\rho}$$

□

Б.2.3 Леви-Чивита конексија

Дискусија о кенксији ∇ до сада нам је била невезана за метрику на многострукости. Ако додамо и метрику у игру добијамо *основну теорему о Римановој геомтрији.*

Теорема 6. *Постоји јединствена конексија без торзије која је сагласна за метриком g у смислу да важи:*

$$\nabla_X g = 0$$

За свако векторско поље X.

Доказ. Покажимо јединственост. Нека постоји таква конексија, уз Лајбницово правило (и имајући у виду да је метрика есенцијално функција) добијамо:

$$X(g(Y,Z)) = \nabla_X g(Y,Z) = (\nabla_X g)(Y,Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Како је $\nabla_X g = 0$, имамо:

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y)$$

Цикличним пермутацијама имамо:

$$\begin{aligned} Y(g(Z,X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(\nabla_Y X, Z) \\ Z(g(X,Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(\nabla_Z Y, X) \end{aligned}$$

Како нема торзије важи и релација:

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

Уз ово имамо:

$$\begin{aligned} X(g(Y,Z)) &= g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_X Z, Y) + g([X,Y],Z) \\ Y(g(Z,X)) &= g(\nabla_Z Y, X) + g(\nabla_Y X, Z) + g([Y,Z],X) \\ Z(g(X,Y)) &= g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Z Y, X) + g([Z,X],Y) \end{aligned}$$

Сабирањем прве две и одузимањем треће добијамо:

$$\begin{aligned} g(\nabla_Y X, Z) = \frac{1}{2}\,[&X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &- g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)) \end{aligned}$$

Ово, уз услов да је метрика недегенерисана, одређује конексију једнозначо. Још треба показати да овако одређена конексија поштује њене дефинишуће карактеристике. Препуштам читаоцу остатак посла. □

Овако дефинисана конексија сагласна са метриком се назива **Леви-Чивита** конексија. Погледајмо како изгледа у компонентама. Узимајући у обзир $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$ имамо:

$$g(\nabla_\nu e_\mu, e_\rho) = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\lambda\rho} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right)$$

Множењем инверзном метриком добијамо:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right)$$

Компоненте Леви-Чивита конексије се зову **Кристофелови симболи**. Њу смо упознали у првом поглављу када смо посматрали геодесике у време-простору.

Б.2.4 Теорема о дивергенцији

Теорема о дивергенцији позната и као Гаусова теорема говори о томе да је интеграл потпуног извода једнак граничном члану.

Лема. *Контракција Кристофеловог симбола се може записати као:*

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \partial_\nu \sqrt{g}$$

Доказ. Директним уврштавањем у једначину Кристофеловог симбола имамо:

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \partial_\nu g_{\mu\rho} = \frac{1}{2}\, tr(g^{-1}\partial_\nu g) = \frac{1}{2} tr(\partial_\nu log(g))$$

Користећи познат индентитет $tr(log(A)) = log(det(A))$ имамо:

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2} tr(\partial_\nu log(g)) = \frac{1}{2}\partial_\nu\; log\; det\; g = \partial_\nu log(det\; g)^{1/2} = \partial_\nu log(\sqrt{det\; g}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\nu \sqrt{g}$$

□

С овим на уму можемо да докажемо теорему по којој је ово поглавље добило име.

Теорема 7 (Гаусова теорема)**.** *Посматрајмо део многострукости M са границом ∂M. Нека је n^μ јединични вектор који показује ка напоље ортогоналан на границу многострукости ∂M. Тада за било које векторско поље X^μ на M важи:*

$$\int_M d^n x\, \sqrt{g}\, \nabla_\mu X^\mu = \int_{\partial M} d^{n-1} x\, \sqrt{\gamma}\, n_\mu X^\mu$$

Где је γ_{ij} повлачење метрике не границу ∂M и $\gamma = det\; \gamma_{ij}$.

Доказ. Уз помоћ претходне леме можемо да измасирамо подинтегралну функцију у првом интегралу на следећи начин:

$$\sqrt{g}\;\nabla_\mu X^\mu = \sqrt{g}(\partial_\mu X^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\nu}X^\nu) = \sqrt{g}\left(\partial_\mu X^\mu + X^\nu \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\nu\,\sqrt{g}\right) = \partial_\mu(\sqrt{g}X^\mu)$$

Тада интеграл постаје:

$$\int_M d^n x\;\sqrt{g}\;\nabla_\mu X^\mu = \int_M d^n x\;\partial_\mu(\sqrt{g}X^\mu)$$

Сада је ово интеграл обичног парцијалног извода, па можемо да применимо регуларну Гаусову теорему. Треба да погледамо шта се догађа на граници. Испоставља се да нам је корисно да одаберемо границу ∂M такву да је она површ константне координате x^n. Надаље метрике које посматрамо су облика:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{ij} & 0 \\ 0 & N^2 \end{pmatrix}$$

Тада добијамо:

$$\int_M d^n x\;\partial_\mu(\sqrt{g}X^\mu) = \int_{\partial M} d^{n-1}x\;\sqrt{N^2\gamma}\;X^n$$

Јединични вектор нормале n^μ је једнак $n^\mu = (0,\ldots,1/N)$, што задовољава $g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 1$. Тада је $n_\mu = g_{\mu\nu}n^\nu = (0,\ldots,N)$, па можемо да запишемо:

$$\int_M d^n x\;\sqrt{g}\;\nabla_\mu X^\mu = \int_{\partial M} d^{n-1}x\;\sqrt{\gamma}\;n_\mu X^\mu$$

Што је тврђење теореме. Како је овај израз коваријантан, важиће уопштено. □

Б.3 Паралелни пренос

Сада ћемо да се упознамо са суштином онога што нам конексија омогућава. Пресликавање које нам спаја векторске просторе (односно тензорске векторске просторе) различитих тачака на многострукости се зове **паралелни пренос**.

Посматрајмо векторско поље X и неку његову интегралну криву C са координатама x^μ:

$$X^\mu\Big|_C = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$$

Кажемо да је тензорско поље T **паралелно пренесено** дуж C ако важи:

$$\nabla_X T = 0$$

Погледајмо као илустрацију паралелан пренос неког другог векторског поља Y:

$$X^\nu(\partial_\nu Y^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} Y^\rho) = 0$$

Гледањем вредности овог израз на интегралној кривој C и узимајући у обзир $Y^\mu = Y^\mu(x(\tau))$:

$$\frac{dY^\mu}{d\tau} + X^\nu \Gamma^\mu_{\nu\rho} Y^\rho = 0$$

Уз дати почетни услов можемо да решимо овај систем спрегнутих диференцијалних једначина да бисмо добили вектор у свакој тачки области која нас занима.
Јасно је да је ово зависно и од конексије и од криве које користимо у овим једначинама.

Б.3.1 Геодезици

Дефиниција 5. *Геодесика је крива тангентна на векторско поље X које поштује:*

$$\nabla_X X = 0$$

Једначина која из овога произилази је:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} \frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Ово је управо једначина коју смо извели у првом поглављу посматрањем дејство честице која се креће у време-простору.

Б.3.2 Нормалне координате

На Римановој многострукости можемо да нађемо такве координате у околини тачке p да важи:

$$g_{\mu\nu}(p) = \delta_{\mu\nu} \tag{Б.1}$$

Исто важи за Лоренцову многострукост уз смену $\delta_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$. Ове координате се називају нормалне. Како извод метрике у нормалним координатама нестаје, оне имају особину и да Кристофелови симболи имају вредност $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}(p) = 0$. Уопштено даље од p важи $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}(p) \neq 0$. Такође приметимо да није испуњено да уопштено нестаје и други извод метрику у нормалним координатама, па самим тим не можемо гарантовати да ће и Риманов тензор да нестане.

Теорема 8. *Постоје координате такве да важи једначина Б.1.*

Доказ. Нека је $\tilde{g}_{\mu\nu}$ метрика у координатама $\tilde{x}$. Потражимо смену координата $x(\tilde{x})$ која ће да испуни једначину.

$$\frac{\partial \tilde{x}^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \tilde{x}^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \tilde{g}_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu}$$

Нека је тачка око које тражимо нормалне координате управо координатни почетак да бисмо смањили патњу. Тада је Тејлоров равој дат као:

$$\tilde{x}^{\rho} = \left.\frac{\partial \tilde{x}^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\right|_{x=0} x^{\mu} + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 \tilde{x}^{\rho}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}\right|_{x=0} x^{\mu} x^{\nu} + \dots$$

Уврштавањем овог резултата у почетну једначину заједно са развојем $\tilde{g}_{\rho\sigma}$ добијамо системе парцијалних диференцијалних једначине из којих можемо да добијемо $\partial \tilde{x} / \partial x$ и $\partial^2 \tilde{x} / \partial x^2$ за које ће бити задовољена координатна трансформација.

$$\left.\frac{\partial \tilde{x}^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\right|_{x=0} \left.\frac{\partial \tilde{x}^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\right|_{x=0} \tilde{g}_{\rho\sigma}(p) = \delta_{\mu\nu}$$

□

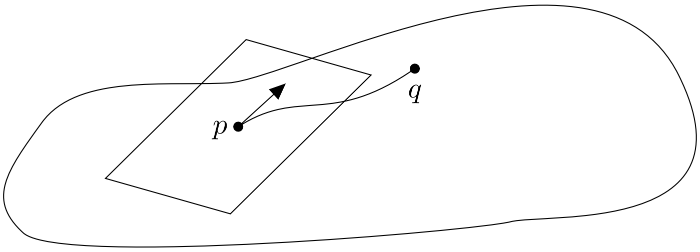
Експоненцијално пресликавање

Постоји директан и леп начин да се конструишу координате Б.1 користећи геодесике.

Шта покушавамо јесте да за дати тангентни вектор $X_p \in T_p(M)$ постоји јединствена афино параметризована геодесика која пролази кроз p чији је тангентни вектор једнак X_p у тој тачки. Онда можемо да обележимо било коју тачку q у околини координатама геодесике које нас воде до q за неко фиксно време.

Погледајмо мало конкретније о чему говорим. Уведимо било какав координатни систем $\tilde{x}^{\mu}$ у околини тачке p. Онда крива коју тражимо испуњава једначину геодесике уз услов:

$$\left.\frac{d\tilde{x}^{\mu}}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \tilde{X}^{\mu}_{p} \quad \text{заједно са} \quad \tilde{x}^{\mu}(\tau = 0) = 0$$



Слика Б.1: Експоненцијално пресликавање: почнемо са тангентним вектором, па одемо у околину.

За ово постоји јединствено решење.
Ово нас наводи да дефинишемо пресликавање:

$$Exp\colon T_p(M) \to M$$

За дато X_p конструишемо геодесику и пратимо је за неку афину дистанцу коју узимамо да је $\tau = 1$. Ово даје тачку $q \in M$. Ово је познато као *експоненцијално пресликавање.*
Није нужно могуће покрити чиатву моногострукост овако дефнисаним пресликавањем. Могуће је да не постоји добро дефинисана геодесика за дати тангентни вектор или да у неку тачку није могуће стићи геодесиком. Овакве ситуације у ОТР изазивају сингулартиети (центар црне рупе) у време-простору.
Нека је базис за $T_p(M)$ дат као $\{e_\mu\}$. Експоненцијално пресликавање нам за вектор $X_p = X^\mu e_\mu$ дефинише тачку q у околини тачке p. Овој тачки ћемо да припишемо координате:

$$x^\mu(q) = X^\mu$$

Ово су нормалне координате.
Ако одаберемо ортонормалан базис $\{e_\mu\}$ геодесике кроз дату тачку ће бити нормалне једна на другу што обезбеђује $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$.

Да бисмо се уверили да први извод метрике нестаје, фиксирајмо тачку q асоцирану са датим вектором X. Ово нам говори да тачка q лежи на дистанци $\tau = 1$ дуж геодесике. Који тангентни вектор ће нас одвести другу дистанцу дуж исте геодесике? Како је једначина геодесике хомогена по τ ако უполовимо дужину X доћи ћемо на пола пута дуж геодесике, тј. у $\tau = 1/2$. Генерално вектор τX ће нас, као што можете претпоставити, одвести не место τ дуж геодесике:

$$Exp\colon \tau X_p \rightarrow x^\mu(\tau) = \tau X^\mu$$

Ово значи да геодесике у тим координатама узимају облик:

$$x^\mu(\tau) = \tau X^\mu$$

Ово треба да нам решава једначину геодесике, али за путање линеарне по τ имамо:

$$\Gamma^\mu_{\rho\nu}(x(\tau))X^\rho X^\nu = 0$$

У тачки пресека геодесика, тј. у тачки $x^\mu(\tau) = 0$ која је управо тачка p, имамо да је $\Gamma^\mu_{(\rho\nu)}(p) = 0$ што за конексију без торзије имплицира $\Gamma^\mu_{\rho\nu}(p) = 0$. Нестајање Кристофелових симбола имплицира да први извод метрике такође нестаје.

Принцип еквиваленције

Нормалне координате играју важну концептуалну улогу у општој релативности. Било који посматрач у тачки p који параметризује своје непосредно окуржење координатама које су настале геодесикама ће имати искуство локално равне метрике.

Ово је математичка представа Ајнштајновог принципа еквиваленције. Он каже да било који посматрач у слободном паду, који врши експерименте локално, неће осетити гравитационо поље. Слободно пада у смислу прати геодецку путању. У овом контексту његове координате још називамо и *локално инерцијалне систем.* Одсуство гравитације је тврђење да је $g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}$.

Б.3.3 Зависност од путање

Ако узмемо тангентни вектор $Z_p \in T_p(M)$ и паралелно га пренесемо дуж неке криве C у тачку r. Ако га опет паралелно пренесемо из p у r дуж неке друге криве C', како се разликују та два вектора у r?

Да бисмо одговорили на ово, конструишимо сваку од ове две криве C и C' из два сегмента генерисана линеарно независним векторским пољима X и Y за које је $[X,Y] = 0$. Такође ћемо узети r које је близу p.

Бирамо нормалне координате $x^\mu = (\tau, \sigma, 0\ldots)$ такве да је $x^\mu(p) = 0$ и да су тангентни вектори дуж њих $X = \partial/\partial\tau$ и $Y = \partial/\partial\sigma$. Тада други углови имају координате $x^\mu(q) = (\delta\tau, 0, 0\ldots)$, $x^\mu(r) = (\delta\tau, \delta\sigma, 0\ldots)$ и $x^\mu(s) =$

$(0, \delta\sigma, 0\ldots)$ где су $\delta\tau$ и $\delta\sigma$ мали помераји.

Прво паралелно пренесемо Z_p дуж X у Z_q. Дуж те криве Z^μ решава:

$$\frac{dZ^\mu}{d\tau} + X^\mu \Gamma^\mu_{\rho\nu} Z^\rho = 0 \tag{Б.2}$$

Тејлоров развој решења је:

$$Z^\mu_q = Z^\mu_p + \left.\frac{dZ^\mu}{d\tau}\right|_{\tau=0} \delta\tau + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2Z^\mu}{d\tau^2}\right|_{\tau=0} \delta\tau^2 + \mathcal{O}(\delta\tau^3) \tag{Б.3}$$

Како у нормалним координатама Кристофелови симболи одумиру имамо да из Б.2 одумире први извод Z^μ. Можемо наћи други извод тако што диференцирамо Б.3:

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2Z^\mu}{d\tau^2}\right|_{\tau=0} &= -\left.\left(X^\nu Z^\rho \frac{d\Gamma^\mu_{\rho\nu}}{d\tau} + \frac{dX^\nu}{d\tau} Z^\rho \Gamma^\mu_{\rho\nu} + X^\nu \frac{dZ^\rho}{d\tau} \Gamma^\mu_{\rho\nu}\right)\right|_p \\ &= -X^\nu Z^\rho \left.\frac{d\Gamma^\mu_{\rho\nu}}{d\tau}\right|_p \\ &= -\left(X^\nu X^\sigma Z^\rho \frac{\partial \Gamma^\mu_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma}\right)_p\end{aligned} \tag{Б.4}$$

Трэћа линија долази из чињенице да је τ параметар дуж интегралне криве настале због X,па је $d/d\tau = X^\sigma \partial_\sigma$. Одавде имамо:

$$Z^\mu_q = Z^\mu_p - \frac{1}{2}\left(X^\nu X^\sigma Z^\rho \frac{\partial \Gamma^\mu_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma}\right)_p \delta\tau^2 + \ldots \tag{Б.5}$$

Сада урадимо паралелан пренос још једном али сада дуж Y да бисмо добили Z^μ_r. Тејлоров развој је:

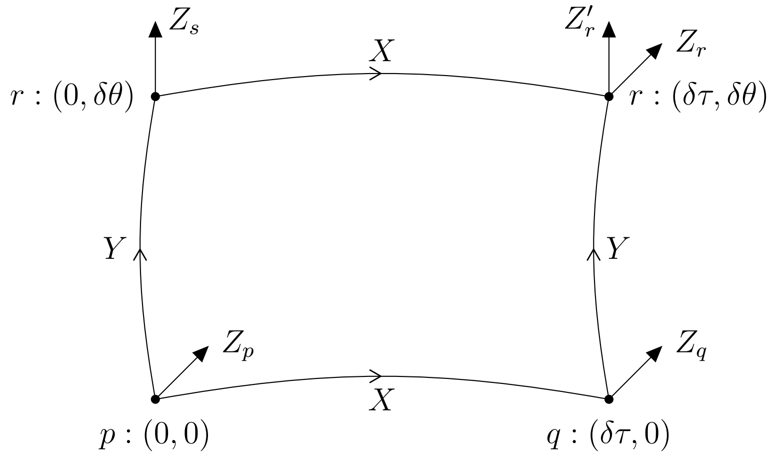
$$Z^\mu_r = Z^\mu_q + \left.\frac{dZ^\mu}{d\sigma}\right|_q \delta\sigma + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2Z^\mu}{d\sigma^2}\right|_q \delta\sigma^2 + \mathcal{O}(\delta\sigma^3) \tag{Б.6}$$

Аналогно једначини Б.2 можемо наћи израза за први извод:

$$\left.\frac{dZ^\mu}{d\sigma}\right|_q = -(Y^\nu Z^\rho \Gamma^\mu_{\rho\nu})_q$$

Имајте у виду да су нормалне координате у тачки p, па не можемо да кажемо да овај члан нестаје. Ако једначину изнад развијемо око p добијамо:

$$(Y^\nu Z^\rho \Gamma^\mu_{\rho\nu})_q = \left(Y^\nu Z^\rho X^\sigma \frac{\partial \Gamma^\mu_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma}\right)_p \delta\tau + \ldots \tag{Б.7}$$



Слика Б.2: Шема паралелног преноса

У теорији бисмо требали да развијемо и чланове Y^ν и Z^ρ али ови чланови до на први ред множе $\Gamma^\mu_{\rho\nu}(p) = 0$, па због тога имају допринос само у наредном реду. Члан другог реда у једначини Б.6 ће садржати нешто облика $d^2Z^\mu/d\sigma^2|_q$ што ће бити израз сличан Б.4. То водећег реда чланови облика $dX^\nu/d\sigma$ и $dZ^\rho/d\sigma$ су одсутни јер опет множе конексију. Према томе имамо:

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2Z^\mu}{d\sigma^2}\right|_q &= -\left(Y^\nu Y^\sigma Z^\rho \frac{\partial\Gamma^\mu_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma}\right)_q + \dots \\ &= -\left(Y^\nu Y^\sigma Z^\rho \frac{\partial\Gamma^\mu_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma}\right)_p + \dots \end{aligned} \tag{Б.8}$$

Где смо заменили тачке p и q јер се разликују само у водећим члановима пропорционалним са $\delta\tau$. Овај пут разлика између Z^μ_r и Z^μ_q има два члана:

$$Z^\mu_r = Z^\mu_q - \left(Y^\nu Z^\rho X^\sigma \frac{\partial\Gamma^\mu_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma}\right)_p \delta\tau\delta\sigma - \frac{1}{2}\left(Y^\nu Y^\sigma Z^\rho \frac{\partial\Gamma^\mu_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma}\right)_p \delta\sigma^2 + \dots$$

Сада можемо да повежемо Z^μ_q и Z^μ_p користећи Б.5:

$$Z^\mu_r = Z^\mu_q - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^\mu_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma}\right)_p [X^\nu X^\sigma Z^\rho \delta\tau^2 + 2Y^\nu Z^\rho X^\sigma \delta\sigma\delta\tau + Y^\nu Y^\sigma Z^\rho \delta\sigma^2]_p + \dots$$

Претпоставимо сада идемо прво по кривој C', до тачке s, па до r. Из претходне једначине лако видимо како нам се одговор мења, само треба да заменимо X и Y самим тим мењајући само средњи члан:

$$Z'^\mu_r = Z^\mu_q - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^\mu_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma}\right)_p [X^\nu X^\sigma Z^\rho \delta\tau^2 + 2X^\nu Z^\rho Y^\sigma \delta\sigma\delta\tau + Y^\nu Y^\sigma Z^\rho \delta\sigma^2]_p + \dots$$

Налазимо да је:

$$\begin{aligned}\Delta Z_r^\mu = Z_r^\mu - Z_r'^\mu &= -\left(\frac{\partial \Gamma^\mu_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu}\right)_p (Y^\nu Z^\rho X^\sigma)_p \delta\sigma\delta\tau + \ldots \\ &= (R^\mu{}_{\rho\sigma\nu} Y^\nu Z^\rho X^\sigma)_p \delta\sigma\delta\tau + \ldots\end{aligned} \tag{Б.9}$$

Где смо при преласку из првог у други ред искористили нарочито прост израз за Риманов тензор у нормалним коодринатама.
Иако је наш рачун одрађен у координатама које смо ми одабрали, коначан резултат је релације међу тензорима, па с тим у вези мора да важи у било ком координатном систему. Ово је стандардна форица у којој кор-и71ењем нормалних координата упростимо рачун, па на крају добијемо нешто тензорско, те самим тим опште валидно.

Нашли смо лепу интерпретацију Римановог тензора - он нам говори о зависности паралелног транспорта од путање. Рачун изнад је уско повезан са појмом **холономије**. Једноставан пример за ово поглавље јесте паралелан пренос вектора на сфери. Смер у ком ће стрелица да показује зависи од путање.

Б.3.4 Особине Римановог тензора

Подсетимо се да су комопоненте Римановог тензора дате као:

$$R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}$$

Одмах видимо да је Риманов тензор антисиметричан у последња два индекса:

$$R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} = -R^\sigma{}_{\rho\nu\mu}$$

Сада ћемо користећи нормалне координате доказати још неке симетрије Римановог тензора.

Теорема 9. *Спуштањем индекса на Римановом тензору* $R_{\sigma\rho\mu\nu} = g_{\sigma\lambda} R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$ *добијамо објекат који поштује следећа тврђења:*

- $R_{\sigma\rho\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\nu\mu}$.
- $R_{\sigma\rho\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\mu\nu}$.
- $R_{\sigma\rho\mu\nu} = R_{\mu\nu\sigma\rho}$.
- $R_{\sigma[\rho\mu\nu]} = 0$

Доказ. Радимо у нормалним координатама где је $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$. Тада Риманов тензор можемо да запишемо као:

$$\begin{aligned} R_{\sigma\rho\mu\nu} &= g_{\sigma\lambda}(\partial_\mu \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu(\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}) - \partial_\nu(\partial_\mu g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\rho})) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho}) \end{aligned} \tag{Б.10}$$

Где при преласку у другу линију користимо чињеницу да је $\partial_\mu g^{\lambda\sigma} = 0$ у нормалним координатама. Прва три тврђења иду лако. За последње читалац мора да масира. □

Теорема 10. *Риманов тензор испуњава Бианкијев*[1] *идентитет:*

$$\nabla_{[\lambda} R_{\sigma\rho]\mu\nu} = 0$$

Доказ. Опет користимо нормалне координате, па нам је претходна једначина дата као $\nabla_\lambda R_{\sigma\rho\mu\nu} = \partial_\lambda R_{\sigma\rho\mu\nu}$ у тачки p. Шемацки Риманов тензор има облик $R = \partial\Gamma + \Gamma\Gamma$, па је $\partial R = \partial^2\Gamma + \Gamma\partial\Gamma$ где последњи члан одумире у нормалним координатама. Одавде имамо само $\partial R = \partial^2\Gamma$ што је:

$$\partial_\lambda R_{\sigma\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\lambda(\partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho})$$

Одавде антисиметризацијом по датим индексима добијамо жељени резултат. □

Б.3.5 Ричијев и Ајнштајнов тензор

Сада ћемо да упознамо још два тензора која добијамо разним играњем са Римановим тензором.
Риманов тензор има ранг $(1,3)$, па конртакцијом можемо да добијемо $(0,2)$ тензор који називамо **Ричијев тензор**:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$$

Од овога можемо да направимо функцију ралне вредности на многострукости коју још зовемо и **Ричијев скалар**:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

---

[1] **Луиђи Бианки** био је познати италијански математичар.

Користећи Бианкијев идентитет можемо да изведемо још једно својство Ричијев тензора:

$$\begin{aligned}&\nabla_\lambda R_{\sigma\rho\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} = 0 \qquad \times\, g^{\mu\lambda} g^{\rho\nu} \\ &\quad\Longrightarrow\ \nabla^\mu R_{\mu\sigma} + \nabla_\sigma R + \nabla^\nu R_{\nu\sigma} = 0\end{aligned}$$

Одакле је:

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R$$

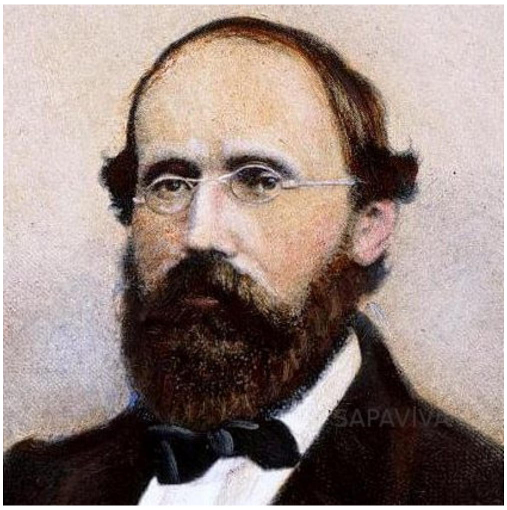
Из ове релације можемо да дефинишемо **Ајнштајнов тензор**:

$$G = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

Који има особину да је коваријантно константан:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$$

Бернард Риман (1826 - 1866)



Георг Фридрих Бернард Риман рођен је у Бреселензу у Немачкој. Био је други од шесторо деце протестанцког министра. Своје основно образовање добио је од оца, касније уз помоћ локалног учитеља. На Ускрс 1840. преселио се код баке у Ხановер да би отишао на Лицеј. Када му је бака умрла након две године преселио се у Линербург и уписао Јоханеум. Био је јако заинтересован за матемаику, па му је директор школе господин Шмалфус позајмљивао књиге о математици из којих би Риман радио и дискутовао са директором.

На пролеће 1846 уписао је факултет у Гетингену где је почео да студира теологију и филологију. Ово је претежно урадио због оца, мада је наставио да похађа предавања из математике. Касније, уз очев благослов, пребацио се на студије математике. У то време математика у Гетингену није била нешто нарочито развијена, па се 1847. пребацио у Берлин. Ту је упознао Јакобија, Штајнера и Дирихлеа који су имали велики утицај на њега.

У Гетингену се с повратком Вебера ситуација поправила, па се 1849. и Риман вратио. Похађао је нека предавања из физике, филозофије и образовања. Ту је 1851. написао своју докторску дисертацију на тему комплексних функција.

Након овога, Риман је постао Веберов асистент када је одржао своју прво предавање на тему парцијалних диференцијалних једначина и њиховим применама у физици. Био је јако стидан, па је у писмима из тог времена откривао потешкоће које је имао док је предавао. Имао је навику да размишља у великим корацима, па му је био проблем да се прилагоди свом аудиторијуму.

Оженио се 3. јуна 1862. за Елиз Кох с којом је добио ћерку. Али у јуну 1862 је добио плеуритис од ког се практично никада није опоравио до краја. Провео је последње године у Италији и у Гетингену. Добио је финансијску подршку да остане у Италији где је посећивао познате матемтичаре као на пример Бетија, ког је већ упознао у Гетингену. У јуну 1866. обавио је последње путовање у језеро Мађоре у Италији где је умро 20. јула 1866.

Ц Коваријантне Максвелове једначине

У овом поглављу ћемо да напишемо Максвелове једначине у облику који је највише компатибилан са нашим до сада наученим математичким апаратом. До сада смо навикли на максвелове једначине у овом облику:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} &= 0 & \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0\mathbf{J} \end{aligned}$$

Ц.1 Електромагнетно поље

Електромагнетно гејџ (енгл. gauge) поље $A_\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$ можемо да гледамо као компоненте један-форме у време-простору $\boldsymbol{R}^4$. Њега записујемо као:

$$A = A_\mu(x)dx^\mu$$

Узимањем спољашњег извода добијамо два форму $F = dA$:

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Где су компоненте $F_{\mu\nu}$ дате као:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Такође ћемо да конструишемо 'дуални' тензор $\mathscr{F}$ на следећи начин:

$$\mathscr{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{Ц.1}$$

Гејџ поље није јединствено. За дату функцију α увек можемо да га транслирамо за гејџ трансформацију:

$$A \to A + d\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha$$

Ово не утиче на јачину поља $F \to F + d(d\alpha) = F$.

Ц.2 Максвелово дејство

У овом поглављу желимо да запишемо дејство које репродукује Максвелове једначине. Испоставља се да дејство које задовољава овај услов има прелеп и једноставан облик:

$$S[A_\mu] = -\frac{1}{4}\int d^4x\ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{Ц.2}$$

Варирајмо ово дејство посматрањем $A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu$ и користимо дефницију $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$:

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{4}\int d^4x\ 2\left(\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu\right)F^{\mu\nu} \\ &= -\int d^4x F^{\mu\nu}\partial_\mu \delta A_\nu \\ &= \int d^4x \left(\partial_\mu F^{\mu\nu}\right)\delta A_\nu \end{aligned}$$

Из овога уз услов $\delta S = 0$ добијамо Максвелове једначине у вакууму:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

Треба нагласити да су ово само две од четири једначине. Остале две $\partial_\mu \mathscr{F}^{\mu\nu} = 0$ добијамо при раду са гејџ потенцијалом A_μ.

Ако имамо неку фиксну струју у простору J^μ можемо да модификујемо дејство:

$$S[A_\mu] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu\right) \tag{Ц.3}$$

Истим притупом добијамо једначине:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\mu$$

Литература

[1] A. Zee. *Einstein Gravity in a Nutshell.* 2013.

[2] A. Barr. *The Einstein Summation Notation.* `http://vucoe.drbriansullivan.com/wp-content/uploads/Einstein-Summation-Notation.pdf` 1991.

[3] S. Carroll. *Spacetime and Geometry.* 2019.

[4] B. Schutz. *A First Course in General Relativity.* 2009.

[5] V. Petkov. *Relativity and the Nature of Spacetime.* 2009.

[6] A. Pressley. *Elementary Differential Geometry.* 2010.

[7] J. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* 2012.

[8] J. Rasmussen, D. Chua. *Metric and Topological Spaces.* `https://dec41.user.srcf.net/notes/IB_E/metric_and_topological_spaces.pdf` 2015.

[9] S. Morris. *Topology Without Tears.* `https://www.topologywithouttears.net/topbook2023.pdf` 2020.

[10] R. Wald. *General Relativity.* 1984.

[11] D. Tong. *General Relativity.* `https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gr/gr.pdf` 2019.

[12] J. M. Overduin, P. S. Wesson. *Kaluza-Klein Gravity.* `https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9805018.pdf` 1998.

[13] I. Antoniadis. *Lecture Notes on Extra Dimensions.* `http://seenet-mtp.info/bsw2018/bs2018/wp-content/uploads/2018/05/LectureNotes-Antoniadis.pdf` 2018.

[14] M. Blau. *Lecture Notes on General Relativity.* `http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf` 2022.

[15] H. Reall. *General Relativity.* `https://www.damtp.cam.ac.uk/user/hsr1000/part3_gr_lectures_2017.pdf` 2017.

[16] A. P. Lightman. *Problem Book in Relativity and Gravitation.* 1979.

[17] J. B. Hartle. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity* . 2002.

[18] M. Spivak. *Calculus on Manifolds.* 1965.

[19] J. A. Ross, D. Chua. *Differential Geometry.* `https://dec41.user.srcf.net/notes/III_M/differential_geometry.pdf` 2016.

[20] B. C. Allanach, J. M. Evans. *Vector Calculus.* `https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/vc/benjonathan.pdf` 2016.

[21] D. Morin. *Introduction to Classical Mechanics.* 2008.

[22] J. Lee. *Introduction to Topological Manifolds.* 2000.

[23] P. Park. *Hodge Theory.* `https://scholar.harvard.edu/files/pspark/files/harvardminorthesis.pdf` 2018.

[24] D. Lovelock, H. Rund. *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles.* 1975.

[25] D. C. Kay. *Tensor Calculus.* 1988.

[26] Dennis. *Calabi-Yau Manifolds for Dummies.* `https://www.mat.univie.ac.at/~westra/calabiyau3.pdf` 2008.

[27] S. Capozziello, M. de Laurentis *Extended Theories of Gravity.* `https://arxiv.org/pdf/1108.6266.pdf` 2011.

[28] S. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity.* `https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9712019.pdf` 1997.

[29] J. P. Bourguignon. *A Mathematician's visit to Kaluza-Klein Theory.* `http://www.seminariomatematico.polito.it/rendiconti/cartaceo/47-3/143.pdf` 1989.

[30] M. Crainic, E. van den Ban. *Analysis on Manifolds.* `https://webspace.science.uu.nl/~ban00101/geoman2017/AS-2017rev.pdf` 2017.

[31] B. Schutz. *Geometrical Methods of Mathematical Physics.* 1980.

[32] G. Gabadadze. *ICTP Lectures on Large Extra Dimensions.* `https://cds.cern.ch/record/636627/files/0308112.pdf` 2002.

[33] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. 1999.

[34] D. Tong. *Electromagnetism.* `https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/em/electro.pdf` 2015.

[35] L. D. Landau, E. M. Lifshitz *The Classical Theory of Fields*. 1980.