Математичка гимназија
Београд

БЕРНУЛИЈЕВИ БРОЈЕВИ

МАТУРСКИ РАД
ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Ментор:
Верица Илић

Ученик:
Далибор Макисмовић

Београд, мај 2022.

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

Бернулијеви бројеви представљају низ рационалних бројева које је открио швајцарски математичар Јакоб Бернули. Бернули је хтео да израчуна збир степена целих бројева па је уочио и доказао формулу за збир степена целих бројева. После овог открића, Бернулијеви бројеви су се појавили у многим важним резултатима, укључујући проширења у низ тригонометријских и хиперболичких тригонометријских функција.

Развој Риманове-зета функције и Велика Фермаова теорема користе Бернулијеве бројеве. У ту сврху, укратко ћемо расправљати о историји математике која је довела до открића низа, а затим дотиче широк спектар примена Бернулијевих бројева. Надамо се да ћемо показати да је овај низ не само изненађујући, већ и користан алат у низу основних проблема у математици.

Оно штоје је мене навело да пишем о Бернулијевим бројевима су суме степена целих бројева. Оно што се користи у доказу за експлицитну формулу за суму степена је Ојлер-Маклоренова формула која није наведена, али ја сам уочио да се формула може добити ако у изразу

$$S_m(n-1) = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\binom{m+1}{i} \cdot I_i \cdot n^{m-i+1}$$

заменимо $n = 1$, одакле добијамо формулу за Бернулијеве бројеве.

СУМЕ СТЕПЕНА ЦЕЛИХ БРОЈЕВА

Дефинишимо уопштену формулу за суме степена целих бројева као:

$$S_m(n) = 0^m + 1^m + 2^m + \ldots + n^m$$

за позитивне природне бројеве n и m.

Бернули је користећи се сумом степена целих бројева до $n-1$ приметио да је лакше уочити правило ако посматрамо суме степена целих бројева до $n-1$, уместо до n.

Користећи математичку индукцију могу се извести следеће формуле:

$$\begin{aligned}
S_1(n-1) &= 0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\
S_2(n-1) &= 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
S_3(n-1) &= 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\
S_4(n-1) &= 0^4 + 1^4 + 2^4 + \ldots + (n-1)^4 = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \\
S_5(n-1) &= 0^5 + 1^5 + 2^5 + \ldots + (n-1)^5 = \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2
\end{aligned}$$

Уочавамо да је најстарији коефицијент полинома једнак $\dfrac{1}{m+1}$.

Бернули је извукао коефицијент $\dfrac{1}{m+1}$ и приметио да се уз чланове n^k, где је $1 \leq k \leq m{+}1$, налази производ биномног коефицијента и још једног члана чије ћемо појављивање објаснити касније. Чинећи ово Бернули је добио следеће формуле:

$$\begin{aligned}
S_1(n-1) &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}\left(n^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) n\right) \\
S_2(n-1) &= \frac{1}{3}\left(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) n\right)
\end{aligned}$$

$$S_3(n-1) = \frac{1}{4}\left(n^4 - 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)n^3 + 6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)n^2\right)$$
$$S_4(n-1) = \frac{1}{5}\left(n^5 - 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)n^4 + 10\cdot\left(\frac{1}{6}\right)n^3 - 5\cdot\left(\frac{1}{30}\right)n\right)$$
$$S_5(n-1) = \frac{1}{6}\left(n^6 - 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)n^5 + 15\cdot\left(\frac{1}{6}\right)n^4 - 15\cdot\left(\frac{1}{30}\right)n^2\right)$$

Дефиниција 1.

Бернулијеви бројеви су бројеви које дефинишемо рекурзивно на следећи начин $B_0 = 1$ и $B_m = -\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\begin{array}{c} m+1 \\ k \end{array}\right)B_k, m \geq 1$. Налазимо да је

$$B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, \ldots$$

Запишимо претходне збирове на следећи начин:

$$S_m(n-1) = 1^m + 2^m + \ldots + (n-1)^m = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m+1 \\ i \end{array}\right)\cdot I_i \cdot n^{m-i+1}, \text{ где је}$$

I_i коефицијент у заградама.
Докажимо да је I_i једнак i-том Бернулијевом броју.

Ако у изразу

$$S_m(n-1) = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m+1 \\ i \end{array}\right)\cdot I_i \cdot n^{m-i+1} \text{ заменимо да је } n = 1,$$

добијамо $0 = S_m(0) = S_m(1-1) = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m+1 \\ i \end{array}\right)\cdot I_i \cdot 1^{m-i+1} = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m+1 \\ i \end{array}\right)\cdot I_i$, па је

$$\sum_{i=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m+1 \\ i \end{array}\right)\cdot I_i = 0, \text{ где је } I_0 = 1.$$

Видимо да је последње наведено управо рекурзивна формула за Бернулијеве бројеве. Одатле је $B_i = I_i$.

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ГЕНЕРАТОРНА ФУНКЦИЈА ЗА БЕРНУЛИЈЕВЕ БРОЈЕВЕ

Дефиниција 2.

Нека је $\{a_n\}_{n\in N_o}$ низ бројева. Функција $G(x)$ дефинисана на следећи начин: $G(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$ назива се **генераторна функција** низа $\{a_n\}_{n\in N_o}$.

Дефиниција 3.

Функција $F(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_i\cdot x^i}{i!}$ назива се **експоненцијална генераторна функција** низа $\{a_n\}_{n\in N_o}$.
Треба водити рачуна да се x налази у одговарајућем радијусу конвергенције, да би функције $F(x)$ и $G(x)$ биле добро дефинисане (с обзиром да се дефинишу као редови).

Теорема:

Експоненцијална генераторна фунција за Бернулијеве бројеве једнака је $F(x) = \dfrac{x}{e^x-1}$.
Доказ:
Нека је
$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m\cdot x^m}{m!}$, тада је $x = \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m\cdot x^m}{m!}\right)(e^x-1) = \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m\cdot x^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right) = \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m\cdot x^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)$.
Кошијев производ два низа $\{a_k\}_{k\in N_o}, \{b_k\}_{k\in N_o}$ дефинише се као

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}b_m\right) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n \text{ где је } c_n = \sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\text{. Одатле је:}$$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{n+1-k}}{(n+1-k)!}\cdot\frac{a_kx^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}\cdot\frac{a_kx^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}a_k\right)$$

Упоређујући коефицијенте уз x^k на једној и на другој страни једнакости имамо да је:

$$a_0 = 1 \text{ и } \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a_k = 0, \text{ за n} \geq 1$$

што је рекурзивна формула за Бернулијеве бројеве (како смо их дефинисали на почетку).
Примећујемо да ред $\dfrac{x}{e^x - 1}$ конвергира ако је $e^x \neq 1$, тј. $x \neq 2\pi i$ па $|x| < 2\pi, x \in R$.

Лема:

Важи да је $B_{2n+1} = 0, \text{n} \geq 1$. Такође B_n је рационалан за свако $n \in N_0$.
Доказ:
Други део се добија директно из формуле:

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k.$$

Већ смо доказали да је:

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + B_1 x + \frac{B_2 x^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k \cdot x^k}{k!}, |x| < 2\pi.$$

Посматрајмо функцију $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} - B_1 x$.
Одавде следи:

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x(e^x + 1)}{2\,(e^x - 1)} = \frac{x\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)}{2\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)}$$

Можемо приметити да је

$$g(-x) = \frac{-x\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)}{-2\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)} = g(x),$$

одакле следи да је функција $g(x)$ парна. Зато су у развоју функције $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} - B_1 x$ чланови уз x^{2n+1} једнаки нули, па је $B_{2n+1} = 0$ за свако $n \geq 1$.

РАЗВОЈ КОТАНГЕНСА И ТАНГЕНСА ПРЕКО БЕРНУЛИЈЕВИХ БРОЈЕВА

Раније смо увели функцију

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1} - B_1 x = \frac{x\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)}{2\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)}$$

Знамо да су хиперболичке функције дефинисане на следећи начин

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ и } \coth\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}, \text{ па је } g(x) = \frac{x}{2}\coth\left(\frac{x}{2}\right).$$

Даље, из

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}x^{2n}}{(2n)!} \text{ следи да је } \frac{x}{2}\coth\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{тј. } \coth(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!}.$$

Пошто је

$$\coth(xi) = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{e^{xi} - e^{-xi}} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \operatorname{ctg}(x)$$

ако уврстимо xi у задњу једнакост добијамо да је

$$\operatorname{ctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{2B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{2n} x^{2n-1} 2^{2n}}{(2n)!}$$

Тиме смо добили развој котангенса преко Бернулијевих бројева.
Развој тангенса можемо добити на исти начин као и развој котангенса, а можемо и искористити добијени развој на следећи начин:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x) = \operatorname{ctg}(x) - 2\operatorname{ctg}(2x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n \frac{B_{2n}x^{2n-1}2^{2n}}{(2n)!} - 2(-1)^n \frac{B_{2n}\cdot(2x)^{2n-1}\cdot 2^{2n}}{(2n)!}\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}B_{2n}\cdot(2^{2n}-1)\cdot 2^{2n}\cdot x^{2n-1}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

РИМАН-ЗЕТА ФУНЦИЈА

Дефиниција 4:

Нека је k реалан број различит од нуле и нека је $\zeta : R \to R$ дефинисана на следећи начин
$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}.$$
Тако дефинисана функција назива се Зета функција.

Теорема:

За $k > 1$ важи да је $\zeta(k) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-k}}$ где је P скуп простих бројева.

Доказ:
За реално x, где је $|x| < 1$ имамо да је
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$
Ако за свако $p \in P$ и $k > 1$ заменимо
$$x = \frac{1}{p^k}, \text{ тада је } \frac{1}{1 - \frac{1}{p^k}} = 1 + \frac{1}{p^k} + \frac{1}{p^{2k}} + \frac{1}{p^{3k}} + \dots.$$
Такође је
$$\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2^k}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3^k}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{5^k}}\right) \cdots =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{2k}} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^{2k}} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{5^{2k}} + \dots\right) \cdots$$
На десној страни једнакости учествују сабирци облика $\frac{1}{p_1^{m_1 k} \cdot p_2^{m_2 k} \cdots p_n^{m_2 k}}$ што је канонска факторизација свих k-тих степена природних бројева. Следи да је десна страна једнакости једнака $\zeta(k)$.

Теорема:

$$\text{За } k \in Z, k > 0, \text{ важи } \zeta(2k) = \frac{|B_{2k}| \cdot (2\pi)^{2k}}{2(2k)!}.$$

Доказ:
Синусна функција $\sin(x)$ има нуле за $x = \pi k, \quad k \in Z$. Пошто се синусна функција може представити у облику полинома радијуса конвергенције $x \in R$, она се може приказати као:

$$\sin(x) = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\pi k}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{\pi k}\right), \text{ тј. } \frac{\sin(x)}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{\pi k}\right)^2\right).$$

Ако посматрамо Маклоренов развој

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots, \text{ за } x \in R$$

имамо да је

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{\pi k}\right)^2\right).$$

Ако упоредимо члан уз x^2 на левој страни имамо да је он једнак $-\dfrac{1}{6}$ а на десној страни он је једнак $-\dfrac{\zeta(2)}{\pi^2}$, па је $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.
Сада можемо да генерализујемо резултат за $\zeta(2k)$.
Из $\dfrac{\sin(x)}{x} = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{\pi k}\right)^2\right)$, за $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi), k > 0$ је $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{(\pi k)^2}\right)$, па добијамо
$\ln(\sin(x)) - \ln(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{(\pi k)^2}\right)$.
Ако диференцирамо ову једнакост по x следи:

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{1}{x} + \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{(k\pi)^2}\right)\right), \text{ а како је}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(1 - \frac{x^2}{(k\pi)^2}\right)\right) = \frac{2x}{x^2 - (\pi k)^2}, \text{ добијамо да је}$$

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{(x - \pi k) \cdot (x + \pi k)} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k}\left(\frac{1}{1 + \frac{x}{\pi k}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{\pi k}}\right).$$

Ако искористимо резултат да је

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ и } \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \cdot (-1)^k, \text{ где је } |x| < 1,$$

добијамо да је

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{\pi k}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\pi k}\right)^n \right) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi k} \cdot 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\pi k}\right)^{2n+1} \right) =$$
$$= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{2n-1}}{\pi^{2n}} \cdot \frac{1}{k^{2n}} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{2n-1}}{\pi^{2n}} \cdot \zeta(2n)$$

Већ смо доказали да је

$$\operatorname{ctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!},$$

па је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{2n-1}}{\pi^{2n}} \cdot \zeta(2n) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!}$$

Ако упоредимо коефицијенте уз x^{2n-1} добијамо да је $\frac{2}{\pi^{2n}} \cdot \zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!}$,
одакле следи $\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2 \cdot (2n)!} B_{2n}$.
Пошто је $(-1)^{k-1} B_{2k} = |B_{2k}|$ следи да је:

$$\zeta(2k) = \frac{|B_{2k}| \cdot (2\pi)^{2k}}{2(2k)!}.$$

ИЗРАЧУНАВАЊЕ БЕРНУЛИЈЕВИХ БРОЈЕВА

Теорема:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \cdot j^n \right), n \in N_o.$$

Доказ:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k x^k}{k!}, \text{ па је } B_n = f^{(n)}(0).$$

Како је

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \text{ и } x = \ln\left(1 - (1 - e^x)\right), \text{ следи}$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{(1-e^x)^k}{k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{(1-e^x)^{k+1}}{k+1} \right)$$

$$B_n = \frac{d^n}{dx^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-e^x)^k}{k+1} \right) \Bigg|_{x=0} \Rightarrow B_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{d^n}{dx^n} \left((1-e^x)^k \right) \Bigg|_{x=0}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \left((1-e^x)^k \right) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \frac{d^n}{dx^n} e^{jx},$$

$$B_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \frac{d^n}{dx^n} e^{jx} \right) \Bigg|_{x=0}$$

одакле следи да је

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \cdot j^n \right).$$

БЕРНУЛИЈЕВИ ПОЛИНОМИ

Дефиниција:

Бернулијеви полиноми представљају низ полинома $B_k(y)$ који су дефинисани следећим развојем:

$$\frac{xe^{xy}}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k(y)\cdot\frac{x^k}{k!}.$$

Теорема:

Бернулијеви полиноми задовољавају следећу рекурентну једначину:

$$B_k(y)=\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}B_n y^{k-n}.$$

Доказ:

$$\sum_{k=0}^{\infty}B_k(y)\frac{x^k}{k!}=\frac{xe^{xy}}{e^x-1}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{x^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xy)^k}{k!}\right).$$

Користећи Кошијев производ за две бесконачне суме добијамо да је

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(y)x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{(xy)^{k-n}}{(k-n)!}\cdot\frac{B_n x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}y^{k-n}B_n\frac{x^k}{k!}.$$

Ако упоредимо чланове уз x^k на једној и на другој страни добијамо да је

$$B_k(y)=\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}B_n y^{k-n}.$$

Користећи ову рекурзију добијамо прва три Бернулијева полинома:

$$\begin{aligned}
B_0(y)&=1\\
B_1(y)&=y-\frac{1}{2}\\
B_2(y)&=y^2-y+\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Примећујемо да је:

$$\frac{d}{dy}B_1(y) = 1 = B_0(y)$$
$$\frac{d}{dy}B_2(y) = 2y - 1 = 2 \cdot B_1(y).$$

Генерално можемо претпоставити да је

$$\frac{d}{dy}B_k(y) = k \cdot B_{k-1}(y).$$

Ово важи зато што је

$$\frac{d}{dy}B_k(y) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) (m-k)B_k x^{m-1-k} = kB_{k-1}(y).$$

Такође уочавамо да је

$$\int_0^1 B_m(x)dx = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m+1 \\ k \end{array} \right) B_k = 0$$

Оно што је занимљиво јесте да је $B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Да би доказали ово својство покажимо прво чињеницу да је $B_k(1-y) = (-1)^k B_k(y)$.
Доказ:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k B_k(y)\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(y)\frac{(-x)^k}{k!} = \frac{-xe^{-xy}}{e^{-x}-1}\cdot\frac{-e^{-x}}{-e^{-x}} = \frac{xe^{x(1-y)}}{e^x-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(1-y)\frac{x^k}{k!}.$$

Упоређујући коефицијенте уз x^k видимо да је $B_k(1-y) = (-1)^k B_k(y)$.
Сада можемо уочити да се заменом $y = \frac{1}{2}$ добија $B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{2k+1} \cdot B_k\left(\frac{1}{2}\right)$, тј. $B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

РЕГУЛАРНИ И НЕРЕГУЛАРНИ ПРОСТИ БРОЈЕВИ

Године 1850. Кумер је увео две класе непарних простих бројева, које је назвао регуларним и нерегуларним простим бројевима. Кумер је доказао специјалан случај Велике Фермаове теореме, тј. да једначина

$$x^n + y^n = z^n$$

нема решења ако је n регуларан прост број. За сваки природни број n доказ је дао Ендру Вајлс 1994. године.
Кумер је дао следећу дефинију регуларних простих бројева: ако прост број p не дели имениоце следећих Бернулијевих бројева: $B_2, B_4, \ldots B_{p-3}$, онда је p регуларан прост број. Још није познато да ли постоји коначно или бесконачно много регуларних простих бројева.

ЗАКЉУЧАК

Бернулијеви бројеви су моћан изненађујући низ. Док су првобитно били покривени у процесу сабирања целобројних степена, математичари су открили Бернулијеве бројеве у другим областима из математике. У овом примеру, могли смо да разговарамо о историји Бернулијевих бројева, укључујући рад математичара широм света. Јакоб Бернули несумњиво заслужује признање за њихово откриће. Почели смо са применом Бернулијевих бројева на важне проблеме у математици. Завршили смо са неколико директних формула, као и појавом Бернулијевих бројева у развоју функција и последњој Фермаовој теореми. Оно што је занимљиво јесте да су крајем маја 2009. године шведски медији објавили вијест о шеснаестогодишњем Ирачанину Мухамеду, који тренутно живи у Шведској, који је развио алгоритам за израчунавање Бернулијевих бројева. Мухамед, који је имигрирао у Шведску прије шест година, похађао је први разред средње школе.

РЕФЕРЕНЦЕ

[1] Janet Beery. Sums of Powers of Positive Integers. Mathematical Association of America. https://www.maa.org/press/periodicals/

[2] Chad Brewbaker. A Combinatorial Interpretation of the Poly-Bernoulli Numbers and Two Fermat Analogues. The Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 8, 2008.

[3] C. D. Buenger. What Are the Bernoulli Numbers?. Oregon State University, 2013. https://math.osu.edu/sites/math.osu.edu/files/Bernoulli numbers.pdf

[4] L. Carlitz. q-Bernoulli and Eulerian Numbers. Transactions of the American Mathematical Society. 76, 2:332-350, March 1954

[5] Hongwei Chen. Bernoulli Numbers via Determinants. International Journal of Mathematical Education, November 2010.

[6] Laura Elizabeth S. Coen. Sums of Powers and the Bernoulli Numbers. Eastern Illinois University, 1996.

[7] Cong Lin. On Bernoulli Numbers and its Properties. Cornell University arXiv, 2004. arXiv.org [8] F. Lee Cook. A Simple Explicit Formula for the Bernoulli Numbers. The Two-Year College Mathematics