Математичка гимназија Београд

МАТУРСКИ РАД
из математике

Математичко моделовање епидемије

Ученица:
Исидора Мајкић
4е

Ментор:
Никола Митриновић

Београд, јун 2021.

САДРЖАЈ:

1. УВОД

Претходних годину и по дана научило нас је да се неке ствари не могу предвидети и испланирати. Показала нам је то на тежи начин, пандемијом новог корона вируса, Ковид 19. Парадоксално, епидемиологија, научна дисциплина која проучава развој болести у некој популацији, служи да би се предвидео даљи ток распростирања болести. Епидемиологија је интердисциплинарна грана науке, тј. обухвата знања медицине, математике и физике, социологије и демографије... Предмет проучавања епидемиологије су и незаразне болести (нпр. дијабетес) и заразне (нпр. Ковид 19). Код незаразних болести прате се узрочници болести, па тако ако неко живи у загађеном окружењу и пуши цигарете има већу могућност да оболи од рака плућа него појединац који живи другачије.

Мој матурски рад представља интердисциплинарни критички осврт на ток пандемије до почетка априла са акценотом на математичку позадину ширења заразе.

1.1 Епидемиологија заразних болести

Заразне болести представљају сва она обољења која се дешавају услед инфекције коју нам је пренео неки други појединац. Ту припадају различити, често благи грипови, вируси од Ковид 19 до ХИВ-а, старе болести попут куге, малих и великих богиња... Овако велики број болести, присутних готово одувек, учиниле су да се епидемиологија константно развија.

Основна класификација заразних болести се врши по броју оболелих у популацији:

1. болести које се јављају понекад и то код малог броја појединаца
2. болести које су константно присутне у малом броју
3. болести које се прошире на већи део популације једног ограниченог подручја, тј. епидемија
4. болести које се прошире на више земаља, до тога да готово све земље имају заражене, тј. пандемија.

Пошто се овај рад првенсвено бави Ковидом 19, а пошто се случајеви заразе нису јавили још само у 7 држава[1] , јасно је зашто има епитет пандемије. Ово је важно, јер је популација велика и може се сматрати да је константна.

1.2 Математика и епидемиологија

Најгрубље речено, две гране математике које имају главну улогу у епидемиологији су статистика и математичко моделовање.

Статистика даје одговоре о ономе што се већ догодило. Анализом података се могу утврдити неки закони који важе, какав утицај имају неке мере, а могу се вршити и

[1] Државе без случаја заразе Википедија на дан 1.3.2020.

ревизије података и утврђивати се њихова истинитост. Управо ће се први део рада бавити анализом пандемије новог корона вируса, у свету и специјално у Србији.

Математичко моделовање је можда највеће оружје епидемиолога. Разлог је јер поред симулација развоја болести, епидемиолози немају начин да „испробају“ шта ће се догодити у популацији због болести. Математички модели морају бити што конкретнији и прецизнији, строго дефинисани. У другом делу раду биће представљено неколико модификација познатих модела.

2. АНАЛИЗА КОВИД 19 ПАНДЕМИЈЕ

Ковид 19 је болест која је узрокована коронавирусом. Први случаји заразе човека појавили су се у Вухану, граду у Кини у децембру 2019. Претпоставља се да је вирус прешао на човека са животиње, али зараза се сада шири са човека на човека. У Србији први случај је потврђен 6.3.2020., а Светска здравствена организација је 11.3.2020. прогласила пандемију. Уследила су масовна затварања у целом свету, у великом броју држава је било вандредно стање, на снази су и у времену писања овог рада разне рестриктивне мере. Овај рад се бави пандемијом и њеним развојем до 5.4.2021. године. Коришћени су доступни подаци из извора [1], а визуелизација и анализа података је рађена у програмском језику Пајтон.

2.1 Ковид 19 у свету

Иако се корона појавила у децембру 2019., у првом тренутку се није очекивало да ће болест добити епитет пандемије. Ипак, вирус је почео да се шири по целом свету. На графику 1 приказан је број новозаражених за дане од 22.1.2020. до 5.4.2021. године.

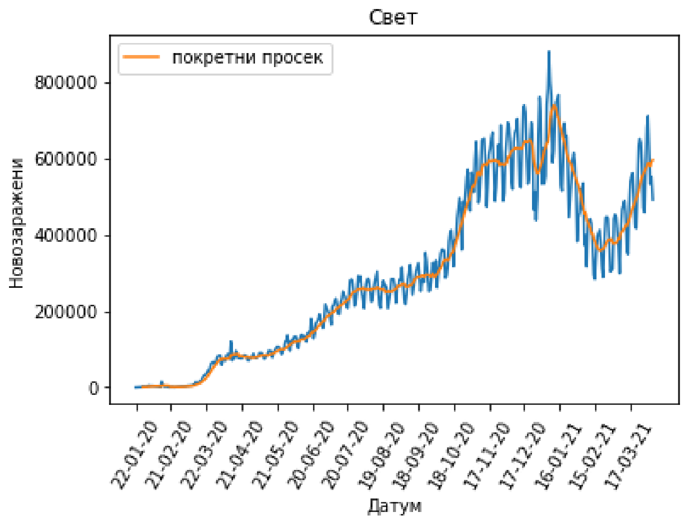


График 1 Број новозаражених у свету

Приказане су вредности за сваки дан, али и покретни просек (енг. *moving average),* у наставку рада МА. МА је важан појам у статистици и дефинише се као аритметичка средина претходних n дана. У овом раду важи n=7.

Оно што може да се примети са графика 1 је да је број новозаражених у свету заправо растао константо све до 2 недеље јануара, када можемо да уочимо да број откривених случајева коначно почиње да опада. Ово је врло занимљиво јер је дочек Нове године представљао критичан догађај, где је могло да дође до доста заражавања. Моја претпоставка је да је тај страх довео до врло строгих рестриктивних мера у целом свету и заправо до слабљења трансмисије. Негативна ствар је што се раст поново јавио крајем фебруара, иако су вакцине почеле да се користе.

У претходном периоду стизале су до нас различите страшне слике пуних болница и празних улица. Државе су се на различите начине бориле са заразом. Покушала сам да прикажем више различитих ситуација. Кина, иако је све почело тамо, се заиста добро снашла са вирусом. Имали су само један талас заражавања и касније само спородачне случајеве. Други пример је Нови Зеланд. Иако су регистровани случајеви заразе, епидемија се није појавила. Тренутна ситуација(април и мај 2021. године) је таква да земље које спроведе вакцинацију успевају да се изборе са вирусом. Велика Британија и Израел су једне од тих земљи и тамо се мере попуштају. Србија је на сличном путу. Ипак, није свуда тако. У Индији брзо расте број заражених и стање је лоше.

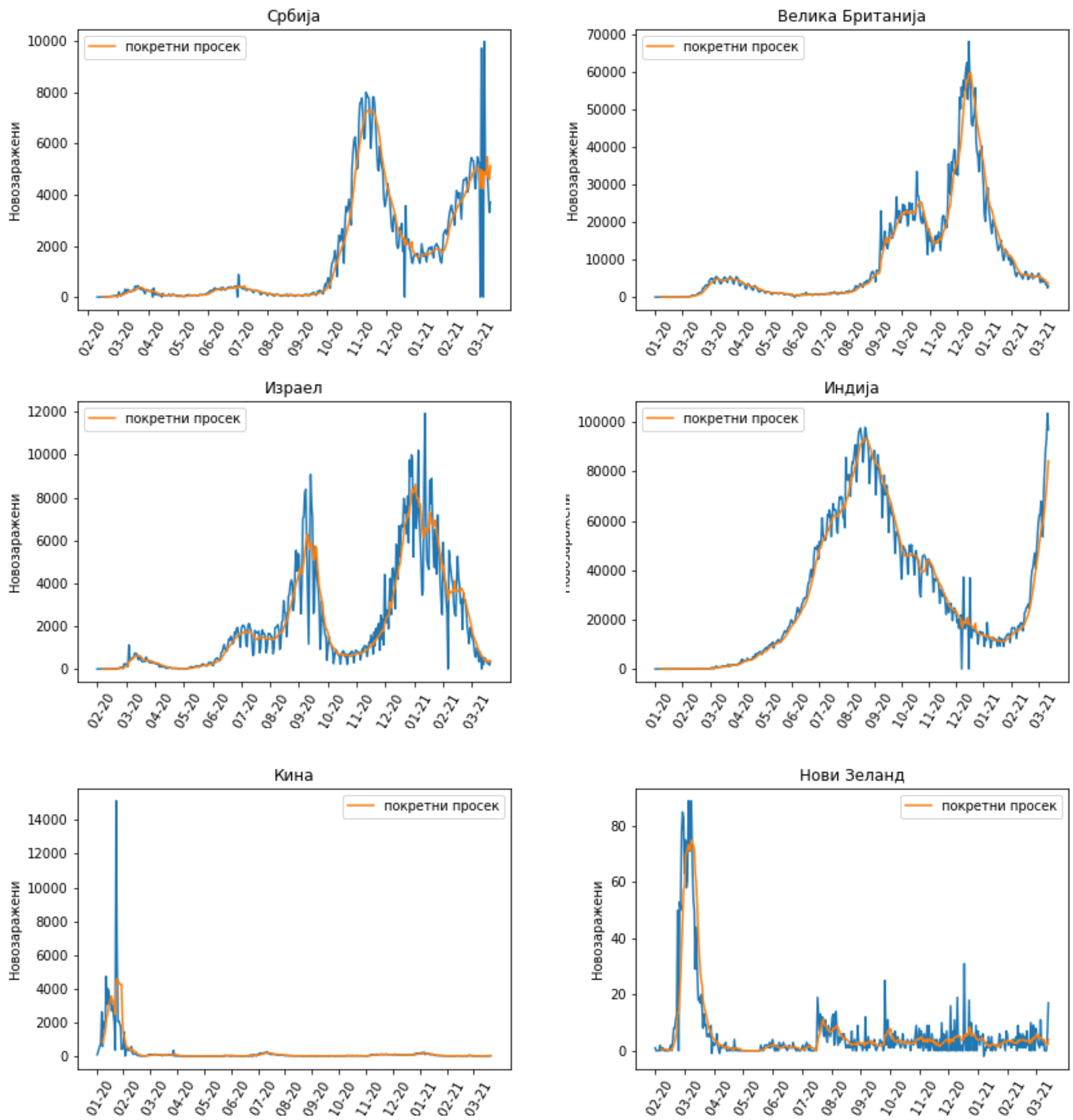


График 2 Број новозаражених по данима

Ова пандемија донела је чудну атмосферу у целој популацији. Поруке јединства и борбе против *невидљивог непријатеља* биле су наратив, али често се појављује и борба између земаља. Ипак одредити која земља је имала слабију реакцију је компликован део.

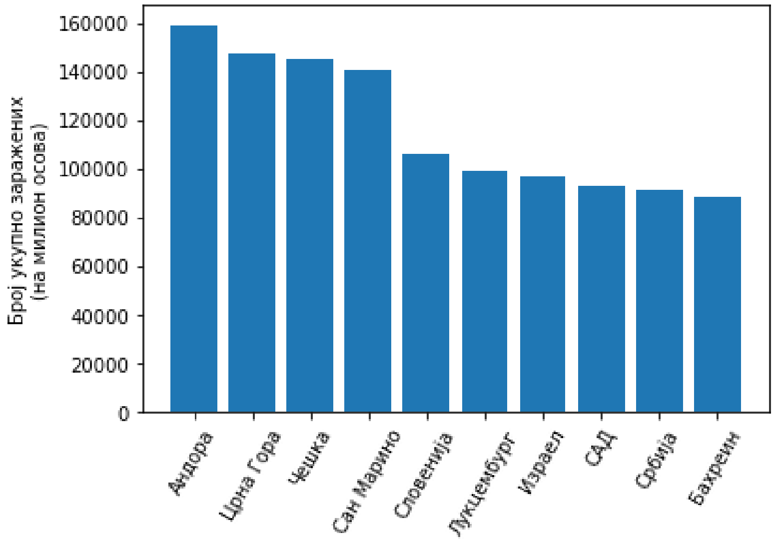


График 3 Топ 10 држава по броју заражених на милион људи

На графику 2 видимо првих 10 држава по броју укупно заражених на милион људи. Можемо уочити да су то мање земње, све осим САД. Претпоставка је да се ово догађа јер у мањим земљама нема одвојених, пре свега већих подручја, која су на неки начин одвојена, већ се становништво креће кроз целу земљу.

Такође, важно је споменути да ови бројеви показују само откривене случајеве заразе. Велики број заражених у Андори управо може да се „оправда“ јер је Андора једна од земљи која је највише тестирала.

Наша земља налази се на деветом месту ове листе. Чињеница је да смо мања земља, али нажалост не можемо да се похвалимо на релативно великом броју тестираних.

Реакције држава и њихових здравствених система можемо упоређивати и по броју смрти које је проузроковао ковид 19. Упоређивала сам податке о проценту смртности када до заразе дође и број смрти на сто хиљада становника. Број смрти на сто хиљада становника је велики у развијенијим земљама које су потпуно биле захваћене вирусом, а проценат смртности је велики у сиромашним земљама, иако нису нужно имале велики број заражених [2].

2.2 Бенфордов закон

У кризним ситуацијама попут епидемије једна од јако важних ствари је транспарентост и тачност података. Ипак, у претходних годину дана и у Србији, али и у свету често се то преиспитивало.

Бенфордов закон или закон прве цифре је тврђење из вероватноће и статистике које каже да када пратимо расподелу прве цифре у многим списковима она није равномерна, већ специфичну, логаритамска расподела.[3]

Закон је дефинисао Френк Бенфорд[2] у 20. веку, али изречен је раније крајем 19. века. Важно је да се показало да овај закон важи за различите податке, од рачуна за струју, преко броја произведених тенкова у Немачкој током Другог светског рата до цифри у математичким константи, као и за процесе који се одвијају по степеном закону. Постоји основана сумња да би овај закон могао да важи и за епидемије.

Математички гледано Бенфордов закон гласи да уколико бројеве изражавамо у основи b где важи $b \geq 2$, онда се водећа цифра d ($d \in \{1, \ldots, b-1\}$) појављује са вероватноћом

$$\boldsymbol{P(d) = \log_b(d+1) - \log_b d = \log_b\left(\frac{d+1}{d}\right) = \log_b\left(1 + \frac{1}{d}\right).}$$

Конкретно за декадни систем, прва цифра, тј. њено појављивање требала би да прати расподелу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.301	0.176	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.046

Табела 1. Бенфордов закон за декадни систем

Ја сам се бавила учесталошћу прве цифре свакодневног новог броја заражених у 7 земљи, а додала сам и цео свет. Покушала сам да одабир земљи буде шаренолик и свеобухватан (Србија, Немачка, Велика Британија, Русија, Израел, САД и Бразил).

Први корак у анализи ових података је био да са хистограма (график 4) уочим и претпоставим које државе прате Бенфордов закон. Моја претпоставка је била да Немачка, Велика Британија, па и Израел донекле заиста прате расподелу која је дефинисана Бенфордовим законом. Србија, Бразил и Сједињене Америчке Државе немају толики пад као што је очекивано између вероватноће да се појави 1 и 2 на месту прве цифре, али графици који одговарају овим земљама донекле личе. Ипак, график за Русију заиста одударa од осталих, поготово пошто готово да нема дана где је број новозарежних почињао цифром 3. Ово би могло да указује да су постојале неке малверзације са подацима, али не може се тврдити засигурно да је расподела дефинисана Бенфордовим законима она очекивана. Посебно занимљиво је да подаци за цео свет не одговарају овој расподели, већ да осим појављивања 2 и 9 на месту прве цифре, готово да је униформна расподела. То ме је навело да проверим какво је стање за укупан број заражених и груба претпоставка је да та расподела прати Бенфордов закон.

Следећи корак верификације је био χ^2 тест (енг. The Chi-square goodness of fit test или Pearson's chi-squared test [3][4]). Предложио га је Карл Пирсон[3] 1900. године. Ово је тест који нам говори да ли неки сет података има неку теоријски очекивану расподелу. Овај тест формира параметар p преко квадрата одступања од очекиване вредности и управо нам тај параметар говори да ли нашим подацима одговара расподела коју смо одабрали. Конкретно, уколико је $p>0.05$, сматра се да подаци не одступају значајно од претпостављене расподеле, у супротном, сматра се да расподела није одговарајућа. Овај тест је покренут преко STATA статистичког софтвера за четири државе (Немачку, Велику Британију, Русију и Србију).

[2] Френк Бенфорд, амерички физичар и електроинжењер

[3] Карл Пирсон, енглески математичар, један од оснивача математичке статистике

Испоставило се да је тест прошла само Немачка и да претпоставка да и подаци из Велике Британије одговарају Бенфордовом закону није тачна.

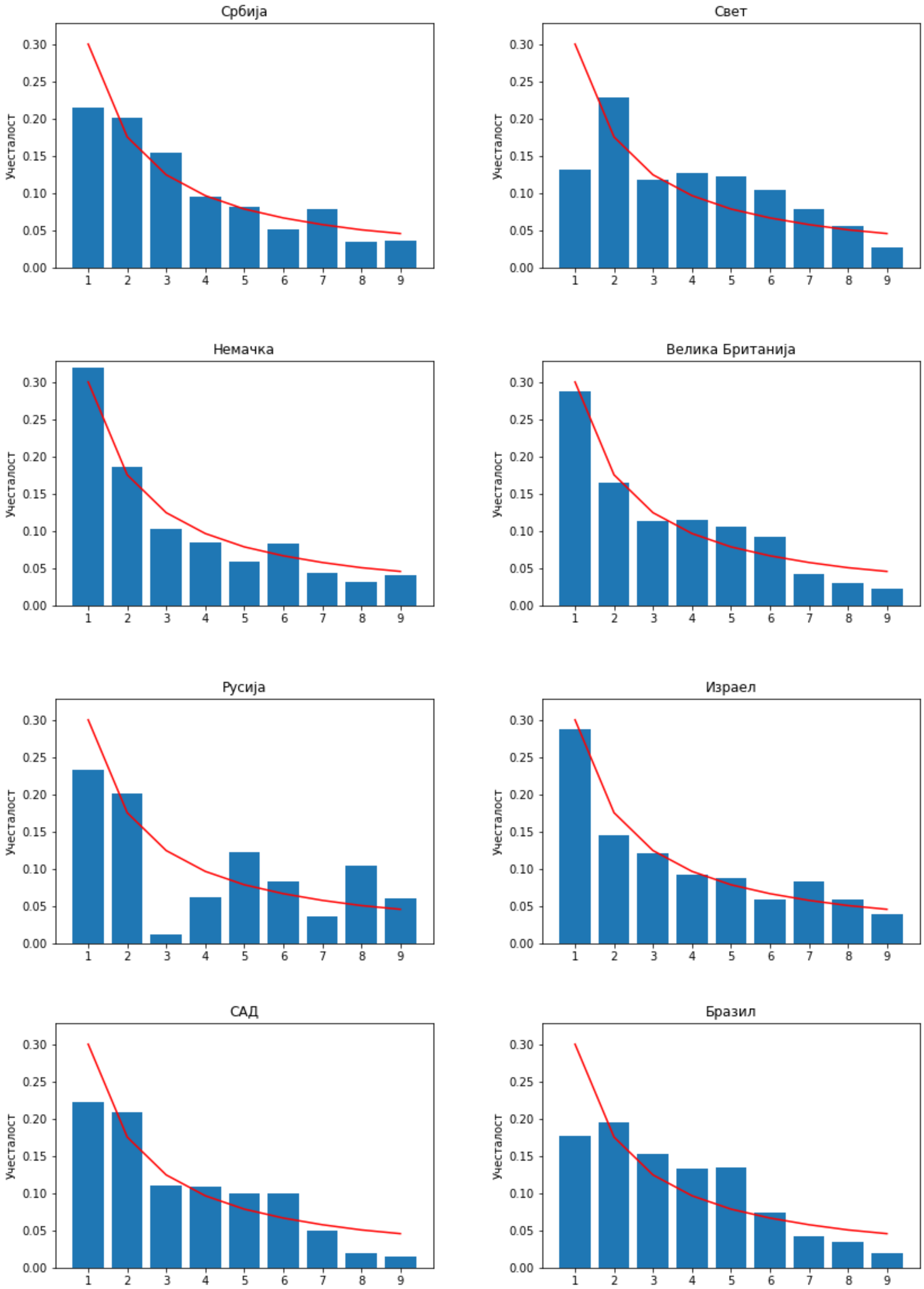


График 4 Учесталост прве цифре

Бенфордов закон се може проширити и на остале цифре у запису. На пример, вероватноћа да се цифра један налази на другом месту једнака је

$\log_{10}\left(1+\frac{1}{11}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{12}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{91}\right).$

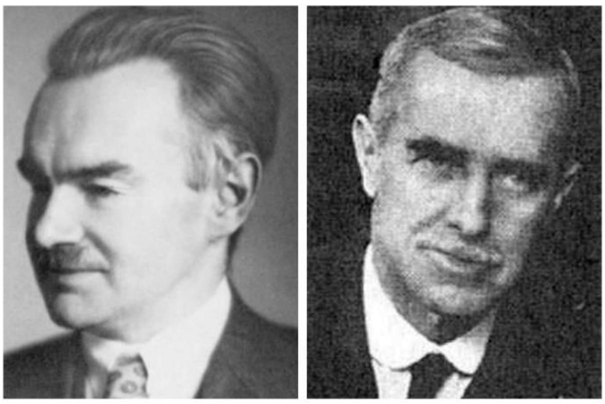
То заправо значи да појављивање последње цифре већ и у двоцифреним бројевима, троцифреним још више, тежи да одговара униформној расподели. То нас је навело да одрадимо χ^2 тест за горе наведене четири државе и да проверимо да ли је расподела последње цифре униформна. Испоставило се да су овај тест прошле Велика Британија и Србија, а да Немачка и Русија нису.

3. МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ ЕПИДЕМИОЛОГИЈЕ

Свака епидемија носи пуно непознаница за епидемиологе, поготово при појави нове болести. Како се болест преноси, колико је заразна, оставља ли последице, колика је смртност... Науци остаје само да учи из прошлости или да покуша да симулира епидемију, али никако у реалности. Зато се користе *математички модели*. Моделовање је начин решавања реалних ситуација користећи формални језик математике. Наравно, математички модел никада не може потпуно описати реалност и свесно се врше неке апроксимације до тога да се неки утицаји потпуно занемарују. Математички модел је бољи онда када реалније приказује систем који симулира.

3.1 Историјски преглед

Епидемије се у историји јављају још у петом веку пре нове ере, када се у широм подручју Атине јавила болест слична куги. Куга, велике и мале богиње, колера и многе друге болести су кроз историју јављале пуно пута и односиле су пуно живота. Највећа победа епидемиологије и уопштено науке је развој вакцина које су једини начин да овај тип болести нестане. Математички модели су мале победе које помажу да се медицинари организују и тако спасе животе. У 18. веку је Данијел Бернули[4] први математичким путем објаснио значај вакцина при сузбијању болести, прецизније малих богиње. Вилијам Кермак[5] и Андерсон Мекендрик[6] су 1927. изложили први математички модел, Кермак-Мекендриков модел, познатији као SIR модел.



Слика 1. Кермак и Мекендрик
Научници који су поставили први модел ширења болести.

[4] Данијел Бернули, швајцарски лекар, физичар и математичар

[5] Вилијам Кермак, шкотски биохемичар

[6] Андерсон Мекендрик, шкотски војни лекар и епидемиолог

3.2 Експоненцијални раст

Ширење болести се дешава по правилима која важе и иначе у природи. Један од главних правила је *закон о дејству масе*. Закон о дејству масе је један од основних правила хемије и каже да је брзина хемијске реакције сразмерна концентрацији реактаната. Ако за популацију кажемо да је хомогена, односно да сви појединци имају једнаку шансу да ступе у контакт са неким другим појединцима, можемо применити закон о дејству масе, што би значило да је брзина ширења заразе сразмерна броју оболелих. То би значило да након неког мало временског периода долази до драстичног раста броја заражених. У математици када помислимо да долази до драстичног раста, ми мислимо на експоненцијалну функцију.

Прво ћу представити најједноставнији модел где су људи само здрави или болесни и притом остају болесни „заувек“.

Посматрајмо популацију од 1000 појединаца и нека је једна особа заражена у популацији. Са I(t) означимо број заражених у неком тренутку t, па је I(0)=1. Она се зове још и нулти пацијент. Појединци у једној генерацији имају исти број преноса у којима је зараза стигла од нултог пацијента до њих. Први важни појам за моделовање је просечан *генерацијски интервал* T и представља број дана између тренутка кад једна особа постане заразна до тренутка кад зарази другу особу. Често је готово једнака просечном броју дана инкубације, што за ковид 19 узима вредности од 4 до 7,5 дана. Друга важна величина представља *репродукциони број* R, тј. број појединаца која просечно једна особа зарази. Овај број варира у току болести, једноставно зависи од тога колика је вероватноћа да заражена особа дође у контакт са здравом особом. Узима се да је за ковид 19 између 1,4 и 6,5. Ради поједностављања узмимо да су ове вредности констaвнтне и једнаке T=4, R=2. Ово значи да ће I(t + T)= R* I(t).

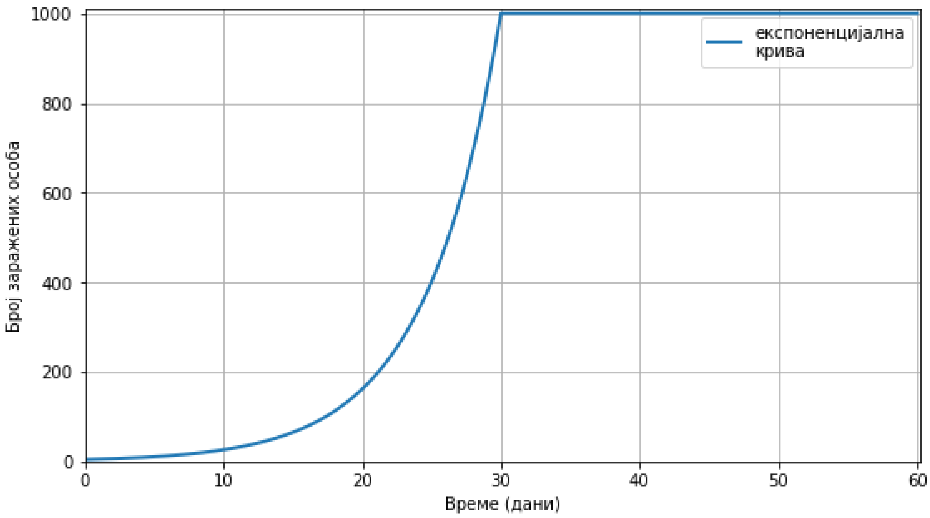


График 5. Експоненцијални раст броја заражених за r=1,2

Тривијално је показати методом математичке индукције да важи $\mathrm{I}(t) = \mathrm{I}(i\mathrm{T}) = \mathrm{R}^{i} * \mathrm{I}(0)$. Модификујмо израз од горе $\mathrm{I}(t) = \mathrm{R}^{\frac{t}{T}} * \mathrm{I}(0) = \left(\sqrt[T]{R}\right)^{t} * I\ (0)$, а пошто смо узели да су и T и R константе, уведимо смену $r = \sqrt[T]{R}$ из чега следи да је $\mathrm{I}(t) = r^{t} * I\ (0)$.

Јасно је да онда раст броја заражених у овом моделу одговара експоненцијалном расту.

Временски период	Број заражених
[0,T)	I(0)
[T, 2T)	I(0 + T) = I(T)= R*I(0)
[2T, 3T)	I(T + T) = I(2T)= R* I(T)= R* R* I(0)=R^2 *I(0)

Табела 2. Број заражених у зависности од времена

Ипак, експоненцијални раст не описује ширење заразе. Разлог је то што када има пуно људи заражено, вероватноћа да наиђемо и остваримо контакт са незараженом особом опада.

То је проверено и са реалним кумулативним бројем заражених и та крива није експоненцијална. Да ли је нека функција експоненцијална проверамо тако што је прикажемо на лог-лог скали и проверавамо да ли тада „постаје“ линеарна функција. Ово тврђење је једноставно показати.

Ако је $f(x) = a^x + b$ онда је $\log(f(x)) = \log a \cdot x + \log b = a' \cdot x + b'$ што одговара линеапној функцији.

3.3 Логистички раст

Порастом броја заражених опада вероватноћа да болесна особа ступи у контакт са здравим особама, јер је здравих особа све мање и мање и то доводи до тога да се репродукциони број смањује. Појава да повећање заражених заправо и смањује број нових заражавања назива се *утицај колективног имунитета*. Колективни имунитет је најважнији за прекид епидемије, али је најгори сценарио да се до њега дође због великог броја људи који су прележели неку болест. Циљ је достићи га вакцином, али о томе касније.

Логистичка регресија представља један од честих основа у математичким моделима са ограниченим ресурсима, где после једног преломног тренутка долази до успоравања раста. Први ју је користио Пјер Франсоа Верхулст[7] 1839.

Идеја логистичке регресије је да се фактор преноса заразе мења кроз време у зависности колики удео становништва више није подложан зарази. Тада се сматра да важи

$$\mathrm{I}(t) = \mathrm{R} * \mathrm{I}(\mathrm{t} - \mathrm{T}) = (R_0 - R_0 \frac{I(t-T)}{N}) * \mathrm{I}(\mathrm{t} - \mathrm{T}),$$

где је R_0 почетни репродукциони број. Тако формирана крива одговара S криви која се огледа у томе да у односу на неку преломну тачку изгледа симетрично. На графику 6, тачка прелома одговара 30. подеоку на временској оси.

[7] Пјер Франсоа Верхулст, белгијски математичар 19. века. Појам логистичког раста увео је у раду „Верхулст и логистичка једначина“ (енг. Verhulst and the logistic equation).

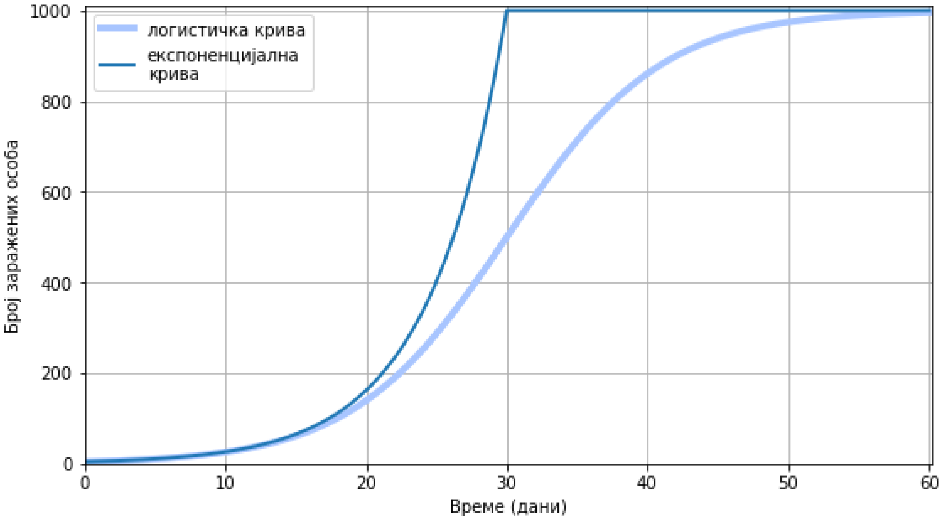


График 6 Раст броја заражених за r=1,2 и tp=30

За логистичку криву важи да на почетку личи на експоненцијалну криву, али онда успорава.

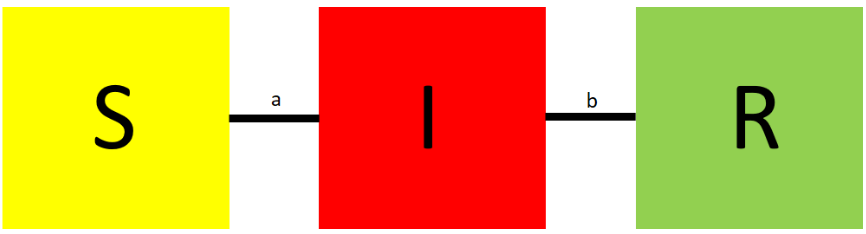
3.4 SIR модел

SIR модел је можда и најпопуларнији модел који је дефинисан системом диференцијалних једначина.

Идеја овог модела је да целу популацију поделимо на 3 групе:

1. S је група здравих, подложних људи (**S**usceptible)
2. I је група инфицираних људи (**I**nfected)
3. R је група опорављених, односно оних људи који су имуни на болест (**R**ecovered)

Тада је јасно да S+I+R=N, где је N цела популација и сматра се да се исти број роди и умре у једној јединици времена(дан). Такође, важно је напоменути да појединац не може постати имун ако се прво не зарази. Због тога се често SIR модел визеулизује као на шеми испод.



Шема 1 Приказ SIR модела

Претпоставка модела је да је популација хомогена, тј. да се сви појединци понашају исто и да се рестриктивне мере не мењају.

Параметар a једнак је количнику броја људи са којима је просечно један појединац био у контакту и укупном броју појединаца у популацији. Да би дошло до заражавања једна здрава особа треба да дође у контакт са болесном особом. Зато се у једној јединици времена зарази $aI(t)\frac{S(t)}{N}$, што је заправо само $aI(t)$ кориговано колективним имунитетом. То значи да се број здравих смањио, а број болесних повећао за ту промену. Формално записано

$$\frac{dS}{dt} = -aI(t)\frac{S(t)}{N}$$

$$\frac{dI}{dt} = aI(t)\frac{S(t)}{N}$$

Параметар b представља проценат оздрављења и једнак је реципрочној вредности трајања болести. Ако болест траје n дана, просечно ће удео 1/n болесних људи оздравити. То значи да ће се у једној јединици времена $b \cdot I(t)$ људи оздравити, односно да ће се број болесних смањити за ту промену, а број опорављених повећати. Математички записано

$$\frac{dI}{dt} = -b \cdot I(t)$$

$$\frac{dR}{dt} = b \cdot I(t)$$

Када ујединимо ове две целине добијамо систем који важи у SIR моделу.

$$\frac{dS}{dt} = -aI(t)\frac{S(t)}{N}$$

$$\frac{dI}{dt} = aI(t)\frac{S(t)}{N} - b \cdot I(t)$$

$$\frac{dR}{dt} = b \cdot I(t)$$

Из система можемо уочити да је фунцкија S опадајућа на целом интервалу и да је важи $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$. Такође, функција R је растућа. Функција која описује број активних случајева ипак нема константан знак, тј. број активних случајева прво расте, али и мора опадати од једног тренутка. Сви основни модели са константним параметрима, попут ових којим се бави овај рад, епидемију представљају само као један талас. То би значило да су мере и понашање свих појединаца исто кроз време и да долази прво до пораста броја заражених, а онда до опадања. У стварности то ипак није тако.

Стручњаци и политичари мењају рестрикције које важе и то доводи до тога да се један талас епидемије заврши раније него што би било потребно да се не чини ништа. Са друге стране, претерано опуштање доводи до стварања нових таласа болести.

Параметар b можемо сматрати сталним за сваку болест, поготово код болести као Ковид јер не постоји лек који ће болест прекинути, већ се сматра да ћемо бити болесни просечно 14 дана, али на параметар a се може утицати. Ако се уводе мере забране кретања, затварање кафића и ресторана, школа, долази до смањивања броја контаката, па се и a смањује.

Ипак, одређивање параметра a је компликовано и није на нивоу овог рада, тако да је сматрано да и a и b имају константне вредности.

Следећи корак је свакако праћење динамике епидемије у моделу строго дефинисаном као SIR модел. То се заправо своди на решавање система диференцијалних једначина, односно на проблем који се може решавати нумеричком симулацијом, преко уграђене функције odeint из Пајтон библиотеке scipy.integrate. Зато сам написала код за овај модел.

```
def SIR(y, t, N, a, b):
    S, I, R = y
    Sp = -a * S * I / N
    Ip = a * S * I / N - b* I
    Rp = b * I
    return (Sp, Ip, Rp)
ret = odeint(SIR, y0, t, args=(N, a, b))
S, I, R = ret.T
```

Параметре a и b можемо ујединити у један параметар r (репродуктивни број) и то као количник $\frac{a}{b}$. Ово је важно јер нам заправо овај параметар говори о томе како ће се болест даље ширити, тј. колико ће један просечан заражен појединац заразити других људи.

Уколико је r>1, то значи да се болест шири, да ће се сваким даном број активних случајева повећавати, тј. да влада епидемија.

Уколико је r=1, сматра се да ће болест бити присутна у неком сталном броју увек, те се каже да влада ендемија.

Уколико је r<1, болест се смирује и број заражених се смањује. Да би дошло до краја заразе, потребно је да се дође до колективног метода. Сматра се да је дошло до њега када је имун удео становништва једнак 1-$\frac{1}{r}$.

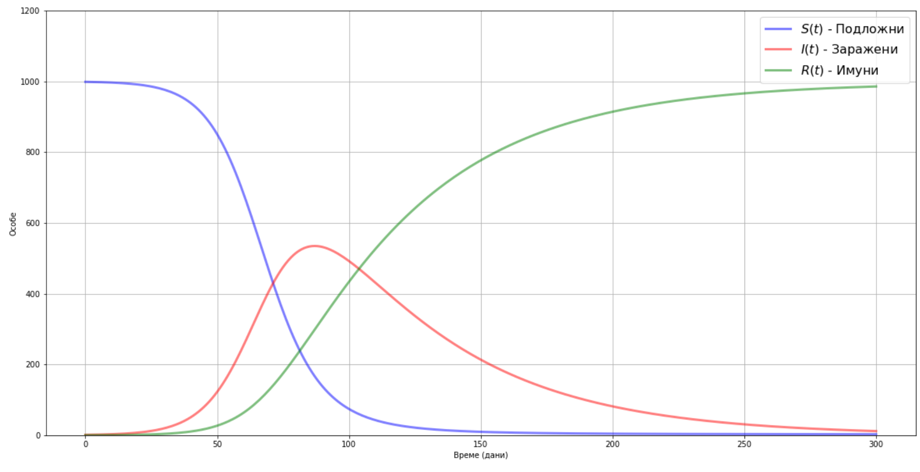


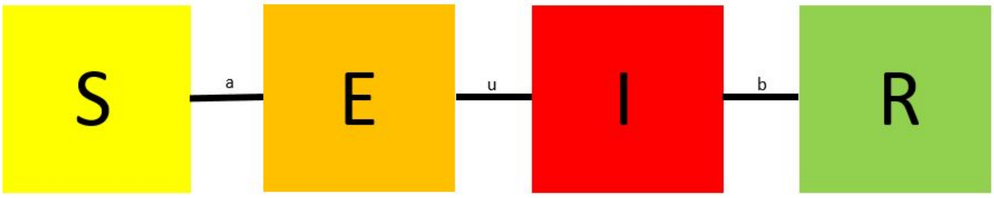
График 7 Динамика SIR модела

3.5 SEIR модел

SIR модел је дефинисан тако да сваки контакт са зараженом особом резултира да здрава особа постаје заражена. Ипак, корона вирус је показала да то не важи. Зато се у SEIR модел додаје нова група, Е или изложени (**E**xposed).

Изложени су сви они људи који су имали контакт са зараженим, али још увек нису сигурно инфицирани, већ им прво претходи период инкубације. Ова верзија модела није конзистентна у науци, па се негде појављује да изложени само „чекају" тренутак да постану инфицирани, а негде се уводи могућност да не долази до заражавања сваким контактом. У овом раду је одабрана друга дефиниција модела. Сматра се да ће 1-z процената изложених постати инфицирано после n_2 дана. Ако не постоје никакве мере заштите у виду маски, рукавица, смањеног директног контакта, параметар z=0, односно сви који ступе у контакт са зараженима ће постати заражени. Тада се параметар дефинише параметар $u = (1 - z) * \frac{1}{n2}$.

У литератури се управо и сматра да овај модел више одговара реалности коју је проузроковао корона вирус.



Шема 2 Приказ SEIR модела

Математички формално, SEIR модел се дефинише као систем диференцијалних једначина:

$$\frac{dS}{dt} = -aI(t)\frac{S(t)}{N}$$

$$\frac{dE}{dt} = aI(t)\frac{S(t)}{N} - u \cdot E(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = u \cdot E(t) - b \cdot I(t)$$

$$\frac{dR}{dt} = b \cdot I(t)$$

График 8 представља приказ динамике развоја болести дефинисан SEIR моделом.

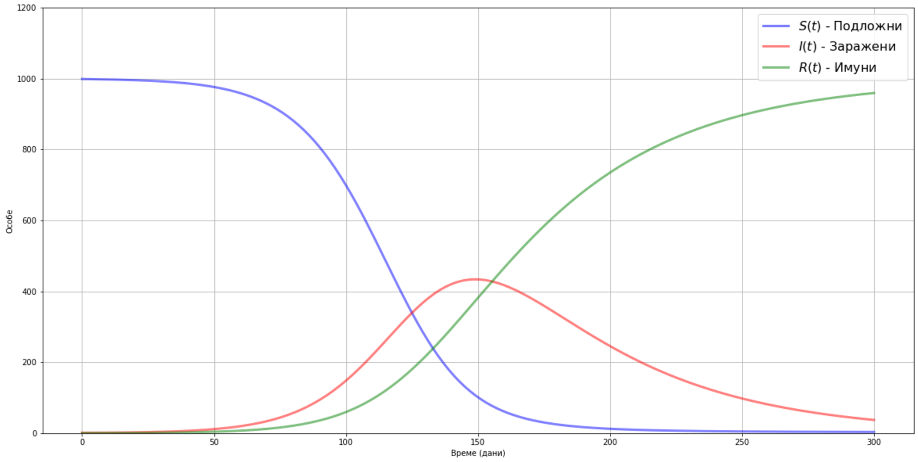


График 8 Динамика SEIR модела

Поново је формиран код који одговара овом моделу да би се лакше решио систем диференцијалних једначина.

```
def SEIR(y, t, N, a, b, u):
    S, E, I, R = y
    Sp = -a * S * I / N
    Ep = a * S * I / N - u * E
    Ip = u * E - b* I
    Rp = b * I
    return (Sp, Ep, Ip, Rp)
ret = odeint(SEIR, y0, t, args=(N, a, b, u))
S, E, I, R = ret.T
```

3.6 SEIRV модел

Оба поменута модела су и даље јако груба, али је заправо поента моделовања да их усавршавамо. Једна од финеса која фали је то што појавом вакцине можемо директно добити имуне становнике. Управо је вакцина једини начин да не долази до масовног заражавања што свакако доводи до фаталних исхода.

Верзија модела који је представљен у овом моделу је да се сваког дана вакцинисао неки просечан број људи. У реалности, човек постаје имун тек после друге дозе, тако да ћемо вакцинисаног сматрати само оне вакцинисане другом дозом.

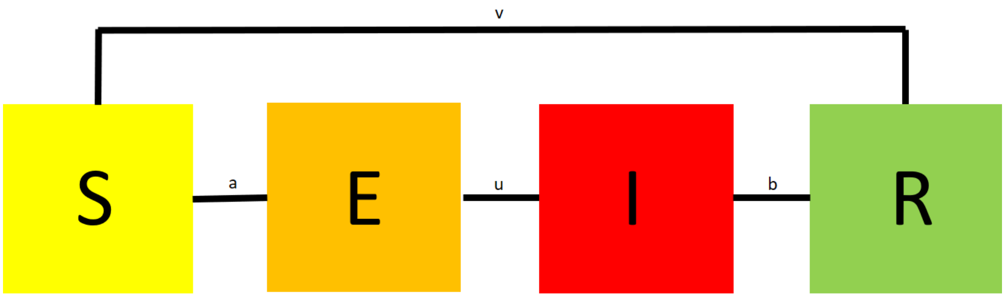
Систем је врло мало модификован од прошлог, само за вредност v која говори колико људи је вакцинисано у јединици времена. Тих v људи више није подложно болести, тј. група S се смањује за v појединаца, а група R се повећава.

$$\frac{dS}{dt} = -aI(t)\frac{S(t)}{N} - v$$

$$\frac{dE}{dt} = aI(t)\frac{S(t)}{N} - u \cdot E(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = u \cdot E(t) - b \cdot I(t)$$

$$\frac{dR}{dt} = b \cdot I(t) + v$$



Шема 3 Приказ SEIRV модела

Код који одговара овом моделу:

```
def SEIRV(y, t, N, a, b, u,v):
    S, E, I, R = y
    Sp = -a * S * I / N -v
    Ep = a * S * I / N - u * E
    Ip = u * E - b* I
    Rp = b * I+v
    return (Sp, Ep, Ip, Rp)
ret = odeint(SEIRV, y0, t, args=(N, a, b, u,v))
S, E, I, R = ret.T
```

Један од додатака који сам увела у овај модел, а понајвише због короне је да се број вакцинисаних појави тек после неког дана (на графику 9 после 100. дана), односно да прво нема вакцинисаних уопште.

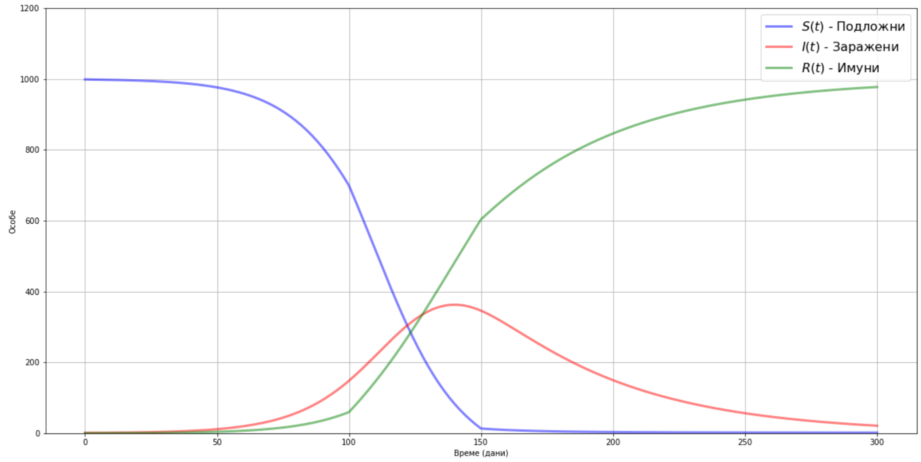


График 9 Динамика SEIRV модела

Намеће се питање разлика ова три модела. На графику испод приказане су функције активних случајева у току времена које пројектују сва три модела.

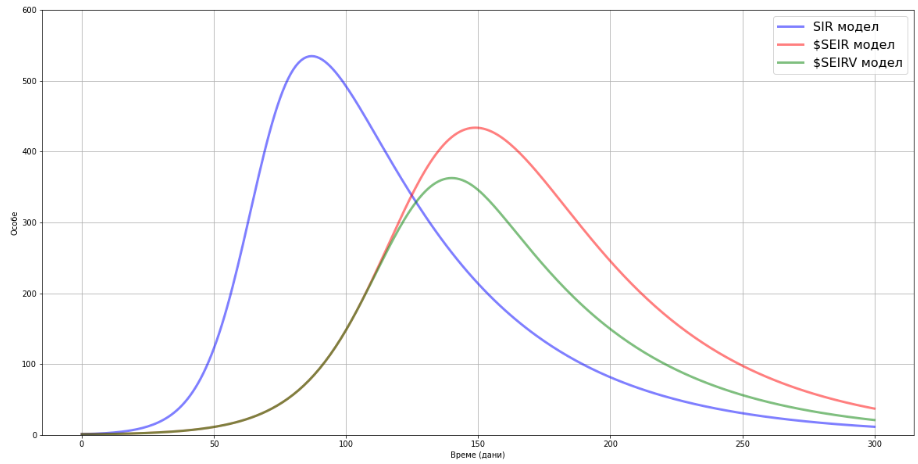


График 10 Активни случајеви

Са овог графика приметимо SIR модел пројектује највише заражених и разлог томе је јер сваки контакт доводи до заразе. Примећује се да SEIR и SEIRV модел прво дају исте функције, али се раздвајају негде после 100. дана. То се догађа због започињања вакцинације.

Следећи корак би био да се дискутује о томе када имуне особе поново постају подложне болести. Ипак, за корона вирус је и даље тешко рећи колики временски период треба да прође да би се то догодило. Стога, тај део није обрађен у овом раду.

3.7 Предкције за ковид 19

Највеће питање у вези са пандемијом које поставља обичан човек себи би вероватно могло да буде кад ће јој доћи крај. Управо је то питање које је мене навело да се бавим овом темом.

Ипак, ниво овог рада је далеко испод могућности да одреди добре предикције за развој ове болести. Испробане су краткотрајне предикције помоћу МА, али оне постају неупотребљиве чим нема бар једног реалног податка у сету по ком се рачуна просек.

Следећи корак је било покушавање моделовања преко SEIRV модела, али главна мана је што иако параметри ширења болести одговарају на почетку таласа, они не важе током целог таласа. То заправо значи да не можемо одредити када долази до пика или врха таласа, а то представља главну моћ моделовања.

4. ЗАКЉУЧАК

Овај рад има за циљ кратко представљање математике која стоји иза ширења болести, са акцентом на пандемији корона вируса која и даље влада. Приказане су главне идеје два математичка стуба, статистике која нам даје одговоре како је нешто било и математичког моделовања које би требало да понуди неки одговор шта следи.

У поглављу два, акценат је стављен на праћење тока развоја епидемије. Установљено је да је у периоду између јануара 2020. и априла 2021. само у једном тренутку дошло до смањења броја заражених у свету. Друга тема која је обрађена је свакако упоређивање политика различитих земаља у борби против вуруса. Тестирана је претпоставка да подаци о епидемији могу пратити Бенфордов закон.

У поглавље број три обрађени су основни модели епидемиологије, уз формалне математичке системе, али и искуцане кодове. Уочене су различите мане које чине да ови модели не могу предвидети будућност развоја болести.

Даљи напредак би био унапређивање модела тако да се параметри мењају кроз време, у зависности какве мере владају у популацији где се болест шири.

Захваљујем се свом ментору Николи Митриновићу на великој помоћи у изради овог рада.

5. ЛИТЕРАТУРА

[1] https://ourworldindata.org/coronavirus (Приступљено 6.4.2021.)

[2] https://coronavirus.jhu.edu/data/mortality (Приступљено 26.5.2021.)

[3] https://www.jmp.com/en_ca/statistics-knowledge-portal/chi-square-test/chi-square-goodness-of-fit-test.html (Приступљено 26.5.2021.)

[4] Јанчикић, С. (2013) Бенфордов закон. Дипломски рад. Осијек, Свеучилиште Ј. Ј. Штројсмајер у Осијеку, Одјел за математику

[5] Лазић Н. (2017) Математички модели ширења заразних болести. Мастер рад. Београд, Универзитет у Београд, Математички факултет

[6] Бабић Д. (2017) Математички модели у епидемиологији. Мастер рад. Нови Сад, Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет, Департман за математику и информатику

[7] Интернет курс Епидемија, Петља https://petlja.org/net.kabinet/epidemija (Приступљено 26.5.2021.)